M10-39

№6.

По условию $n = dk$, $k \in N$, $d \in N$, $n \in N$

Каждую дробь, выписанную на доске, можно представить в виде $\frac{i-1}{n-(i-1)}$, где $i \in N$, $i \le n$.

Тогда решим уравнение:

$$\boxed{\frac{i-1}{dk-i+1} = d-1}$$

$$i-1 = d^2k - dk - di + i + d - 1$$

$$di = d^2k - dk + d,\quad \text{т.к. } d \neq 0,\ d \ge 1$$

$\boxed{i = dk - k + 1}$ — при таком i дробь ~~$(1 \le i \le n \Rightarrow)$~~ ~~(не)~~ имеет значение $d-1$:

$$\frac{dk-k+1-1}{dk-dk+k-1+1} = d-1,\quad \text{т.к. } k \ge 1,\ k \neq 0$$

$1 \le i \le n$: $\quad dk-k+1 \le n = dk$

$\Updownarrow$

$k \ge 1$ — верно

$dk-k+1 \ge 1 \Leftrightarrow d \ge 1$ — верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такое значение i найдётся всегда $\Rightarrow$ при любом n и d есть дробь вида ~~[illegible]~~

$\frac{i-1}{n-(i-1)}$ равно $d-1$, где $n \vdots d$ а $i \le n$; $n \in N$; $d \in N$; $i \in N$;

ч.т.д.

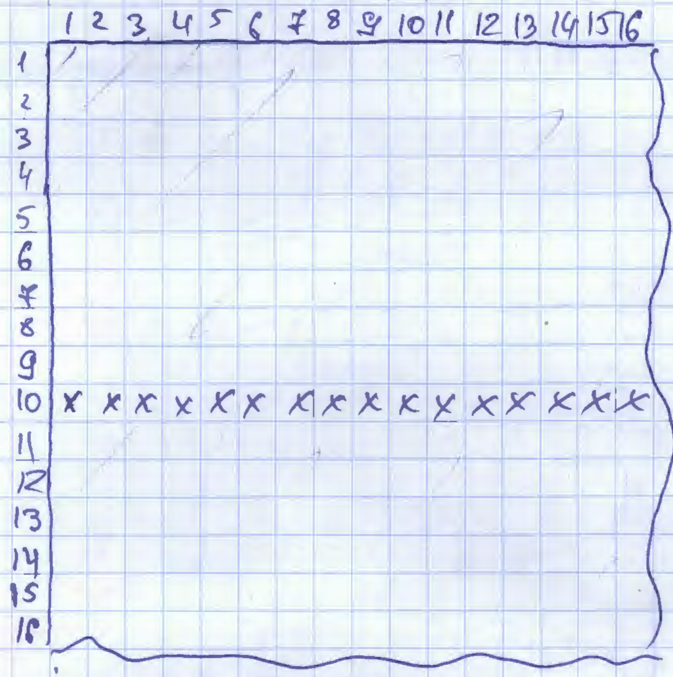
№8.

Рассмотрим квадрат 10×10 в нём максимум может быть гепардов 10, т.к. куда бы мы не поставили гепарда в этом квадрате, следующих мы можем ставить только либо в строчку либо в столбец. ~~Если бы было больше 10, например, 11 гепардов, то один гепард был бы на другой строке или столбце~~

Квадратов 10×10 в квадрате 1000×1000 может быть $\frac{1000\cdot 1000}{10\cdot 10} = 10000$, Но т.к. в каждом квадрате 10×10 не больше 10 гепардов, то в квадрате 1000×1000 не больше $10000 \cdot 10 = 100000$ гепардов

Построим пример с 100000 гепардами:

~~(Поставим всех гепардов в каждую строчку через)~~ Поставим в каждую 10-ую строчку гепардов во всю строчку, тогда гепардов будет $1000 \cdot \frac{1000}{10} = 100000$.



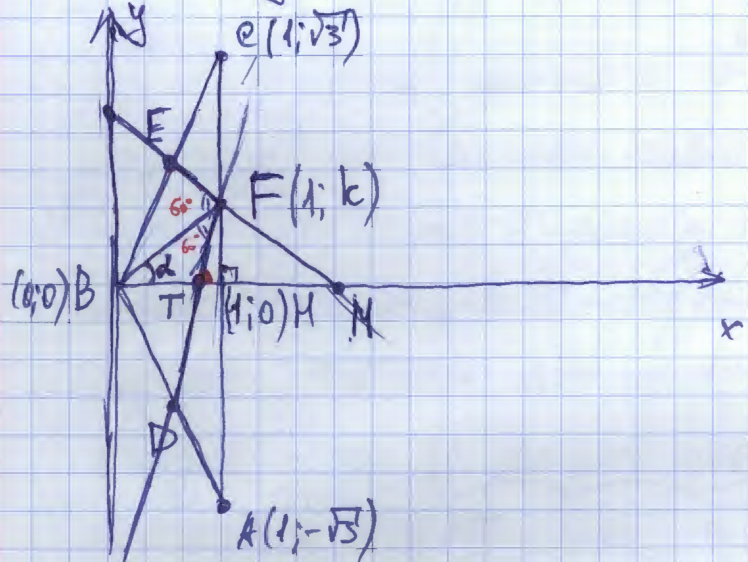
x – гепард

При такой расстановке никакие гепарды не бьют других и их 100000, а т.к. это максимум то больше быть не может.

Ответ: 100000 гепардов.

№10.

Введём систему координат с началом координат в точке B и ед. отр. = высоте из B и ось oX напр. по ~~(...)~~ высоте из B.



$\angle HBC = \angle HBA = 60^\circ \Rightarrow BC:\ y = \sqrt{3}x$

$BA:\ y = -\sqrt{3}x$

$P = 2\sqrt{1+3} + 2\sqrt{3} = 2(2+\sqrt{3});$ $\quad k = tg\,\alpha$

допустим $BF:\ y = tg\,\alpha\, x = kx;\ 0 \le \alpha \le 60^\circ;$

(Взято $\alpha \ge 0$ в силу симметрии системы)

Не сложно показать, что:

$\angle DFH = 30^\circ - \alpha$, т.к. $D \in AB$, то $30^\circ - \alpha > 0^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha < 30^\circ;$ $\quad 0 < k < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \angle FTH = 60^\circ + \alpha;\ \angle FMT = 60^\circ - \alpha;$

$TF:\ y = tg(60^\circ + \alpha)x + c$

$tg(60^\circ+\alpha) = \frac{\sqrt{3}+k}{1-k\sqrt{3}}$

$c = k - \frac{\sqrt{3}+k}{1-k\sqrt{3}} = \frac{k - k^2\sqrt{3} - \sqrt{3} - k}{1-k\sqrt{3}} =$

$= \frac{-k^2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-k\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\left(\frac{k^2+1}{1-k\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{k^2+1}{k\sqrt{3}-1}\right)$

$TF:\ y = \frac{\sqrt{3}+k}{1-k\sqrt{3}}x + \sqrt{3}\left(\frac{k^2+1}{-1+k\sqrt{3}}\right)$, ищем пересеч. с BA:

$tg(60^\circ+\alpha)$ $\quad c$

$-\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}+k}{1-k\sqrt{3}}x + \sqrt{3}\left(\frac{k^2+1}{-1+k\sqrt{3}}\right)$

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1-k^2}{2k+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow D(x_1; y_1)$

$y_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{k^2-1}{2k+\sqrt{3}}\right)$

$DF = \sqrt{4x_1^2 + 2x_1(k\sqrt{3}-1) + k^2+1}$

~~Аналогично с точкой~~ E: $tg(120^\circ+\alpha) = -tg(60^\circ-\alpha) =$

$= \frac{\sqrt{3}-k}{1+k\sqrt{3}};\quad y = \frac{\sqrt{3}-k}{1-k\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{k\sqrt{3}-1} - FN;$

$E(x_2; y_2);\ \sqrt{3}x_2 = \frac{\sqrt{3}-k}{1-k\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{k\sqrt{3}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{2k};\ y_2 = \frac{3(k^2+1)}{2k};$

$$\cancel{EF = \sqrt{4x_2^2 - 2x_2(\sqrt{3}k+1) + k^2+1}};$$

$$\cancel{ED = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}};$$

$$\cancel{ED = \frac{\sqrt{3}}{k(2+k\sqrt{3})} \cdot \sqrt{3k^6 + 3\sqrt{3}k^5 + k^4 + 8k^3(\sqrt{3}+1) + 13k^2 + 6\sqrt{3}k + 3}}$$

$$\cancel{EF =}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k^2+1}{\sqrt{3}-k}\right) \\ y_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{k^2+1}{k-\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow D(x_1; y_1);$$

Аналогично с точкой E:

$$tg(120^\circ \pm \alpha) = -tg(60^\circ + \alpha) = -\frac{\sqrt{3}-k}{1+k\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}-k}{1+k\sqrt{3}}x + \cancel{\left(\frac{k^2\sqrt{3}+2k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}}\right)}\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{1+k\sqrt{3}};$$

$$\sqrt{3}k = -\frac{\sqrt{3}-k}{1+k\sqrt{3}}x + \cancel{\left(\frac{k^2\sqrt{3}+2k-\sqrt{3}}{1+k\sqrt{3}}\right)}\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{1+k\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k^2+1}{k+\sqrt{3}}\right) \\ y_2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k^2+1}{k+\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow E(x_2; y_2)$$

$$DF = \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{3}-k} \cdot \sqrt{k^2+2\sqrt{3}k+3}$$

$$ED = \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3-k^2} \cdot \sqrt{k^2+9}$$

$$EF = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{k^2-2\sqrt{3}k+3}$$

$$2p_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{k^2+1}}{3-k^2}\Big((\sqrt{3}+k)\sqrt{k^2+2\sqrt{3}k+3} + \sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{k^2+9} + (\sqrt{3}-k)\sqrt{k^2-2\sqrt{3}k+3}\Big)$$

~~(поне)~~ при $k = 0$: $2p_1 = p$

при $\frac{1}{\sqrt{3}} > k > 0$: $2p_1$ – возраста-ющая функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p_1 \geq p$ – ч.т.д.

Комментарий: понятно, что эта функция растёт можно по тому, что при $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ~~[illegible]~~ всё ещё выполняется $2p_1 \geq p$, а между этими двумя значениями (0 и $\frac{1}{\sqrt{3}}$) числитель возрастал быстрее знаменателя.

([illegible])

№9. Допустим в среднем в каждом десятке
?? встречается 4 простых, то сумма всех
простых до 10^{2018} всех простых меньше, чем

$4 \cdot 10 \cdot \frac{(1+2018)2018}{2} = 40 \cdot 1009 \cdot 2019 \; 40^{2018}$

значит если взять n ~~простое~~ первое простое после 10^{2018}, то
сумма всех простых будет меньше
чем n, но n не делится на
никакие числа $< n$ $\Rightarrow$ n взаимнопросто
с суммой простых. — ч.т.д.

−