Государственное автономное образовательное
учреждение Тюменской области дополнительного
профессионального образования
«Тюменский областной государственный
институт развития регионального образования»
(ГАОУ ТО ДПО «ТОГИРРО»)

Задача №9.6

Предположим, что на доске написано число состоящее не более чем из 224 цифр. Тогда сумма цифр такого числа $\leq 9 \times 224 = 2016$ (число из 224 девяток) Тогда наше число хотя бы из 225 цифр причем ~~хотя~~ не содержит цифру 1 или 0 (т.к. тогда Σ цифр $\leq 2016 + 1 = 2017$) рассмотрим наименьшее подходящее нам число. По ранее док-ному не начинается с единицы $\Rightarrow$ наим. число начинается с 2 Тогда все остальные цифры $= 9$ т.к. Σ ост цифр $\leq 224 \cdot 9 = 2016$, а у нас она в точности $= 2016$ (Σост. цифр!).

Тогда 225 зн. чисел нач. с 9 ровно 1 число: $2\underbrace{99..9}_{224 \text{ дев-ки.}}$

Рассмотрим числа 225 зн-ые ко- (расм-ем 225 значные т.к. по ранее док-ну наим. число на „ленте бумаги" 225 зн-ое) торые начинаются с 3-ки, тогда Σ ост. цифр = 2018 − 3 = 2015 → → все остальные цифры = 9, кроме одной, равной 8.

Тогда наим 225 зн число нач. с 3 и сод 8 и 223 девятки есть $38\underbrace{99..9}_{223 \text{ штуки}}$ → оно будет написано третьим, Понятно, что чем дальше 8 находится от 3 (чем больше между ними девяток) тем больше наше число. 8 можно поставить между любыми 2 девятками или справа от них. Тогда вариантов числа 225 зн. с Σ цифр = 2018, кот нач. с 3 равно 224 (222 между цифр. ~~и~~ пост 8 и 2 по краям) → → наиб из данных 224 чисел есть $3\underbrace{999..9}_{223 \text{ дев-ки}}8$ — оно и есть написано на „ленте бумаги" под номером 225.

Задача №9.7

Пусть вподряд по кругу ~~написаны числа a, b, c, d и~~ ~~мы можем поменять места-ми~~ Стоят какие то фишки a, b, c, d и мы можем и мечем фишки b и c. Тогда из ситуации a b c d мы пришли к ситуации a c b d. Понятно, что мы могли бы получить ту же расстановку убрав b и поставив между c и d. Обобщим этот факт: у нас в условии есть 2 операции: менять рядом стоящие син. и кр. фишки или син. и зелёную фишки, но тогда по ранее сказанному можно переформулировать условие как: можно взять синюю фишку и поставить за какую-нибудь не ~~[illegible]~~ синюю, но стоящую рядом фишку. Тогда зафиксируем на окружности все зел и крас. фишки. Тогда не умаляя общности

разрешим себе просто ~~[illegible]~~ снять все синие фишки и ставить их в какие либо промежутки между двумя фишками. Тогда чтобы любые 2 зелёные фишки не стояли рядом нам надо ~~[illegible]~~ во все промежутки между зел. поставить по син. фишке. Промежутков у нас 20+1−2=19 тогда аналогично между красными ~~[illegible]~~ нужно поставить ~~хотя~~ 30+1−2=29 Тогда всего фишек синего цвета должно быть хотя бы 19+29=50−2=48, но раз у нас всего 40 син. фиш то и сделать так, как прост в условии у нас не получится

Задача №9.10

~~Доказ~~ Пусть дети – вершины нашего графа (из условия кол-во вершин ≥100), тогда ребро между 2 детьми есть их взаимная дружба.

I Докажем что наш граф связен.

Предположим противное: в нашем графе есть хотябы 2 компоненты связности пусть в первой m а в другой n вершин. Если мы выгоним ребенка из компоненты из n вершинах, то все оставшиеся n-1 этих вершин распались на треугольники ⇒ ⇒ $n-1 \underset{3}{\equiv} 0 \Leftrightarrow n \underset{3}{\equiv} 1$. При такой же

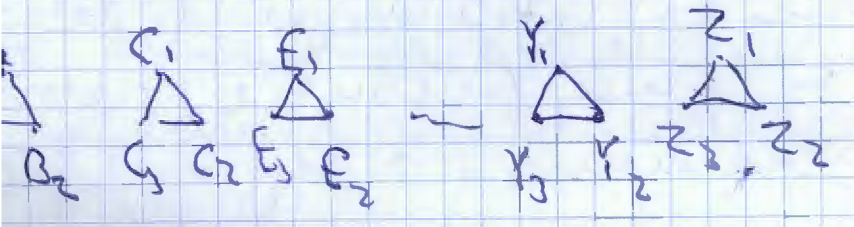
операции все из m распались на тройки (тройки – есть ~~полный~~ подграф K_3) – т.е. полный граф. на 3 вершинах. Тогда $m \underset{3}{\equiv} 0$ Но выгнав человека из m у нас появится компонента (m-1) вершиной ⇒ раз $m-1 \underset{3}{\equiv} 2$, то Для такой компоненты условие не верно.

II Докажем что степень любой вершины ≥3.

Действительно пусть нашлась вершина A такая что $\deg A < 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \deg A \leq 2$ тогда выгоним любого ~~др~~ друга A. Теперь $\deg A_N \leq 1$, но раз A должна входить в хотя бы 1 треугольник, то $\deg A_N \geq 2$ – противореч

оказав эти факты рассмотрим
к~~ао~~ую то вершину и для
е разобьём все ост. вершины
а 33 цикла (K_3) :

.D



На данный момент на рисун-
– 33 × K_3 ≈ т.е. 99 рёбер.

~~ ~~ Рассмотрим циклы $B_1B_2B_3$,
C_3, … $Z_1Z_2Z_3$ ~~как вер~~ и
дельно D как вершины
нового
ого графа тогда ~~разновой~~
(из I)
~~граф связен то В-Р ≥ 1 =>~~
~~хотя бы 33 ребра есть таких,~~
~~которые соединяют граф.~~
~~(не умоляя общности)~~

Государственное автономное образовательное
учреждение Тюменской области дополнительного
профессионального образования
«Тюменский областной государственный
институт развития регионального образования»
(ГАОУ ТО ДПО «ТОГИРПО»)

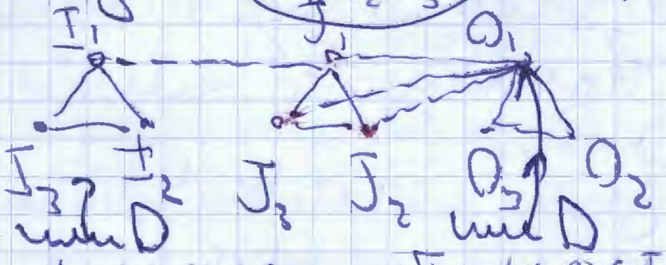
~~либо как $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ … $Z_1Z_2Z_3$,~~
~~D либо как $B_1B_2B_3$, D, $C_1C_2C_3$,~~
~~$E_1E_2E_3$, … $Z_1Z_2Z_3$ (не умаляем~~
~~общность в силу того, что~~
~~отдельно о цикле мы ничего~~
~~ничего пока не говорим.~~

~~Воспользуемся фактом II~~

~~На данный момент имеем~~
~~хотя бы 99+33=33·4 ребер.~~

Или вершина D

Воспользуемся фактом II и
рассмотрим „соединение"
каких то двух циклов K_3
пусть $T_1T_2T_3$ и $J_1J_2J_3$ и $O_1O_2O_3$



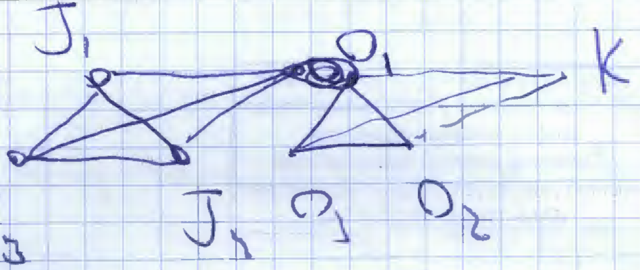
Пусть у нас
есть ребро
T_1J_1 (не
умаляя общности)

гда заметим что из (II) следует
о и $\bar{J}_2$ и $\bar{J}_3$ имеют хотя бы
о 1 ребру с какими то другими
вершинами. Если J_2 ~~не~~ (ровно
ж могли бы взять J_3) соединён
O_2 то либо J_2 имеет хотя
помимо имеющих.
ещё 1 ребро ~~либо (уходящи~~
–, либо существуют рёбра
$_3O_1$ (если выделим J_1, то
имеет только рёбра с J_3 и O_1, мо
огда есть ребро J_3O_1) по ана-
~~[illegible]~~ логичным соображениям.
и выделив J_3 поймём, что
ть ребро J_1O_1
огда если ребро из $\bar{J}_2$ уходит
что-то
~~какой-то~~ цикл, то из этого ци
или вершину
D
икла уходит хотя бы 4 ребра
в том случае, если рёбра

~~J_1I_1 и O_1J_1 не совпали, ибо~~
~~они могли совпасть при~~
~~$\bar{I}_1 = D$ и $O_1 = D$ т.к. мы рассм~~
~~тройку~~ ~~3 компонента~~
~~$\bar{I}_1\bar{I}_2\bar{I}_3$; $J_1J_2J_3$; $O_1O_2O_3$ или D ($O_1O_2O_3 \neq I_1I_2I_3$)~~
~~или D~~
~~Тогда из каждого цикла~~
~~$B_1B_2B_3$ $C_1C_2C_3$, ... $Z_1Z_2Z_3$ уходит~~
~~не менее~~ ~~3 рёбер~~ ~~4 рёбер~~
~~в другой цикла или~~

J_1I_1 и O_1J_1 не совпали.
Пусть J_1 и O_1J_1 совпали, тогда
имеем картину?
$\bar{J}_1$, D или O_1 или I_1
$\overset{\circ}{J}_0$ $\overset{\circ}{\bar{J}}_1$

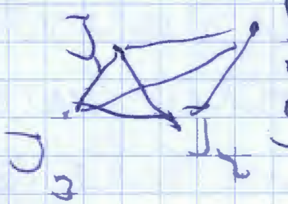
усть



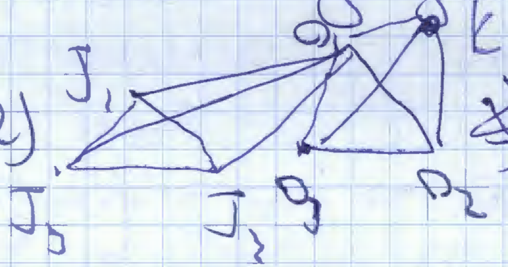
у $J_1J_2J_3$ мы говорим, что
исходят рёбра тогда
у O_2 ~~и O_3~~ должно исходить
хотя бы ~~по~~ 1 ребро не в $J_1J_2J_3$
в какую-то K т.е. ребро
K аналогично пред. пункту:
либо ~~у~~ есть рёбра O_3K и O_1K,
либо у ~~O_2~~ O_2 ещё больше рёбер.
когда из $J_1J_2J_3$ и $O_1O_2O_3$ (не
считая рёбер J_1J_2, J_2J_3, J_3J_1;
O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 исходит всего
рёбер ≥ 9 ⇒ в среднем рёбер
не меньше 4. Тогда ~~Рег~~
условии просят найти кол-во
нужно, что это в наименьшем графе
миним. кол-во рёбер, найдём
это кол-во.

~~Пусть~~ Рассмотрим все
изложенные выше ситуации:

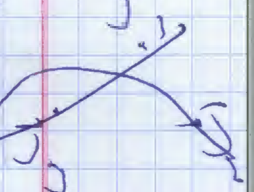
1)



2)

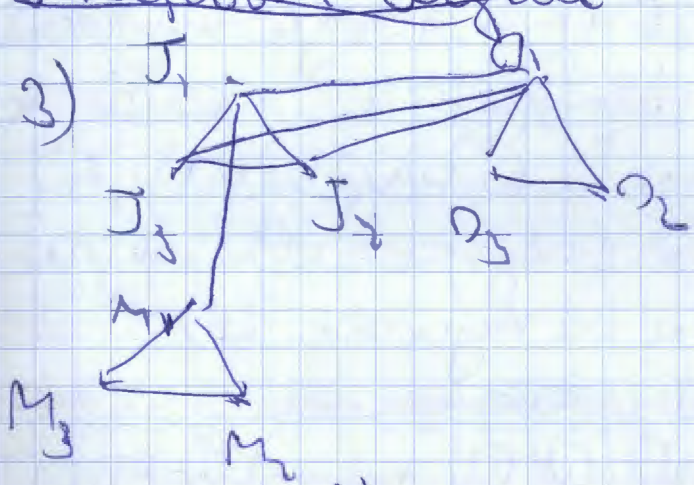


~~3)~~



~~В первом случае~~

3)



~~в случае 1) у нас у~~ J_1

~~Пусть все рёбра имеют равный
вес. Оценим суммарный вес
всех рёбер помимо тех, что~~

в исходных K_3.

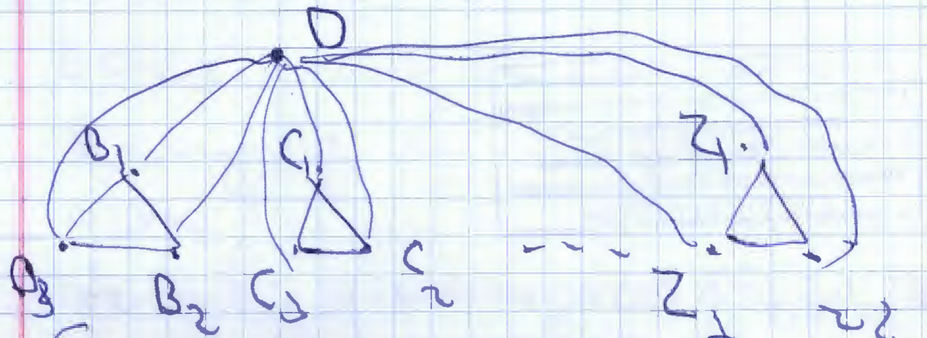
~~в случае 1) $M_{J_1J_2J_3} \geq m+m+m = 3m$~~

~~2) $M_{J_1J_2J_3} \geq 3m$, но $M_{O_1O_2O_3} \geq 6m$ тогда если $J_1J_2J_3$ и $O_1O_2O_3$ были бы соединены с D то их M Σ-ма было могла бы быть 6m ⇒ с/2 соединение как в 2) отсутствует аналогично~~

~~3) $M_{J_1J_2J_3} \geq 4m$ ⇒ тогда и в любом случае $M_{J_1J_2J_3} \geq 3m$, но тогда но это только в случае 1), в остальных случаях Σm будет~~

Тогда если в пункте 2 мы возьмём наши $J_1J_2J_3$ и $O_1O_2O_3$ то между ними $3K_3$ ребра, но в тоже время между $O_1O_2O_3$ и K есть $\geq 3K$ нет но аналогично для K Σ≥ ~~когда~~ и не трудно понять, что

для такого соединения из ~~[illegible]~~ Z ~~нужно~~ циклов нужно добавить ~~(Z−1)·3+~~ $1\times3+(Z-2)\times6+3 = 6+6Z-12 = 6Z-6$ рёбер что при $Z \geq 2$ (таков у нас и есть) $\geq 3Z$ ($3Z$ это если все циклы соединены с D). 3-ий способ явно не выгоден, ~~т.к.~~ по аналогичным (2) рассуждениям. Тогда всего рёбер не в K_3 хотя бы $33\times3=99$ ⇒ тогда добавим исходные 99 рёбер чтобы рёбер в ~~[illegible]~~ нашем графе $\geq 99+99=198$. Пример 3



Если мы уберём O, то очевид-
но все ост. верш. бьются на
треуг-ки $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ — $Z_1Z_2Z_3$,
если в каком то уже
(т.к. не умал. общн) выберит верши-
ну B_1, то имеем т-ки
KB_2B_3, $C_1C_2C_3$ — $Z_1Z_2Z_3$
тогда просто O, и K мин. число
всего рёбер внутри т-ков
$3\cdot 33=99$ и 99 рёбер от D итого
198 рёбер.

~~№9.8~~. Задача №9.8.

~~рассмотрим p+q если q≠2 и p≠2 тогда заметим, что p+q - чётное т.к. нечёт + нечёт = ч.~~

~~Тогда 3 пусть n≠2 Тогда~~
Пусть p или q=2,
p=2 тогда p+q= нечёт. число
значит $p+q=q+2$ т.к. $n^k \geq 1$ при $k\neq 0$,
то $(q-1)+n^k \leq q+2$, но тогда
понятно что ~~n≠2 или~~ $n \neq 3 < 4$
и $n\neq 1$ тогда для $q=2$ ~~равно 2~~
не больше 2 подходящих n ($n=$
$n=$
Пусть ~~p=2~~ $q=2$, тогда ~~надо~~
$p+q=p+2$ - тогда ясно, что
при n-нечт. $p+2$ и $n^{k_1}+n^{k_2}$
разной чётности, при $n=2m$
$p+2$ и $n^{k_1}+n^{k_2}$ имеют одну
чётность только при $k_2=0$ тогда
понятно, что $p+1=n^{k_1}$

Пусть или q или p ≠ 2.
Тогда p+q = чёт числу.
Тогда ~~p+q не~~ числа n=2r+1
не явл. хорошими (Σ q нег.
при q-нег есть не. число)
Тогда сами p+q предст в виде
$p+q=$ ~~[illegible]~~ $(2l)^{k_1}+(2l)^{k_2}+(2l)^{k_q}+0$
заметим, что среди ~~них Кат~~ ~~[illegible]~~ показ
степеней $k_i=0$ будет ~~чёт~~.
чёт. кол-во, тогда заметим,
что мы можем представить
p+q в двоичной системе ~~как известно~~
исчисление ~~Тогда Пусть~~

пусть $p+q=(2z)^{k_1}+(2z)^{k_2}+\ldots+(2z)^{k_q}$
и $p+q=(2l)^{k_{q+1}}+(2l)^{k_{q+2}}+\ldots+(2q)^{k_{2q}}$
Тогда

$$(2z)^{k_1}+(2z)^{k_2}+\ldots+(2z)^{k_q}=(2l)^{k_{q+1}}+\ldots$$
$$\ldots+(2l)^{k_{q+2}}+\ldots+(2q)^{k_{2q}}$$

~~Ф~~ Воспользуемся постулатом Бертрана. К сожалению нехв времени.