Задача 9.9.

Дано:

окр. w с центром O

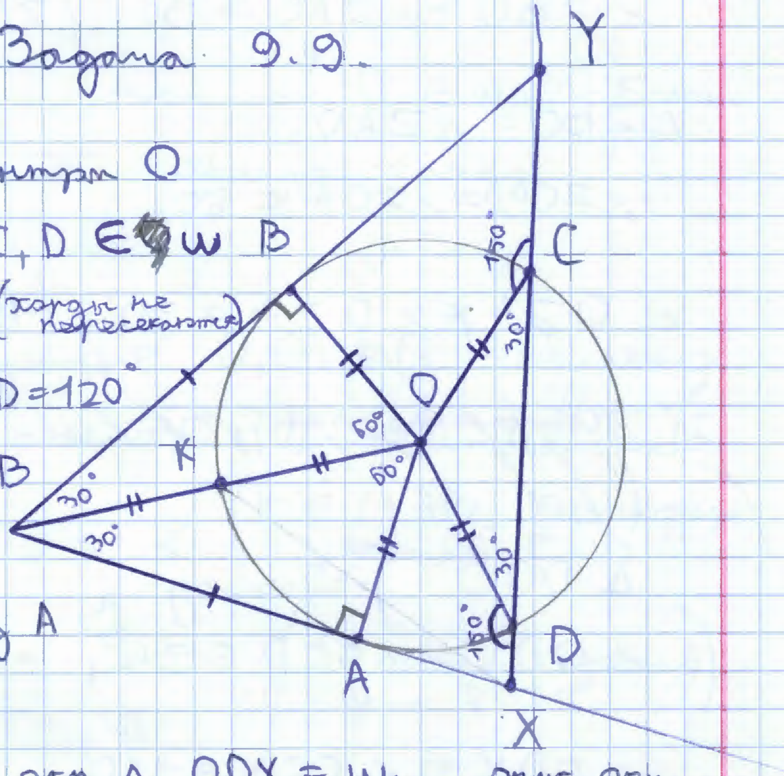
$A, B, C, D \in w$

$AB \nparallel CD$ (хорды не пересекаются)

$\angle AOB = \angle COD = 120°$

касат. к w из B $\cap DC = Y$

касат. к w из A $\cap CD = X$.



Пусть опис. окр $\triangle ODX = w_1$, опис. окр. $\triangle OCY = w_2$. Центр $w_1 = O_1$, центр $w_2 = O_2$, $O_1, O_2 \in l$.

Д-ть: l - касат. к w.

Решение:

1) $YB \cap XA = Z$.

$ZB = ZA$, (отрезки касат.), $BO = OA$, (радиус ω).

$\angle ZBO = \angle ZAO = 90^\circ$, ($ZB$ и ZA - касат).

$\Downarrow$

$\triangle ZBO = \triangle ZAO$,

$\angle ZOB = \angle ZOA = 60^\circ$,

$\Downarrow$

$\angle OZA = \angle OZB = 30^\circ$. $(180^\circ - 90^\circ - 60^\circ)$.

2) ~~ZODX - впис. 4-х угольник~~ ~~($\angle O$~~

$\triangle DOC$ - равнобедр.,

$\angle ODC = \angle OCD = 30^\circ$,

$\Downarrow$

$\angle ODX = \angle OCY = 150^\circ$

3) $ZODX$ - впис. 4-х угольник

$(\angle OZX + \angle ODX = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ)$,

$ZOCY$ - впис. 4-х угольник

$(\angle OZY + \angle OCY = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ)$.

$\Downarrow$

$Z \in \omega_1$, $Z \in \omega_2$.

4) Заметим, что и $O \in \omega_1$, $O \in \omega_2$.

Тогда, ZO - общая хорда ω_1 и ω_2.

$\Downarrow$

Линия центров O_1O_2 (ℓ) является серпер к ZO. (доказательство в примечаниях).

5). $ZO \cap \omega = K$. ($K \in \cup AB$, не содержащей C и D)

$OK = OA = \frac{1}{2} ZO$ (OA - катет против угла в 30°)

$\Downarrow$

K - середина ZO, и $K \in \omega$.

6) так как ℓ - серпер к ZO,

$\ell \perp ZO$, $\ell \cap ZO = K$.

но $K \in \omega$.

Тогда: $OK \perp \ell$, где $K \in \omega$,

$K \in \ell$, а O - центр ω.

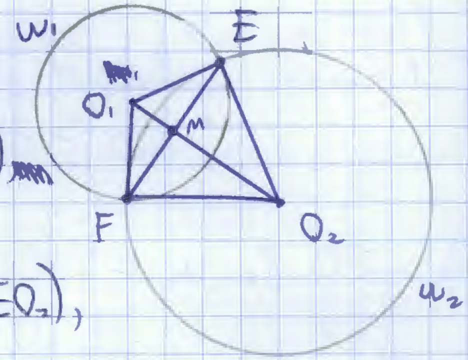
Следовательно, ~~[illegible]~~

l касается w.

ЧТД

Примечания.

1). Докажем, что линия центров двух окружностей является серпером к их общей хорде (при пересечении окр.).



Пусть M - середина общей хорды EF.

ΔFO_1E - р/б $(FO_1=EO_1)$ $\Downarrow$

$O_1M \perp FE$.

ΔFO_2E - р/б $(FO_2=EO_2)$, $\Downarrow$

$O_2M \perp FE$.

Тогда: $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 \perp FE$.

O_1O_2 - серпер к общей хорде w_1 и w_2.

2) Заметим, что из условия понятно положение точек на окружности, а именно то, что точки расположены последовательно: A, B, C, D (как на рисунке). Если точки C и D поменять местами, то для того, чтобы луч DC пересекал $\angle B$, точка D должна находиться на дуге AB, не содержащей C. Но тогда хорды пересекутся.

Задача 9.8.

Пусть число n - хорошее.

Тогда:

$$p+q = \underbrace{n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_q}}_{q} \quad (k_i \in$$

Представим q в виде суммы q штук единиц и перенесем в правую часть.

Получим:

$$p = (n^{k_1}-1^{k_1}) + (n^{k_2}-1^{k_2})+\ldots+(n^{k_q}-1^{k_q}).$$

Заметим, что:

$$a^m-b^m = (a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})$$

$$a^m-b^m \,\vdots\, a-b$$

Тогда, каждая из скобок $(n^{k_i}-1^{k_i})$ делится на $n-1$.

$$\Downarrow$$

$$p = (n-1)(\ldots\ldots).$$

$$\Downarrow$$

$p \vdots (n-1)$, (заметим, что $n \in N$, $n \neq 1$, т.к. тогда $p = 0$, $(n-1) \in N$)

p - простое,

$\Downarrow$

1) $n-1=1$; $n=2$

2) $n-1=p$; $n=p+1$

Следовательно, для выбранных чисел p и q существуют только два возможных хороших числа: $n=2$; $n=p+1$.

(хотя и эти числа могут не подойти).

$$\Downarrow$$

Серёжа считает хорошими не более двух чисел,

ЧТД.

+

Задача № 9.Б.

Заметим, что чем меньше у числа разрядов, тем оно меньше. У числа с фиксированной суммой наименьшее кол-во разрядов тогда, когда кол-во девяток (цифр 9) в записи числа наибольшее.

Заметим, что:

$2018 \equiv 2 \pmod 9$.

Тогда, наим. число с суммой цифр $= 2018$, это:

1) $2\underbrace{99\ldots\ldots9}_{224}$ (т.к. $9 \cdot 224 + 2 = 2018$).

Найдем следующее за ним по возрастанию. Если не менять двойку в старшем разряде, то сумма остальных цифр не должна измениться.

Следовательно, придется добавлять разряд (т.к. число должно изменяться).

При уменьшении двойки сумма остальных возрастет, => придется добавлять разряд.

Тогда, увеличим двойку на 1. Следовательно, уменьшим одну из девяток на 1, а именно, первую 9. (чтобы число было наим. из возможных).

Получим:

2) $38\underbrace{99\ldots9}_{223}$ (кол-во разрядов не возросло)

Тогда, каждое след. число получается путем перестановки восьмерки на разряд вправо (а на её место встает 9, которую восьмерка вытесняет)

3) $398\underbrace{99\ldots9}_{222}$

4) $3998\underbrace{99\ldots9}_{221}$

... ...

... ...

225) $3\underbrace{99\ldots9}_{223}8$.

Тогда, на 225-м месте записано число $3\underbrace{99\ldots9}_{223}8$.

+

Ответ: $3\underbrace{99\ldots9}_{223}8$

Задача 9.7

Предположим, мы смогли добиться этого. Тогда, рассмотрим конечное положение фишек.

Уберём синие фишки, ~~со своих~~ мест, не трогая зелёные и красные.

Посмотрим на их положение (зелёных и красных).

Заметим, что смена цвета (с красного на зелёный или наоборот) происходит 2 раза (есть всего 2 пары К-З).

Иными словами, по кругу лежат 20 зелёных подряд, 30 красных подряд, так как красные и зелёные не могут меняться местами. (поэтому красная не могла оказаться среди зелёных, и наоборот).

Мы предположили, что мы добились того, что рядом стоящие фишки разных цветов.

Следовательно, между соседними фишками одного цвета лежат синие фишки.

Среди группы зелёных фишек мест, где должны лежать синие $= 19$, (кол-во пар соседних зелёных фишек.)

среди красных фишек таких мест $= 29$. (кол-во пар соседних красных фишек).

Тогда, мы должны были убрать ≥ 48 (синих) фишек. Но их всего 40.

Противоречие.

+

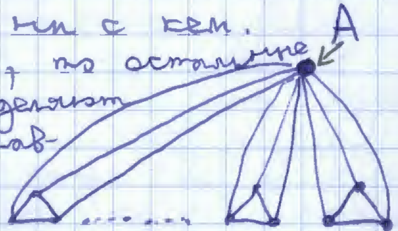
Ответ: нет, нельзя.

Задача 9.10

Ответ: 198 (33 треугольника по 3 ребра + 99 ребер от A ко всем, $= 99 \cdot 2$ (см. пример)).

Пример: Пусть ребенок A дружит со всеми, а остальные 99 детей разбились на тройки, и каждый из них дружит с тем, с кем в тройке, и с A, и больше ни с кем.

Тогда, если выделяют A, то остальные уже в тройках. Если выделяют ребенка из тройки, то оставшиеся 2 из этой тройки объединяются с A, остальные уже в тройках.



Оценка:

1) Заметим, что у каждого ребенка ≥ 3 друзей.
Пусть это не так, и у Васи ≤ 2 друзей. Тогда, выделим одного из его друзей. При этом, Вася не сможет объединиться ни с кем в тройку, так как у него осталось ≤ 1 друга,

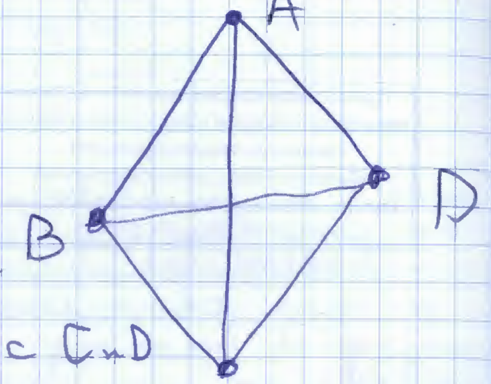
а для объединения в тройку необходимо как минимум 2 друга. Противоречие.

Представим задачу в виде графа. Пусть вершины графа — дети, а ребра графа — знакомства. Тогда, следует найти мин. возможное кол-во ребер.

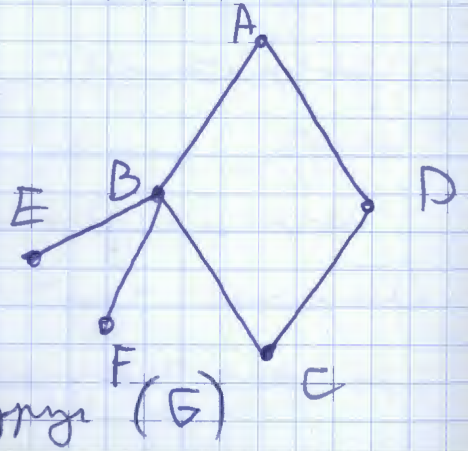
Пусть мин. степень вершины ≥ 4. Тогда, минимальное кол-во ребер $= \frac{100 \cdot 4}{2} = 200 > 198$.

Тогда, мин. ст. вершины $= 3$. (меньше быть не может). Пусть это вершина A, (с мин. ст.), и её друзья B, C, D.

Заметим,
что, если ~~…~~
выделят B, то
должен объеди-
ниться в тройку с C и D
(больше друзей у него нет). C

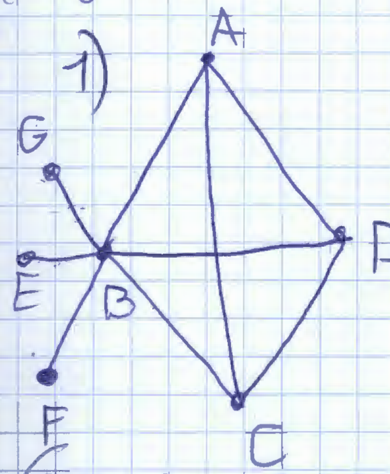


Тогда, C и D знакомы.
Аналогично, знакомы B и D,
B и C.
Пусть выделяют какую-то вершину
X. Тогда A объединяется,
не умаляя общности, с C и D.
Тогда у B должно быть ещё
как минимум 2 друга, пусть
E и F.
Выделим E.
Тогда, если
объединяется
C и D, то у
есть ещё один друг (G)

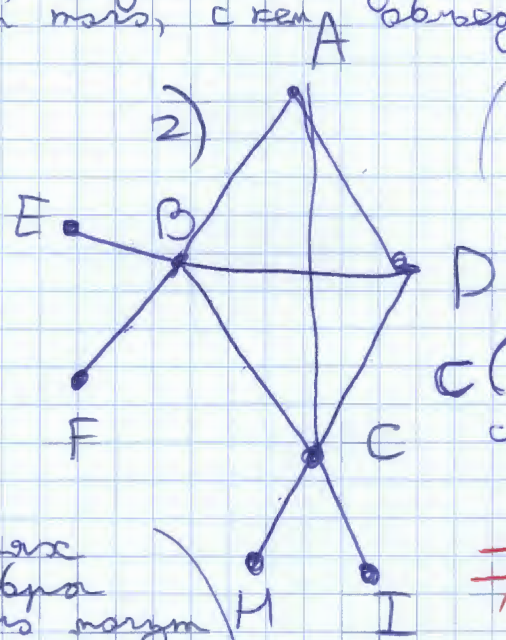


Либо, если A объединяется,
не умаляя общности, с B и D,
то у C есть ещё как минимум
2 друга (H и I).
Следовательно, возможны два случая
(в зависимости от того, с кем объединяется A)

1)



2)



(В данном случае какие-то из друзей B (E и F) и C (H и I) могут совпадать)

(В обоих случаях проведенные рёбра точно есть, но могут быть проведены ~~другие~~ ещё рёбра)

$\mp$