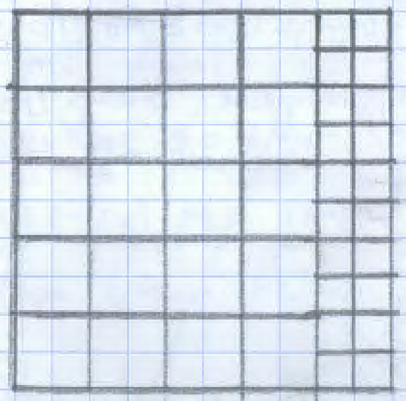
Мg-15

Задание 1 +



Квадрат 10×10 разбит на 20 квадратиков 1×1 и 20 квадратиков 2×2

Задание 2 +

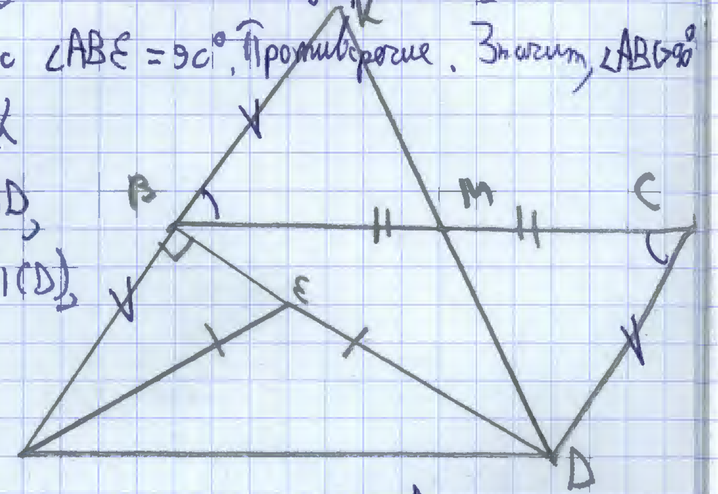
Пусть даны числа $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$. Не умаляя общности, a – ~~может~~ наибольшее из них (или одно из наибольших). Тогда $b+c+d \underset{a}{\equiv} 0$ (по условию), и $c+d+e \underset{a}{\equiv} 0 \Rightarrow b+c+d \underset{a}{\equiv} c+d+e$, и $b \underset{a}{\equiv} e$. Но $b+c+e \underset{a}{\equiv} 0 \Rightarrow b+c+d \underset{a}{\equiv} b+c+e$, и $d \underset{a}{\equiv} e$. Также $b+d+e \underset{a}{\equiv} 0 \Rightarrow b+d+e \underset{a}{\equiv} b+c+e$, и $c \underset{a}{\equiv} d$. Значит, $b \underset{a}{\equiv} c \underset{a}{\equiv} d \underset{a}{\equiv} e$. Но т.к. a – наибольшее, то $b \le a$, $c \le a$, $d \le a$, $e \le a$. Также из условия $b, c, d, e > 0$. Из последних двух предложений следует, что $b=c=d=e$

(т.к. на отрезке натуральных чисел $[1; a]$ $\exists$ ровно одно число $\frac{k}{a} = X$, где X - данное заранее число, $X \in \mathbb{N}$)

Ответ: обязательно

Задание 3 +

Если $\angle ABC \le 90^\circ$, то т.к. E - внутри $ABCD$, то $\angle ABE < \angle ABC < 90^\circ$, но $\angle ABE = 90^\circ$. Противоречие. Значит, $\angle ABC > 90^\circ$



Пусть $AB \cap DM = K$

Тогда $\angle BMK = \angle CMD$,

$\angle KBM = \angle DCM$ $(AB \parallel CD)$,

$BM = MC$

$\Downarrow$

$\Delta BMK = \Delta CMD$ (по стороне и двум углам)

$\Downarrow$ $KM = MD$

точки B, E, D не обязательно $\in l_o$

$BK = CD = AB$. Но в ΔAEK EB - высота и медиана, значит, $AE = EK$, но $AE = ED \Rightarrow KE = ED$, но $KM = MD$, тогда в равнобедренном треугольнике KED EM - медиана, проведённая к основанию $\Rightarrow EM$ - высота $\Leftrightarrow \angle EMD = 90^\circ$

Ответ: $\angle DME = 90^\circ$

Задание 5 +

Лемма 1: Если для вещественных x, y, z $x^2+y^2+z^2=1$, то $xy+yz+zx \ge -\frac{1}{2}$

Док-во: $1 = x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \ge -2(xy+yz+zx)$, т.к. $(x+y+z)^2 \ge 0$. Тогда $xy+yz+zx \ge -\frac{1}{2}$ (при делении на -2 мы сменили знак нер-ва). Лемма доказана.

Перепишем условие, данное нам, в виде $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 = 1-2(xy+yz+zx)$. Пусть $x-y=a$, $y-z=b$, $x-z=(x-y)+(y-z)=a+b$. Тогда данное нам условие запишем как $a^2+b^2+\cancel{ab}(a+b)^2 = 1-2(xy+yz+zx)$, но по лемме 1, $a^2+b^2+(a+b)^2 \le 1-2\cdot(-\frac{1}{2})=3$

Лемма 2: Если для вещественных a, b $a^2+b^2+(a+b)^2 \le 3$, то $ab(a+b) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

Док-во: $3 \ge a^2+b^2+(a+b)^2 = 2(a+b)^2 - 2ab \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}+ab} \ge |a+b| \ge a+b$. Тогда $ab(a+b) \le ab\sqrt{\frac{3}{2}+ab}$, $t=ab$

Докажем, что $t\sqrt{\frac{3}{2}+t} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge t^2(\frac{3}{2}+t) \Leftrightarrow$

$2t^3+3t^2-1 \le 0 \iff 2(t+1)^2(t-\frac{1}{2}) \le 0$. Но

$3 \ge a^2+b^2+(a+b)^2 = 2(a^2+b^2+ab) \ge 2(2|a||b|+ab) \ge$

$\ge 2\cdot 3ab \Rightarrow$ ~~ab≤~~ $t=ab \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2(t+1)^2(t-\frac{1}{2}) \le 0$ (2)

Для любого $t \le \frac{1}{2}$. Лемма доказана

Вспомним наши обозначения $a=x-y$, $b=y-z$. Тогда по лемме 2 ~~ab~~ $(x-y)(y-z)(z-x)=ab(a+b) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Причём равенство достигается при $a=b$, $ab=\frac{1}{2}$, и $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$x+y+z=0$

т.е. $x-y=y-z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Downarrow \cdot\sqrt{2}$

$x-z=\varnothing$, и $x+y+z=0$

$\Downarrow \sqrt{2}$

$2x+y=\varnothing$, $x+y=\pm\sqrt{2}/2$

$\Downarrow$

$3x=\pm\sqrt{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Downarrow$

$x=\pm\sqrt{2}=z$, и $y=0$

и всеми циклическими перестановками

ч.т.д.

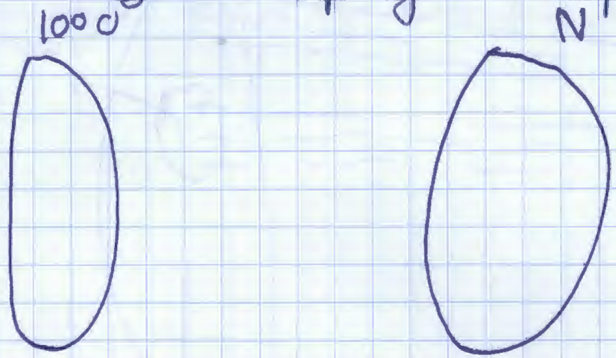
---

(1) и (2) ~~Верность~~ неотрицательность выражения под корнем в (1) следует из верного нер-ва в (2)

Задание 4

Если сортов N, а какой-то A_i ученик получил $\le N-11$ сортов, то можно выбрать 11 сортов, которых A_i не получил конфету ни одного из этих сортов. Противоречие. Значит, у каждого ребёнка $\ge N-10$ сортов.

Рассмотрим двудольный граф, где одна доля — дети, а другая — сорта конфет. Будет ребро, если малыш получил конфету этого сорта.



Заметим, что для каждого сорта, кроме, может быть, одного, есть ребёнок, который получил этот сорт (если это не так, то $\exists \ge 2$ сортов, которых ни у кого нет. Противоречие с условием)

Значит, антирёбер (рёбер отсутствие сорта у ребёнка) $\geq N-1$. Но, как мы поняли раньше, степень антирёбер у каждого мальчика ≤ 10

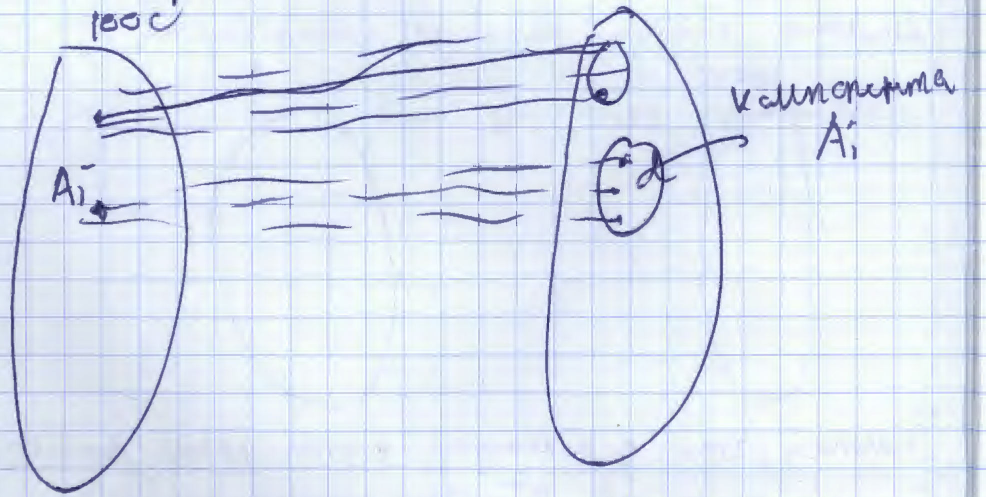
$\Downarrow$

Всего антирёбер $\leq 10^4$.

$10^4 \geq N-1$, $\boxed{N \leq 10^4+1}$

Если $N > 10^3+1$, то $\exists$ два сорта, анти-рёбра из которых приходят в одну вершину. Тогда эта вершина не будет плохой для данной пары сортов $\Rightarrow$ из этих сортов выходят ещё ~~хотя бы~~ анти рёбра в другие A_i N

1000



Если $P(A_i)$ – размер компоненты A_i, то из $P(A_i)$ выходят ещё рёбра $\geq P(A_i)-1$

$\Downarrow$

Всего антирёбер $N + \sum_{1}^{1000} P(A_i) - 1 = N + N - 1000$

и $2N - 1000 \leq 10^4$, $N \leq 5500$

Но есть пример на $N = \cancel{1000} \; 1001$

$A_1 \ldots A_{1000}$ дети

$B, B_1 \ldots B_{1000}$ сорта

B – не пробовали никому. При $\cancel{A_i}\ \forall\ i \neq j$ к A_i пр... сорт ...

Для A_i не пробовали B_i

Для сортов B_i и B_j подойдёт вершина A_i