Задача № 9.3

Дано:

ABCD – ~~....~~ параллелогр.

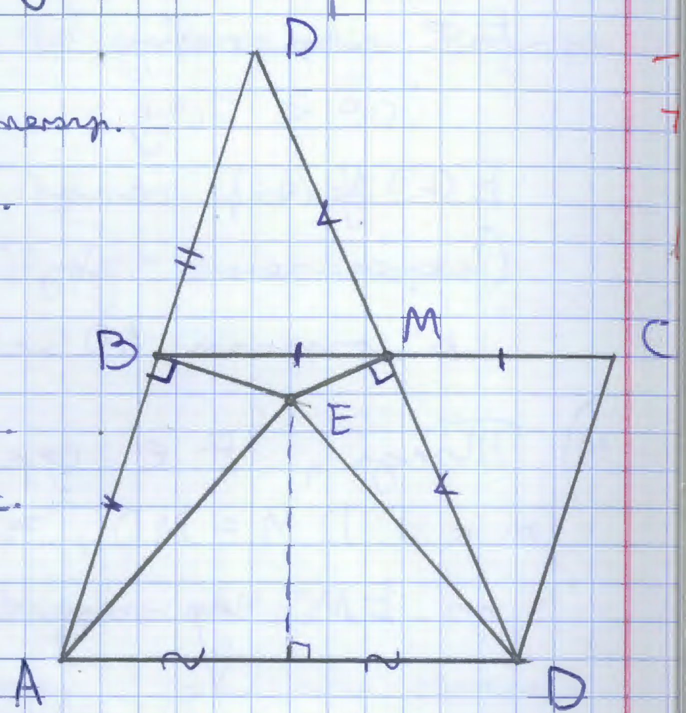
E – внутри ABCD.

$\angle ABE = 90^\circ$

$AE = ED$.

M – середина BC.

Найти: $\angle DME$.



Решение:

1) Продлим AB и DM до пересечения,
$AB \cap DM = D'$.

2) $BM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$, $BM \parallel AD$.

$\Downarrow$

BM – средняя линия $\triangle AD'D$,

$AB = BD'$, $DM = MD'$

) т.к. $AE = ED$, то
$E \in$ сер-перп к AD.

$EB \perp AD'$, B - середина AD',
$\Downarrow$
$E \in$ сер-перп к AD'.
$\Downarrow$
E - центр опис. окр. $\Delta AD'D$
(пересечения двух сер-перов к сторонам AD и AD').

Тогда, $E \in$ сер-перп к DD'.
т.к. $DM = MD'$, $\Rightarrow$ M - середина DD',
то EM - сер-пер к DD',
$\Downarrow$
$EM \perp DD'$,

$\angle DME = 90°$

~~[illegible]~~.

Ответ: $\angle DME = 90°$

Примечание:
1) т.к. $\angle ABE = 90°$, и E лежит внутри $ABCD$, то $\angle ABC > 90°$.
2) т.к. $AB \parallel CD$, а $DM \nparallel CD$, то $AB \nparallel DM$, $\Rightarrow$ есть точка пересечения.

Задача № 9.2

7б

Пусть на доску записаны числа a, b, c, d, e.
Пусть, не умаляя общности, $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. (т.к. числа по условию равноправны между собой).
Тогда, по условию:
1) $(b + c + d) \vdots a$
2) $(b + c + e) \vdots a$

3) $(b + d + e) \vdots a$

4) $(c + d + e) \vdots a$.

~~Вычтем из 1)~~

Тогда, из 1) и 2):

$$(b+c+d) - (b+c+e) \vdots a$$

$$d - e \vdots a$$

Аналогично, из 1) и 3):

$$(b+c+d) - (b+d+e) \vdots a$$

$$c - e \vdots a$$

Из 1) и 4):

$$(b+c+d) - (c+d+e) \vdots a$$

$$b - e \vdots a.$$

Тогда:

$$d - e \vdots a$$

$$c - e \vdots a$$

$$b - e \vdots a$$

Заметим, что:

$e \le d \le a$, $0 \le d - e < a$, но $d - e \vdots a$.

$$\Downarrow$$

$$d - e = 0, \quad \boxed{d = e}$$

$e \le c \le a$, $0 \le c - e < a$, но $c - e \vdots a$.

$$\Downarrow$$

$$c - e = 0, \quad c = e$$

$e \le b \le a$, $0 \le b - e < a$, но $b - e \vdots a$.

$$\Downarrow$$

$$b - e = 0, \quad b = e.$$

Тогда: $b = c = d = e$.

Ответ: да, обязательно.

Задача № 9.4.

Каждый ученик для любых 11 сортов получил хотя бы одну из них $\Longleftrightarrow$ каждый ученик получил $\geqslant N-10$ различных сортов конфет.

Заметим, что, если какие-то два сорта есть у всех, то не найдется ученика, у которого есть ровно один из них.

$\Downarrow$

Только один сорт может быть у всех.

Пусть у ученика Васи нет сортов m и n.

Тогда, у какого-то ученика должен быть сорт m и не быть сорта n (или наоборот) (исходя из условия).

Тогда, если у ученика нет k сортов, то хотя бы $(k-1)$ из этих сортов ~~все сорта~~ повторяются у других учеников.

(Иными словами, если у Васи нет сортов $a_1, a_2, \dots, a_k$, то у кого-то есть сорт a_1, но нет остальных ($a_2 \dots a_k$), у кого-то есть сорт a_2, но нет остальных ($a_1 \dots a_k$), и т.д. ~~до~~ a_{k-1} ...... у кого-то есть сорт a_{k-1}, но нет остальных ($a_1, \dots a_{k-2}, a_k$)).

(Если повторяются меньше $(k-1)$ сортов, которых нет у Васи, то есть два сорта, которые либо оба есть, либо обоих нет ~~среди~~ у остальных учеников, противоречие).

~~Тогда, будем называть сорт, которого у кого-то нет — правильным.~~

Пусть ученики — это ящики, и если мы положим сорт в ящик, значит, у ученика этого сорта нет.

Тогда, в каждый ящик мы можем положить ≤ 10 сортов.

1) положим в ~~каждый~~ первый ящик сорт 1. При добавлении в тот же ящик сорта 2, мы этот сорт 2 должны добавить еще в какой-то ящик, и т.д.

2) Подсчитаем max. кол-во сортов.

Положим в каждый ящик свой неповторимый сорт. (так как каждого ученика из k сортов, (которых нет у ученика) только (k-1) должны повторяться, 1 сорт может не повториться)

Тогда, при добавлении каждого следующего мы кладем ~~[illegible] один и тот же~~ каждый сорт минимум в два ящика (по доказанному ранее).

Тогда, в каждом ящике ≤ 10 мест, ящиков $= 1000$.

Всего мест ≤ 10000.

Добавив в каждый ящик неповторимый сорт, мы заняли (получили) 1000 мест и ≤ 1000 разных сортов (если клали разные сорта).

Осталось ≤ 9000 мест.

Каждым следующим сортом мы занимаем 2 места (по доказанному ранее). $\Rightarrow$ Мы сможем положить $\leq \frac{9000}{2} = 4500$ сортов.

Тогда, в сумме, мы не сможем положить сортов больше, чем $1000 + 4500 = 5500$.

Тогда, так как они могли повторяться, кол-во разных сортов ≤ 5500.

Однако, может быть еще один сорт, который есть у всех.

$$\Downarrow$$

$$N \leq 5501$$

Пример строится по оценке, алгоритм которой был приведен.

1 сорта нет у 1го и 2го ученика, 2 сорта нет у 1го и 3го, ..., 10 сорта нет у 1го, 11 сорта нет у 2го и 3го, 12 сорта нет у 2 и 4 ..., 19 сорта нет у 2, и т.д., $\boxed{1-10}$ (1-й) $\boxed{1,\ 11-19}$ (2-й) $\boxed{2,\ 11,\ 20-27}$ (3-й) $\boxed{3, 12, 20, 28-34}$ (4-й) ...

1 сорт есть у всех.

Ответ: наибольшее возможное значение $N = 5501$.

7

Задача № 9.1.

+

1	2	1 2 / 3 4	11	12
3	4	5 6 / 7 8	13	14
5	6	9 10 / 11 12	15	16
7	8	13 14 / 15 16	17	18
9	10	17 18 / 19 20	19	20

Заметим, что: есть квадраты вида □ и ⊞;

Квадратов вида □ – 20 штук,

квадратов вида □ – 20 штук.

$$\Downarrow$$

Все условия соблюдаются.

Задача 9.5.

$x^2+y^2+z^2=1$

$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2+y^2=1-z^2$

$x^2-2xy+y^2=1-z^2-2xy$

$(x-y)^2=1-z^2-2xy.$

$(y-z)^2=1-x^2-2yz$

$(x-z)^2=1-y^2-2xz.$

$(x-y)^2(y-z)^2(x-z)^2=(1-z^2-2xy)(1-x^2-2yz)(1-x^2-2xz)$

$= x^2-z^2=1-y^2-2z^2$

$x-z=\frac{1-y^2-2z^2}{x+z}.$

Аналогично:

$x-y=\frac{1-z^2-2y^2}{x+y}.$

$y-z=\frac{1-x^2-2z^2}{y+z}$

$(x-z)(x-y)(y-z)=\frac{(1-y^2-2z^2)(1-z^2-2y^2)(1-x^2-2z}{(x+z)(x+y)(y+z)}$

$(x-y)(y-z)(x-z)=x^2y-xy^2-x^2z+zy^2+xz^2$

Докажем, что:

$\sqrt{2}(x^2y-xy^2+x^2z+zy^2+xz^2-yz^2) \leqslant x^2+y^2+z^2$

$2(x^2+y^2+z^2)=2.$

$2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+xz)=2+2(xy+yz+xz)$

$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=(x+y+z)^2+1.$

Об