№2.

~~1) (Если считать, что выигрывает тот, после хода которого)~~ Допустим x – первое число, которое написал Петя на доске, ~~тогда~~ а y – число, которое написал Вася после первого хода Пети, z – число, которое было написано 3-им ходом (Петей). Эти 3 числа $\{x, y, z\}$ могут образовывать арифм. прогр. тогда, когда:

1) либо $y - x = z - y \Rightarrow 2y = x + z$;

2) либо $x - z = z - y \Rightarrow 2z = x + y$;

3) либо $y - x = x - z \Rightarrow 2x = y + z$

Существует такой y, что при любом x не будет существовать такого z, что $\{x, y, z\}$ – образовывали арифм. прогр.:

1) $z = 2y - x$

$2018 \geq x, y, z \geq 1 \Rightarrow 2018 \geq 2y - x \geq 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y \geq 1 + x \\ 2y \leq 2018 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x+1}{2} \\ y \leq \frac{2018+x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2018+x}{2} \geq y \geq \frac{x+1}{2}$

Т.е. предположим, что Вася решил найти такое число y,

~~(В 1-м случае)~~ тогда $2y = x+z$ ~~или~~ $2z = x+y$ и $2x = y+z$

не должны иметь решений в натур. числах от 1 до 2018, т.е.:

1) $z = 2y - x \Rightarrow$ z должно быть ≥ 2019 или ≤ 0

$2y - x \geq 2019 \Rightarrow y \geq \frac{2019+x}{2} \geq \frac{2019+1}{2} = 1010$

$y \leq 2018 \Rightarrow x \leq 2\cdot 2018 - 2019 = 2017$

т.е. если $x \in [1; 2017]$, то $y \geq \frac{2019+x}{2}$

$2y - x \leq 0 \Rightarrow 2y \leq x \Rightarrow 1 \leq y \leq \frac{x}{2} \leq 1009$

$\Rightarrow x \in [2; 2018]$ $y \leq \frac{x}{2}$, тогда

т.е. при $\left[\begin{array}{l} x \in [2; 2018]: y \leq \frac{x}{2} \\ x \in [1; 2017]: y \geq \frac{2019+x}{2} \end{array}\right.$

2) $z = \frac{x+y}{2}$, т.к. x и y лежат в диапазоне от 1 до 2018, то и z лежит, но, чтобы z не имело решений в N $(x+y)$

$x+y \not\vdots 2 \Rightarrow x$ и y - разной чётности.

3) Аналогичные рассуждения как в 1 п.:

$z = 2x - y \Rightarrow 2x - y \geq 2019 \Rightarrow y \leq 2x - 2019$

$2x - 2019 \leq 2\cdot 2018 - 2019 = 2017;$

$2x - 2019 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1010 \Rightarrow x \in [1010; 2018]: y \leq 2x - 2019$

$2x - y \leq 0 \Rightarrow y \geq 2x \geq 2\cdot 1 = 2$

$2x \leq 2018 \Rightarrow x \leq 1009 \Rightarrow x \in [1; 1009]: y \geq 2x$

т.е. при $\left[\begin{array}{l} x \in [1; 1009]: y \geq 2x \\ x \in [1010; 2018]: y \leq 2x - 2019 \end{array}\right.$

Обобщим условия для y при определённом x, таких что не сущ. $\{x, y, z\}$ - арифм. прогр.:

1) x и y - разной чётности $(1 \leq x, y \leq 2018)$

2) $x = 1$: $y \geq 1010$, $y \vdots 2$

$x = 2018$: $y \leq 1009$, $y \not\vdots 2$

$x \in [2; 1009]$: $\left\{\begin{array}{l} y \geq 2x \\ y \geq \frac{2019+x}{2} \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l} y \leq \frac{x}{2} \text{ не подх. т.к. } \frac{x}{2} \geq 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow x \leq 0, \text{ но } x \geq 1 \end{array}\right.$

~~(из определённых условий где y имеет одно решение) и другой чётности, во всех остальных случаях~~

$x \in [1010; 2017]$: $\left\{\begin{array}{l} y \leq 2x - 2019 \\ y \leq \frac{x}{2} \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l} y \geq \frac{2019+x}{2} \text{ не подх. т.к. } \\ \frac{2019+x}{2} \leq 2x - 2019 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \geq 2019, \text{ но } x \leq 2018 \end{array}\right.$

Видно, что при любом $x \in [1; 2018]$ есть множество y, таких, что не сущ. $\{x, y, z\}$ - арифм. прогр.

тогда допустим после первого хода Пети Вася сходил таким образом, что Петя не подберёт хода, чтобы выиграть следующим ходом, т.е. на доске записаны 2 числа + 1 число, которое запишет Петя: x, y, z; т.к. записаны ~~(что не арифм. прогр. то x и y разной чётности)~~ 3 числа, то хотя бы 2 из них одной чётности (по принципу Дирихле), значит Вася может выбрать 2 числа одной чётности и посчитав среднее, оно не будет совпадать с третьим, т.к. в таком случае уже была записана арифм. прогр., противоречие $\Rightarrow$ Вася может написать такое число и оно будет создавать арифм. прогр. с 2-мя выбранными $\Rightarrow$ Вася выиграет при такой стратегии, вне зависимости от ходов Пети.

Комментарий: в условиях для y 1 и 2 условие не противоречат друг другу, т.к. при предельных значениях x (например 1010) y имеет ед. решение, но оно отличается по чётности $\Rightarrow$ нет противоречий.

Ответ: У Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно выиграть.

№3. $x^5 - y^3 \ge 2x$ $\quad x, y > 0 \Rightarrow |x| = x,\ |y| = y,\ |xy| = xy$

Док-ть: $x^3 \ge 2y$

(Допустим $x^3 < 2y \Leftrightarrow x^5 < 2yx^2 \Leftrightarrow$

$2x \le x^5 - y^3 < 2yx^2 - y^3 \Rightarrow y(2x^2 - y^2) > 2x$)

$x^5 \ge 2x + y^3 \Leftrightarrow$

$2x + y^3 \ge 2\sqrt{2xy^3} = 2y\sqrt{2xy} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^5 \ge 2y\sqrt{2xy}$ $\left(\Leftrightarrow x^4\sqrt{\frac{x^7}{2y}} \ge 2y\right)$

$x^{10} \ge (2y)^3 \cdot x \Rightarrow x^9 \ge (2y)^3 \Rightarrow x^3 \ge 2y$

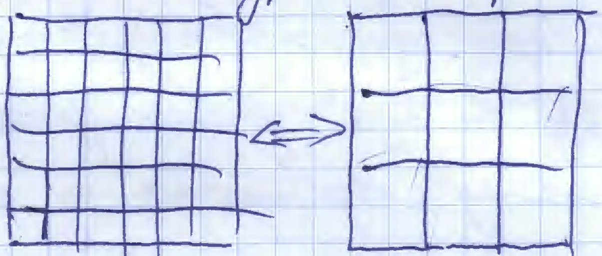
$x^5 - y^3 \ge 2x$; $\quad x, y > 0 \Rightarrow |x| = x$, $|y| = y$

$$\begin{cases} x^5 \ge 2x + y^3 \\ 2x + y^3 \ge 2\sqrt{2x\cdot y^3} = \sqrt{(2y)^3\cdot x} \end{cases}$$ (Нер-во Коши)

$x^5 \ge \sqrt{(2y)^3 x} \Rightarrow x^9 \ge (2y)^3 \Rightarrow x^3 \ge 2y$

ч.т.д.

1. Любой квадрат с не простой длиной стороны (длина измеряется в квадратиках), можно свести к разбиению квадрата с простой стороной, например сторона состоит из ap квадратиков, где p – простое, a – натуральное, можно свести к решению разбития квадрата со стороной p, взяв за „новый квадратик" квадрат со стороной a.



~~Тогда~~ Понятно, что квадраты 3×3 и 2×2 нельзя разбить на маленькие неодинаковые квадраты, это можно понять перебрав все случаи.

тогда допустим каждого вида квадрата k – штук, сторона i квадрата a_i; (~~тогда~~)
а сторона „большого" квадрата p, где p – простое:

$\Rightarrow p^2 = k\sum_{(i)} a_i^2$; $\boxed{p \neq 3,\ p \neq 2}$

$p^2 \equiv p \pmod 2$
$a_i^2 \equiv a_i \pmod 2$ $\Rightarrow p \equiv \sum_{(i)} a_i \cdot k \pmod 2$; $p \neq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k\sum_{(i)} a_i \equiv 0 \pmod 2$

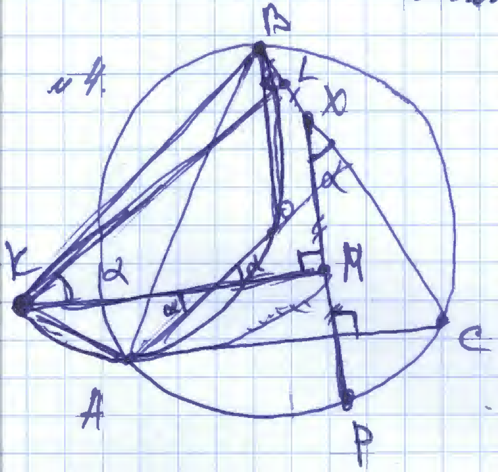
$p^2 \equiv 1 \pmod 3$
$a_i^2 \equiv 1 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $1 \equiv kn \pmod 3$,

где n – кол-во типов квадратов, $n \geq 2$;

$n \not\vdots\, 3$
$k \not\vdots\, 3$

Я думаю, что рассуждения в данном направлении должны привести к тому, что нельзя разбить на маленькие неодинак. кв. большой квадрат.

№4.



K – центр описанной окр. около △BXP;

M – сер. стороны XP

L – сер. стороны BX

$\angle LKM = \angle PXC$;