Задача 10.2.

Ответ: выигрышная стратегия у Васи (2го игрока).

Решение:

Лемма: Для любых двух чисел a и b с одинаковыми остатками при делении на 2 можно записать третье, такое, что оно будет принадлежать промежутку от a до b и образовывать с ними арифметическую прогрессию.

Док-во: Пусть $b > a$;

По св-ву арифм. прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$,

где $a_n \in (a_{n-1}; a_{n+1})$ при $d>0$

$a_n \in (a_{n+1}; a_{n-1})$ при $d<0$

Тогда, при

1) $a, b \,\vdots\, 2$;

$a=2k$; $b=2n$; $k, n \in N$; $c = k+n = \frac{a+b}{2}$

2) $a, b \not\vdots 2$

$a = 2k+1$; $b = 2n+1$; где $k, n \geq 0$; $k, n \in \mathbb{Z}$

$c = k+n+1 = \frac{a+b}{2}$.

Следовательно, числа a, b и c образовывают арифметическую прогрессию; $a < c < b$.

ч.т.д.

Используя эту лемму, утверждаем, что для того, чтобы выиграть Васе необходимо записать такое число, которое при делении на 2 будет давать остаток отличный от того, который будет давать Петино число.

Кроме того, чтобы следующим своим ходом Петя не выиграл, Васино число z должно быть удалено от Петиного числа x более, чем x от ближайшей ему границы (1 или 2018), т.е. $|z-x| > |x-1|$ или $|z-x| > |x-2018|$

Заметим, что Вася всегда сможет подобрать такое число, т.к. 2018 - чётное число

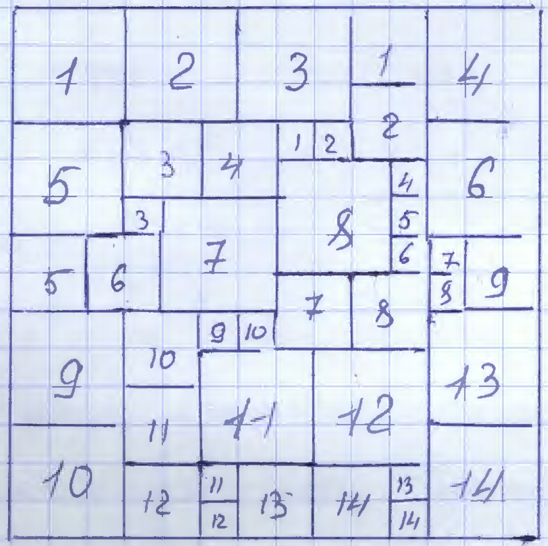
Например:

для	$x \leq 1009$	, $x \vdots 2$	$z = 2017$
для	$x \leq 1009$	, $x \not\vdots 2$	$z = 2018$
для	$x > 1009$	, $x \vdots 2$	$z = 1$
для	$x > 1009$	, $x \not\vdots 2$	$z = 2$

т.е. Вася всегда может сделать так, чтобы своим вторым ходом Петя никаким образом не мог бы выиграть. Ровно как и всегда Вася может выиграть четвёртым ходом: из трёх чисел найдуться хотя бы 2 одинаковой чётности (принцип Дирихле). А по уже указанной лемме найдется выигрышное для этой пары число. Таким образом, игрок, делающий ход вторым всегда может гарантированно выиграть.

Задача 10.1

Возьмём квадрат 14×14 и разобьём его на квадраты 1×1, 2×2 и 3×3. $(1+4+9=14)$



По 14 квадратов каждого размера.

Задача 10.3

$x^5 - y^3 \geq 2x$

$x(x^4-2) \geq y^3$

$8(x^5-2x) \geq 8y^3$

$2\sqrt[3]{x^5-2x} \geq 2y$

$x(x^4-4)^2 \geq 0$, т.к. $x, y > 0$

$\Updownarrow$

$x^9 - 8x^5 + 16x \geq 0$

$\Updownarrow$

$x^9 \geq 8x^5 - 16x$

$\Updownarrow$

$x^3 \geq 2\sqrt[3]{x^5-2x}$

$x^3 \geq 2\sqrt[3]{x^5-2x} \geq 2y$

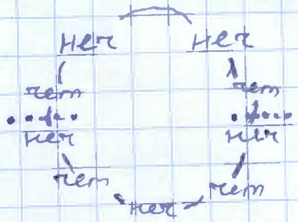
$\Downarrow$

$x^3 \geq 2y$ ч.т.д.

Задача 10.5.

Т.к. $n \not\vdots\, 2$, то имеем k чётных чисел и $k+1$ нечётных.

Чётное число может стоять только между числами одинаковой чётности, иначе оно не будет делителем их суммы. Однако, если хоть бы одно чётное число стоит между двумя другими чётными, то и все остальные числа в круге вынуждены оказаться чётными => чётное число обязательно стоит между двумя нечётными. А т.к. нечётных чисел ровно на одно больше, чем чётных, то круг принимает вид.



чётные и нечётные числа чередуются между собой и только в одном месте рядом стоят 2 нечётных.

Кроме того, одно из них обязано быть n, т.к. сумма никаких двух чисел из промежутка $[1; n)$ не превзойдет и не станет равной $2n$