Задание 6

```
-2018 | 9
 18   |224
 --
 -21
  18
  --
 -38
  36
  --
   2
```

1. Если в числе есть цифра 0 – вычеркнем её, сумма цифр не изменится, а число разрядов ~~увеличится~~ уменьшится,

2. Каждая цифра в числе ≤ 9, ~~в~~ Значит, цифр не меньше 225 ($\sum_{1}^{\text{много}} ц \le 9\cdot 224 = 2016 < 2018$). ~~Если первая цифра~~

Далее рассматриваем 225-значное число без 0.

Если первая цифра $=1$, то $\sum_1$ ост. цифр $\le 8\cdot 224 = 2016 < 2018$. Значит, первая цифра ≥ 2. Но если первая цифра $=2$, то $\sum_1$ ост. цифр $= 2016 = 9\cdot 224 \Rightarrow$ все остальные цифры – „9". Такое число одно.

Если первая цифра $=3$, то $\sum_1$ ост. цифр $=2015$, значит, Из оставшихся цифр одна – „8", а остальные – „9" (иначе будет цифра >9). Местоположение „8" можно определить 224 способами (на место одной из девяток в числе $3\underbrace{99\ldots9}_{224}$). Всего ранее упомянутых чисел 225. Заметим, что любое число с Σ цифр $=2018$ будет больше всех вышеупомянутых (либо разрядов больше, либо первая цифра больше). Значит, на 225 месте стоит число $3\underbrace{99\ldots9}_{223}8$

7б

Задание 7

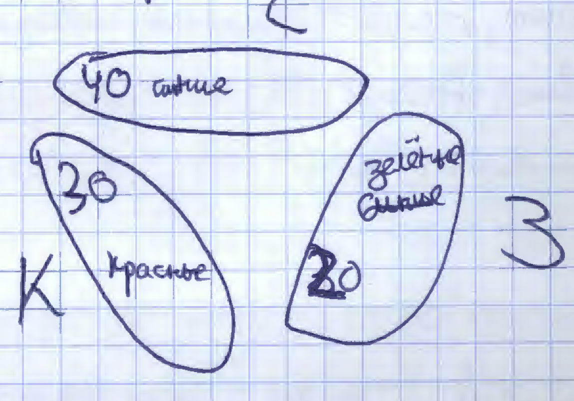
1. Введём операцию „поменять местами две соседние синие фишки"

2. Заметим, что операция „поменять местами соседние синюю и красную/зелёную фишки" – это то же самое, что операция „перепрыгнуть синей фишкой через ~~нра~~ соседнюю красную/зелёную фишку".

3. Операции „поменять местами соседние красную и зелёную фишки" нет (по условию).

Будем руководствоваться п.2 и прыгать синими фишками через остальные.

Имеем ситуацию:



Внутри блока К есть 29 пар соседних фишек, т.е. 29 „дырок", в каждую из которых надо поставить какие-то фишки (хотя бы 1). Т.е. всего в блок К надо ≥ 29 фишек

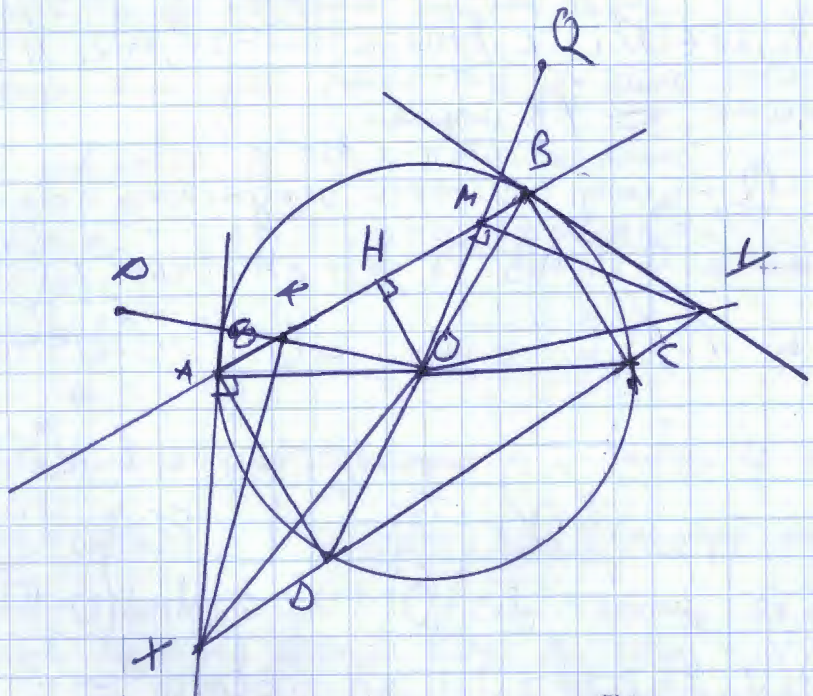
Внутри блока З есть 19 пар соседних фишек, т.е. 19 „дырок", в каждую из которых надо поставить какие-то фишки (хотя бы 1). Т.е., всего в блок З надо ≥ 19 фишек.

Заметим, что никакую из $29+19=48$ дырок мы не посчитали дважды. Но так как мы договорились играть бы только синими фишками, то в каждую из дырок надо поставить ≥ 1 фишки а всего, значит, ≥ 48 фишек (каждая фишка закрывает ≤ 1 „дырки"). Но синих фишек $40<48$. Значит, такое сделать невозможно

Ответ: нельзя

7б

Задание 9



Пусть P – центр описанной окр. $\triangle ODX$

$\angle DOC=120^\circ \Rightarrow \angle ODC=30^\circ \Rightarrow \angle XDO=150^\circ>90^\circ$,

$\angle XPO=360-2\cdot150^\circ=60^\circ$, $PX=PO \Rightarrow \triangle POX$ – равност.

$\angle POX=60^\circ$.

~~Найдём на AB т. $K\neq A$ такую, что $\angle XKO=90^\circ=\angle XAO$ (AX-кас. к ω) тогда точки X, A, K, O ле-~~

~~лежат на одной окружности и K лежит в~~ од.

Пусть $PO \cap AB = K$. Тогда $\angle XAK + \angle KOX = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ (Если K не лежит на отрезке AB, то $\angle XAK = 60^\circ = \angle XOK$, и A и O лежат в одной полуплоскости от KX $\Rightarrow X, A, K, O \in \omega_1$), и $X, A, K, O \in \omega_1$, $\angle XAO = \angle XKO = 90^\circ$, т.е. в $\triangle POX$ XK-высота $\Rightarrow$ XK-медиана.

Если Q – центр описанной окружности треугольника COY, ~~то~~ и $QO \cap AB = M$, то $\angle MOY = 60^\circ$, $\angle MBY = 120^\circ$ и $M, B, O, Y \in \omega_2$, $\angle OMY = \angle OBY = 90^\circ$

$\Downarrow$

YM-высота в $\triangle QOY$, $\Rightarrow$

Значит, середина OQ. Тогда в $\triangle POQ$ KM – средняя линия $\Rightarrow$ $dist(O; PQ) = 2\,dist(O; KM) = 2\,dist(O; AB) = 2OH$, но $\angle HBO = 30^\circ \Rightarrow 2OH = OB \Rightarrow dist(O; PQ) = OB = R_\omega \Rightarrow$ прямая PQ касается ω. Ч.Т.Д.

7б

1) $\angle XAK = 120^\circ$, т.к. XA – касат., стяг. AB – хорда, стягивающая дугу в 240° ($\cup ADCB$)

2) $dist(O; AB)$ – расстояние от O до AB

Задание 8

Пусть p, q – ~~данные~~ простые числа.

Тогда если для какого-то q число n-хорошее, то для любого $q' > q$ n-тоже хорошее:

$$p+q = n^{a_1}+\dots+n^{a_q};\quad p+q' = p+q+\Delta = n^{a_1}+\dots+n^{a_q} + \underbrace{n^0+\dots+n^0}_{\Delta}$$

+

В частности, для данного p и любого q число $\underline{p+1}$ хорошее: $p+q = (p+1) + \underbrace{(p+1)^0+\dots}_{q-1} = p+1+q-1 = p+q$. +

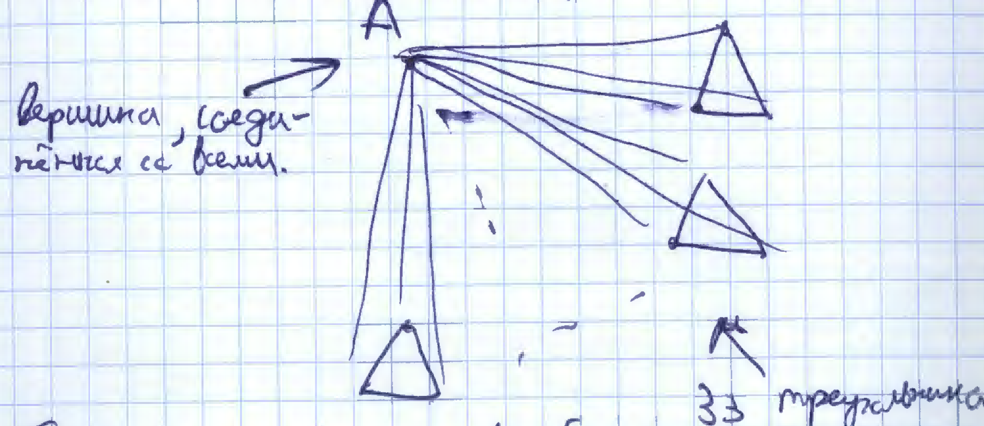
Пусть $n \geq p+1$. Тогда если $p+q = n^{a_1}+\dots+n^{a_q}$, и $a_i = 0$, то $\sum_1^q n^{a_i} = q < p+q$. Противоречие. Значит, ~~н.у.о.~~, хотя бы одно из $a_i \geq 1$, н.у.о., это a_1. Тогда $p+q = n^{a_1}+\dots+n^{a_q} \geq n + \underbrace{1+\dots+1}_{q-1} \geq p+1+(q-1) = p+q$. Тогда это означает, что при $n \geq p+1$ хорошим числом n будет только $\underline{p+1}$. +

Заметим также, что для $p-q=2$ подойдёт число $p-q$: $\cancel{p+q}$ $(p-q)^2+(q-1)(p-q)=p^2+q^2-2pq+$
$+pq-q^2-p+q=p^2-pq-p+q=p(p-q-1)+q=p+q$

1б +1

Задание 10

Есть пример на 198 пар:



Тогда при удалении A будут искомые треугольники, а при удалении другого ребёнка на его место мы сможем поставить A. Всего рёбер $\deg A+3\cdot 33=198$

Всего "двойных рёбер" (посчитанных 2 раза) $< 2\cdot 198=396$, то, по пр. Дирихле, найдётся ребёнок, из которого будет выходить <4 двойных рёбер

1б