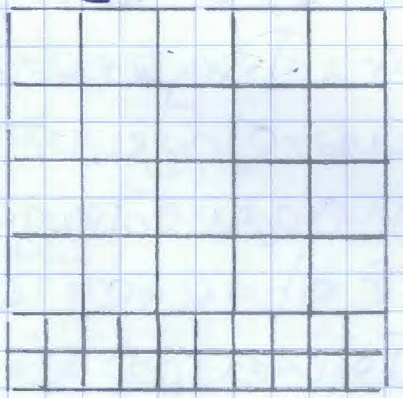
Задача №9.1 +

Разрежем квадрат 10×10 на 20 квадратов 2×2 и на 20 квадратов 1×1. Тогда раз не все "квадратики" равны между собой и каждого типа по 20 штук, то это и есть требуемое разрезание. Пример ниже.



Задача №9.2 +

Упорядочим числа: $a \geq b \geq c \geq d \geq e$
где a, b, c, d, e – это числа записа-

ные на доске ($a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ из усл-е)

Предположим, что среди этих чисел не найдутся 4 равных, тогда можно сказать, что $b > e$ $b \neq e$ (т.к. если $b = e$, то $b \geq c \geq d \geq e$ $\Leftrightarrow b = c = d = e$) и по ~~аналог~~ аналогичным причинам $d \neq a$ т.е. $d < a$.

Рассмотрим три числа: b, c, d. Из условия $(b+c+d) \vdots a$, но ~~т.к.~~ т.к. $d < a$ то $b+c+d < 3a \Rightarrow$ $\Rightarrow b+c+d = 2a$ или $b+c+d = a$.

1. Пусть $b+c+d = 2a$. Тогда Рассмотрим три числа: c, d, e. Из условия $(c+d+e) \vdots a$, но тогда раз $b > e$, то $c+d+e < b+c+d = 2a \Rightarrow$ $\Rightarrow c+d+e = a$. ~~Если~~ Таким образом имеем систему:

$$\begin{cases} b+c+d = 2a, \\ c+d+e = a. \end{cases}$$

Вычтем из первого второе, получим:

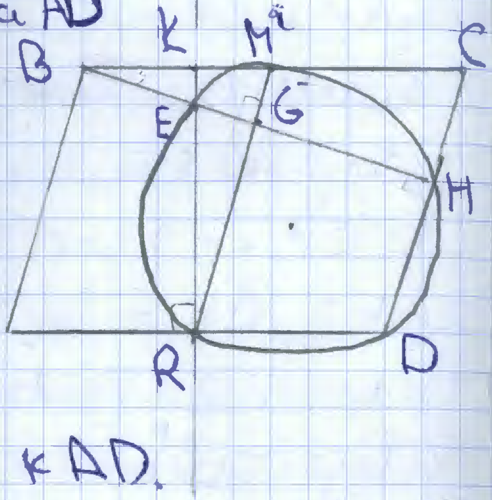
$b - e = a$. ~~Раз~~ $\Rightarrow b = a + e$, но раз $b \leq a$, то $e \leq 0$ (иначе $b < a+e$) но т.к. e (как и a, b, c, d) $\in \mathbb{N}$, то $e > 0$, получили противоречие.

2. Пусть $b+c+d = a$, тогда по аналогии с пред. пунктом $a = b+c+d > c+d+e \Rightarrow c+d+e < a$, но тогда $(c+d+e) \not\vdots\, a$, опять же противоречие.

Таким образом если $b \neq e$ и $d \neq a$, то условие задачи не выполняется для данных $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$, но если $b = e$ или $d = a$ то либо $b = c = d = e$, либо

$a=b=c=d$. Тогда среди таких 5-ти чисел обязательно найдутся 4 равных.

Задача №9.3 +



Пусть R - середина AD тогда из условия $AE=ED$ можно сказать, что E равноудалена от A и D ⇒

⇒ $E \in$ сер. перп-у к AD.

E также лежит на BH, где $H \in CD$ и $HBA=90°$. Тогда $E = BH \cap$ сер-перп к AD. ~~⇒ E = BH∩~~

Пусть сер-пер к $AD \cap BC = K$

Раз углы ~~BKR~~ $\angle EBA = \angle ERA = 90°$, то чет-к $ABER$ - вписанный,

Аналогично раз $\angle EHD = \angle ERD = 90°$, то чет-к $EHDR$ - вписанный. (пусть в окр-ть ω_1)

~~Заметим, что $\omega_1 \cap BC$ не более чем в двух точках~~

Раз точка M - середина BC, то в $\triangle BHC$ HM - медиана, которая в силу $\angle BHC = 90°$ ~~HC~~ $HM = \frac{1}{2}BC = BM$. Тогда, раз MR - отрезок соединяющий середины противо-их сторон в п-ме $ABCD$, то $MR \parallel CD$, но раз $BH \perp CD$, то $MR \perp BH$ ⇒

⇒ $MR \cap BH = G$, причём $\angle BGM = 90°$

⇒ Пусть $MBH = \alpha$, тогда в силу того что $BM = MH$ тр-к $\triangle BMH$ - равн-ый ⇒ $\angle MHG = \alpha$. Раз в т-ках $\triangle BMG$ и $\triangle RMK$ углы $\angle BGM = \angle RKM = 90°$ ($\angle RKM = \angle KRA$, ко-

торый равен 90°), также у этих треугольников есть общий угол BMR, тогда по 2 углам $\triangle BMG \sim \triangle RMK \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle MBG = \angle MRE = \alpha$. Раз $\angle MRE = \angle MHE$, то четырёхугольник MHRE - вписанный, а значит $M \in \omega$, тогда $\angle EMD = \angle DME = \angle EHD = 90°$.
Ответ: $\angle DME = 90°$.

Задача №9.4

Пусть доле A двудольного графа G есть множество вершин, каждый из которых - один из 1000 учеников. (Тогда в доле A 1000 вершин). Пусть доле B двудольного графа G есть множество вершин, каждая из которых есть какой-то из N сортов конфет. (Тогда в доле B N вершин)

Ребро между вершиной из A и вершиной из B ~~есть~~ обозначает, что школьник получил соответствующий конфету соответствующего сорта.
Заметим, что степень любой вершины из $A \geq N-10$.
Почему: из условия о том, что для любых 11 сортов найдётся ученик получивший конфету хотя бы одного из этих сортов следует, что условие задачи неверно если ~~в~~ школьник не получил конфеты каких-то 11 сортов $\Rightarrow$ степень его вершины $\geq N-11+1 = N-10$.

Тогда из дома A в дома B существует хотя бы $1000\cdot(N-1)$ рёбер.

Заметим, что в доме B не может быть двух вершин, степень каждой ~~вершины~~ из которых равна 1000

Т.к. для таких двух вершин не верно что „для любых двух сортов найдётся ученик получивший конфету ровно одного из этих двух сортов" (тогда аналогично можно сказать, что

g вершин из B со степенью $\le i$ верно выск-е, что таких вершин $\le C_{1000}^{i}$)

Тогда рёбер из B в A строго меньше, чем $1000 + C_{1000}^{1}\cdot(N-1)$

См ~~стр.~~ лист. 8

Задача №9.5.

~~Заметим, что $(x-y)(y-z)(x-z)\le$~~
~~$\le |(x-y)|\times|(y-z)|\times|(x-z)|$.~~
~~Докажем, что $|(x-y)|\times|(y-z)|\times|(x-z)|\le \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

~~По неравенству Коши между ср. арифм. и ср. квадр. для $(x-y)(y-z)$ имеем~~

~~$\sqrt{|(x-y)(y-z)|}\le\frac{|x-y|+|y-z|}{2}=\frac{x-z}{2}$ ↑ ясно, что~~

~~$|(x-y)(y-z)|\le\left(\frac{x-z}{2}\right)^2$~~

~~$|(x-y)|\cdot|(y-z)|\le\left(\frac{x-z}{2}\right)^2$~~

~~Заметим, что если~~

$\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(x-z)}$ ~~(x-y)(y-z)(x-z)~~

По неравенству Коши между ср. арифм. и ср. геом-их для чисел $(x-y)$, $(y-z)$, $(x-z)$ имеем

$$\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(x-z)} \le \frac{(x-y)+(y-z)+(x-z)}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-y)(y-z)(x-z) \le \frac{(2x-2z)^3}{27}$$

$$\Downarrow$$

что если мы докажем нер-во $\frac{(2x-2z)^3}{27} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, то

~~Пусть $(x-y)(y-z)<0$, тогда~~

~~Заметим, что если $(x-y)$~~

Рассмотрим выражение $(x-y)(y-z)(x-z)$, в нём

выделим часть $(x-y)(y-z)$ и докажем, что $(x-y)(y-z) \le \frac{(x-z)^2}{4}$. ~~Раз $(x-y)(y-z)(x-z) \le |x-y||y-z||x-z|$, то можно считать, что~~

Действительно: по неравенству Коши для $(x-y)$ и $(y-z)$ имеем

$$\sqrt{(x-y)(y-z)} \le \frac{x-z}{2}$$

Ясно, что если произведение отрицательное, то ровно одно из чисел $(x-y)$ и $(y-z)$ <0, но тогда и $(x-z)<0$, ведь в противном случае нер-во в условии становится очевидным т.к. в левой части число <0 и в прибой >0) Тогда и ~~ведь~~

$|(x-y)(y-z)| \leq \frac{(x-z)^2}{4}$

ведь действительно это верно если сказать, что

$(x-y)\times(y-z)\times(x-z) \leq |(x-y)(y-z)|\times$

$\times|x-z| \Leftrightarrow$.

Тогда мы установили верность нер-ва

$(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{(x-z)^3}{4}$

Докажем, что $\frac{(x-z)^3}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Для этого найдём наибольшее значение $(x-z)^3$.

Из условие $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-z)^2 = 1-y^2-2xz \Rightarrow$

что $(x-z)^6 = (1-y^2-2xz)^3$

$1-y^2-2xz$ тем меньше, чем больше y^2 поэтому $(x-z)^3$ будет не больше при $y^2>0$, чем при $y^2=0$, тогда $(x-z)^6 = (1-2xz)^3 \leq (1+\ldots$

$x^2+z^2 \leq 1$. В то же время по ~~время $|2xz| \leq$~~

неравенству Коши для x и z

$\frac{x^2+z^2}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot z^2} = |xz|$, но тогда

$1 \geq x^2+z^2 \geq 2|xz| \Rightarrow 2|xz| \leq 1$ ~~$\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow |xz| \leq \frac{1}{2}$~~

$(x-z)^6 \leq (1+2|xz|)^3 \Rightarrow (x-z)^6 \leq 2^3 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow |(x-z)^3|$~~

$\sqrt{2^3} \geq |(x-z)^3| \geq (x-z)^3$ тогда раз

~~$\frac{(x-z)^3}{4} \leq \frac{1}{2}$~~ ~~это есть~~

$\frac{(x-z)^3}{4} \leq \frac{(\sqrt{2^3})}{4} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значит раз $\frac{(x-z)^3}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то и

$(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Равенство достигается к примеру при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

~~Заметим, что из левой доли исходит не более 1000 N рёбер, а из правой не больше рёбер, чем кол-во комбинаций сортов при которых у людей из сортов тех сов-ло~~

~~Тогда $1000(N-10) \geq 1000 + C_{1000}^{999} N + C_{1000}^{999} + C_{1000}^{998}(N-1000-1)$ откуда 99~~

~~$-x \geq 1$ К сожалению не хватило времени дописать, но открыв скобки можно найти N~~