Губернаторская профильная смена «Мы – будущее региона»
Материалы математической образовательной программы
16-30 июля 2019 года.

Тюмень
2019.

И.А. Бронников, Е.Н. Горечин, К.С. Кусакин, А.А. Сорокина, И.Д. Чхайло «Материалы математической образовательной программы», методические рекомендации и задачи для самостоятельного решения разработаны для учащихся общеобразовательных учреждений юга Тюменской области, принимавших участие в математической образовательной программе 16-30 июля 2019 года.

В настоящих материалах использован опыт и материалы заочной Учебно-научной школы и Школы одаренных Тюменского государственного университета, физико-математической школы Тюменской области, а также МЦНМО, Малого мехмата МГУ и образовательного центра «Сириус», г. Сочи.

Оглавление

Группа 1.

Преподаватель: ***Чхайло Иван Дмитриевич*** *– студент 4 курса Института математики и компьютерных наук по специальности «Компьютерная безопасность», Тюменского государственного университета.*

17.07.19.

Занятие 1. Разнобой.

Задача 1. Винни-Пух и Тигра лезут на две одинаковые елки. Вверх Винни-Пух лезет в два раза медленнее, чем Тигра, а вниз Винни-Пух лезет в три раза быстрее, чем Тигра. Начали и закончили Винни-Пух и Тигра одновременно. Во сколько раз быстрее Тигра лезет вверх, чем вниз?

Задача 2. Какое наименьшее значение может принимать сумма цифр числа, кратного 14?

Задача 3. Найдутся ли такие три прямоугольника, что никакими двумя из них нельзя полностью покрыть третий?

Задача 4. а) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить числа так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех чисел таблицы – положительной?

б) Решите ту же задачу для таблицы 5×5.

Задача 5. В прямоугольнике 6×7 закрашены какие-то 25 клеток. Докажите, что можно найти квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трех клеток.

Задача 6. Даны натуральные числа A и B. Известно, что среди четырех утверждений «A+1 делится на B», «A=2B+5», «A+B делится на 3», «A+7B — простое число» имеются три верных и одно неверное. Найти все возможные пары чисел A и B.

Задача 7. Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых – точный квадрат.

Задача 8. По кругу на одинаковом расстоянии расположены 2018 ячеек. Играют двое, ходят по очереди, первый ставит крестики, а второй — нолики. Первый выигрывает, если после окончания игры есть три или более подряд идущих одинаковых значка, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре и как ему действовать?

Задача 9. 50 фишек расставлены в клетках доски 8×8. Если в каком-то квадрате 2×2 есть только одна фишка, Миша может ее убрать. Докажите, что ни при какой расстановке фишек, Миша не сможет убрать все фишки с доски

Задача 10. Двое играют в игру. В коробке лежит 3000 камней. За один ход можно достать из коробки любое число камней, не меньше одного камня, но не больше половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 11. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоят пешки: вверху – черные, внизу белые. За ход можно передвинуть одну из пешек на соседнюю по стороне клетку. За какое наименьшее число ходов можно добиться, чтобы черные пешки стояли внизу, а белые вверху?

б) То же вопрос для доски 7×7.

Задача 12. Сумма трёх целых положительных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

Задача 13. На сторонах и диагоналях семнадцатиугольника расставлены числа +1 и -1. Докажите, что найдется такая вершина, что произведение чисел, находящихся на двух сторонах и четырнадцати диагоналях, выходящих из этой вершины, равно 1.

Задача 14. Можно ли целые числа от 1 до 2018 расставить в некотором порядке так, чтобы сумма любых десяти подряд стоящих чисел делилась на 10?

Задача 15. Найдите все натуральные $n>1$, для которых верно следующее утверждение: если сумма цифр числа A делится на n, то и число A делится на n.

Задача 16. Сколько существует различных способов разбить 2018 в сумму приблизительно равных натуральных слагаемых? Слагаемые считаются приблизительно равными, если они отличаются не более, чем на 1.

18.07.2019

Занятие 2. Уравнения в целых числах

Часть 1.

Задача 1.1. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 1980? А 1990? 2000?

Задача 1.2. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причем самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

Задача 1.3. Решите в натуральных числах

а) $x^2 - y^2 = 31$ б) $y^2 - x = 303$

Задача 1.4. Найти все целочисленные решения уравнения $2nm-16=3n-2m$

Задача 1.5. Решить в целых числах уравнение

$$3m^6 + 2n^4 - 6m^2 + 8n^2 - 10 = 0$$

Задача 1.6. Решить в целых числах уравнение $2^n + 1 = m^2$.

Задача 1.7. Докажите, что уравнение $amn + bn + cm = d$ имеет конечное число целочисленных решений (m, n), где $a \neq 0, b, c, d$ –целые числа, $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0, ad + bc \neq 0$.

Задача 1.8. Незнайка утверждает, что сможет найти пару целых чисел (b, c), где c - простое число, для которого уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет ровно два простых корня. Прав ли Незнайка?

Часть 2.

Задача 2.1. Найдите целые решения уравнения $3x+12y=7$.

Задача 2.2. Найти четыре последовательных числа, произведение которых равно 1680

Задача 2.3. Решить в целых числах уравнение $(2x+y)(5x+3y)=7$

Задача 2.4. Решить в целых числах уравнение $xy+3x-5y=-3$

Задача 2.5. Найти все натуральные n, m, для которых выполнено:

$$m! + 12 = n^2$$

Задача 2.6. Решить в целых числах уравнение $2^n + 7 = x^2$.

19.07.19

Занятие 3. Комбинаторика 1.

Часть 1.

Задача 1. Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г - четыре дороги, из Б в В - три дороги, из Г в В - пять дорог, между Б и Г дорог нет. Сколько различных дорог ведет из А в В через Б? Сколько вообще различных дорог из А в В?

Задача 2. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две так, чтобы их можно было приложить друг к другу

Задача 3. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее количество зубов равно 32).

Задача 4. В стране 10 городов, каждые два из которых соединены авиалиниями. Сколько авиалиний в этой стране

Задача 5. а) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата - белый и черный?

б) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата - белый и черный, не лежащие на одной и той же горизонтали, и вертикали.

Задача 6. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть в белый и часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались)

Задача 7. Сколько имеется 4-значных натуральных чисел, которые не делятся на 5?

Задача 8. Пусть $p_1, p_2, \dots p_n$ - различные простые числа. Сколько делителей (включая 1 и q) имеет число $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ - некоторые натуральные числа.

Часть 2.

Задача 1. Сколькими способами 3 девушки и 5 юношей могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Задача 3. На каждой стороне четырехугольника отмечено по четыре различных точки, не совпадающих с вершинами четырехугольника. Найти, сколько всего можно указать треугольников, выбирая их вершины из отмеченных точек

Задача 4. а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол три юноши и три девушки так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

б) А если они садятся не за стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

Задача 5. Найти количество шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых не более двух нечетных цифр.

Задача 6. Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера?

Задача 7. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечетная цифра?

Задача 8. Сколькими способами можно переставить буквы слова “девушка” так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

23.07.19.

Занятие 4. Комбинаторика 2.

Задача 1. У Кролика Роджера есть 6 друзей.

a) Сколькими способами он может позвать каких-то 2-их на свой день рождения? А 4-ых?

b) А если количество не важно (можно даже не звать никого, или позвать вообще всех). А если друзей у него 100?

Задача 2. Дана полоска 1×10, поворачивать её нельзя.

а) Сколькими способами клетки полоски можно покрасить в белый и жёлтый цвета так, чтобы оба цвета были использованы?

б) Сколькими способами можно клетки полоски покрасить в красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы все три цвета были использованы?

Задача 3. Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

Задача 4. Кузнечик прыгает по прямой. Он умеет прыгать на метр вперед или на метр назад. Оказалось, что после 10 прыжков он вернулся в исходную точку. Сколько различных маршрутов может существовать?

Задача 5. Имеется доска 9×9, в нижнем левом углу стоит хромая ладья, которая ходит только вверх или вправо на одну клетку.

а) Сколькими способами она может добраться до верхнего-правого угла?

b) А если ей необходимо побывать в центральной клетке?

c) И наконец побывать в центральном квадрате 3×3?

Задача 6. Рассматривается доска 88, клетки которой пока не окрашены. Сколькими способами можно раскрасить доску в черный и белый цвета так, чтобы черных клеток было 31 и никакие две черные клетки не имели общей стороны?

Задача 7. Сколько существует семизначных чисел, кратных 3, состоящих только из цифр 1, 2 и 3.

Задача 8. Роджер хочет, чтобы его гости могли поиграть в интересную игру, поэтому их должно быть четное количество. Сколькими способами он может позвать гостей (будем считать, что их все же 100).

24.07.19.

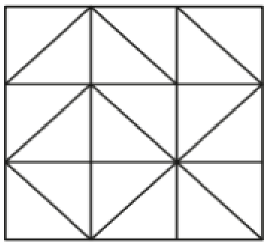
Занятие 5. Комбинаторика 3.

Задача 1. На плоскости дано n точек, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько имеется

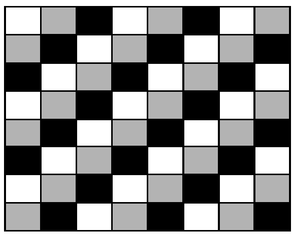
а) отрезков

б) треугольников с концами в этих точках?

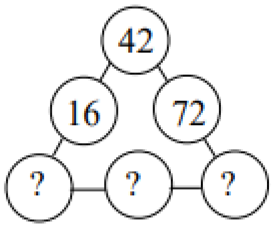
Задача 2. Квадрат разбит на треугольники. Сколько существует способов закрасить ровно треть квадрата? Маленькие треугольники нельзя красить частично.



Задача 3. Доску 88 раскрасили в три цвета так, как показано на рисунке. Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 ладей так, чтобы они не били друг друга, и все ладьи стояли на клетках одного цвета?



Задача 4. Сколькими способами можно заполнить кружочки на рисунке натуральными числами так, чтобы произведения троек чисел по сторонам треугольника были равны?



Задача 5. Леонид очень любит животных, у паучка Леонида 8 одинаковых носков и 8 одинаковых ботинок. Паук каждую секунду либо надевает на одну

из своих ног носок, либо натягивает ботинок на какую-нибудь из ног, на которую носок уже надет (у паука 8 ног, на каждую ногу он надевает один носок и один ботинок). Два способа обувания паука считаются различными, если паук хотя бы в одну из 16 секунд делает различные действия. Сколькими различными способами паук может обуться?

25.07.19

Занятие 6. Инвариант 1.

Инвариант — это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях. Например, четность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

Задача 1. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число

а) $a + b$;

б) ab;

в) $a + b - 2$.

Какое число получится после 20 таких действий?

Задача 2. На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?

Задача 3. На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

Задача 4. На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.

Задача 5. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Задача 6. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?

Задача 7. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

Задача 8. Имеется набор чисел *а, в, с*. Данный набор чисел меняется на тройку чисел: $а + в – с$, $в + с – а$, $а + с – в$. Дан набор чисел 2018, 2020, 2021. Можно ли из него получить набор из чисел 2001, 2002, 2003?

Задача 9. Из цифр 2, 3, 4, …, 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

Задача 10. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2018. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность. В результате многократного выполнения таких действий на доске окажется записанным одно число. Может ли оно быть нулем?

Задача 11. На столе лежит куча из 637 ракушек. Из нее убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех ракушек?

Задача 12. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2019-го дня.

26.07.19.

Занятие 7. Индукция.

Задача 1. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16*16 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трех клеток

Задача 2. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседних области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы).

Задача 3. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

Задача 4. (“Ханойская башня”). У Пети есть детская пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что:

а) Петя сможет переложить все кольца на один из пустых стержней

б) Он это сможет сделать за $2^n - 1$перекладываний.

в) Меньшим числом перекладываний ему обойтись не удастся.

Задача 5. Докажите, что число 11...1 (243 единицы) делится на 243

Задача 6. Верно ли, что число $n^2 + n + 41$- простое при любом натуральном n?

Задача 7. Докажите, что любое натуральное число можно представить, как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Задача 8. Известно, что $x + \frac{1}{x}$- целое число. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ - тоже целое.

Задача 9. Последовательность Фибоначчи определяется следующими условиями: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Докажите, что имеют место следующие соотношения:

а) $a_{n+2} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1}$

б) $a_n a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

Задача 10. Доказать равенства:

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

в) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \ldots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

г) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Задача 11. При каких n верны неравенства?

а) $2^n > n$

б) $3^n > 2^n + 7n$

Задача 12. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, n \geq 2$

б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$

в) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geq 2$

г) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

д) $2^{m+n-2} \geq m \cdot n$ при любых натуральных m и n.

29.07.19.

Занятие 8. Параллельность и сумма углов треугольника.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) на стороне AB отмечена точка E такая, что перпендикуляр ED, опущенный на сторону BC, равен отрезку EA. Вычислите угол DAC.

Задача 2. На сторонах AB и CD квадрата ABCD выбраны точки E и F соответственно. Отрезки EF и AC пересекаются в точке O. Найдите величину угла COF, если известно, что $\angle BEF=73^\circ$.

Задача 3. Два угла треугольника равны 10 и 70 градусов соответственно. Найдите величину угла между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника.

Задача 4. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке H, причём $\angle AHB=120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C — в точке K, причём $\angle BKC=130^\circ$. Найдите величину угла ABC.

Задача 5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X, а на боковой стороне BC — точка Y так, что BX=BY, $\angle ABX=46^\circ$. Найдите величину угла YXC.

Задача 6. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC (AB=AC) нашлись такие точки D и E (точка D лежит между точками A и E), а на стороне AC — такая точка F, что BC=CE=EF=FD=DA. Найдите величину угла ABC.

Дополнительные построения.

Задача 1. В треугольнике ABC медиана BM является биссектрисой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Задача 2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите неравенство $BM\leqslant(BA+BC)/2$.

Задача 3. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный; и наоборот, если треугольник прямоугольный, то медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Задача 4. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C, равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

Задача 5. В четырехугольнике ABCD стороны AD и BC равны и параллельны. Точка M — середина стороны CD, точка N на стороне BC такова, что ∠AMN=90∘. Известно, что BN=7, NC=3. Чему равна длина отрезка AN?

Задача 6. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол в 40°. Найдите ∠ABC.

Задача 7. На сторонах AB и BC во вне построили квадраты ABKL и CBNT. Доказать, что отрезок KN в два раза больше медианы BM треугольника ABC.

Задача 8. В четырехугольнике ABCD известно, что AD‖BC, AD=24, BC=9. Биссектриса угла CAD пересекает диагональ BD в её середине. Найдите длину другой диагонали AC.

Задача 9. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A к стороне BC, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол 60∘. Найдите угол BAC.

Задача 10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Оказалось, что ∠BAC : ∠ADC : ∠ACB=3:2:1. Найдите длину отрезка AD, если AB=11, BC=1.

30.07.19.

Занятие 9. Инвариант 2.

Задача 1. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли, проделав это несколько раз, сделать эти числа равными?

Задача 2. На доске в некотором порядке написаны 2018 плюса и 2019 минусов. Каждую секунду какие-то два знака заменяются на один, причем вместо двух одинаковых появляется плюс, а вместо разных - минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

Задача 3. Круг разделен на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа 1, 0, 1, 0, 0, 0. Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

Задача 4. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

Задача 5. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Задача 6. В пробирке находятся амебы трех типов: А, В и С. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа А было 20 штук, типа В - 21 штука и типа С - 22 штуки?

Задача 7. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один – по часовой стрелке, второй – против). Доказать, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

Задача 8. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

Задача 9. Во всех клетках доски 100×100 стоят плюсы, а в одной, не являющейся угловой, стоит минус. За ход можно инвертировать знаки в произвольной горизонтали, вертикали или диагонали. Можно ли за какое-то число ходов добиться того, чтобы все знаки были плюсами?

Группа 2.

Преподаватель – ***Кусакин Кирилл Сергеевич****, студент 4 курса направления «Педагогическое образование с двумя профилями подготовки: математика и информатика» Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, преподаватель математики Школы одаренных ТюмГУ.*

17.07.19.

Занятие 1. Разнобой.

Задача 1. Пешеход шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за всё время равна 5 км/час?

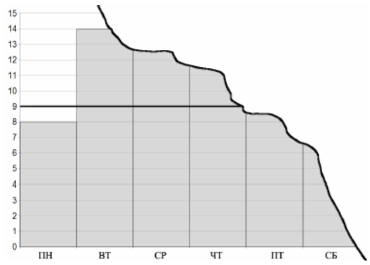
Задача 2. Имеется набор натуральных чисел (известно, что чисел не меньше семи), причём сумма каждых семи из них меньше 15, а сумма всех чисел
из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

Задача 3. В Исландии 24 города. Сколько в ней дорог, если

а) из каждого города выходит 5 дорог;

б) каждый город связан дорогой с каждым?

Задача 4. На Кубе из каждого города выходит по 5 дорог и всего дорог 140. Сколько на Кубе городов?



Задача 5. Мальвина всю неделю учила Буратино писать. Она изобразила на диаграмме (справа), сколько букв написал Буратино за каждый из семи дней. Черта на диаграмме показывает среднее число букв (оно равно 9). Буратино оторвал кусок диаграммы, как показано на рисунке. Сколько букв он написал в воскресенье?

Задача 6. Экологи запротестовали против большого объема лесозаготовки. Председатель леспромхоза успокоил их следующим образом: "В лесу 99% сосен. Будут вырубаться только сосны, и после вырубок процент сосен останется почти неизменным – сосен будет 98%". Какая часть леса отведена под вырубки?

Задача 7. Для сборки автомобиля Лёше потребовалось купить несколько винтиков и шпунтиков. Когда он подошёл к кассе, выяснилось, что в этот день магазин проводит рекламную акцию, предлагая покупателям или 15-процентную скидку на всю покупку или 50-процентную скидку на шпунтики. Оказалось, что стоимость покупки со скидкой не зависит от выбранного варианта скидки. Сколько денег Лёша первоначально собирался потратить на покупку шпунтиков, если на покупку винтиков он собирался потратить 7 рублей?

Задача 8. Известно, что

$$35! = 10333147966386144929*66651337523200000000.$$

Найдите цифру, заменённую звездочкой.

Задача 9. Делится ли на 1999 сумма чисел 1+2+3+...+1999?

Задача 10. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на поле 8×8 так, чтобы у каждой отмеченной клетки была ровно одна отмеченная соседняя (по стороне) клетка? Приведите ответ и пример.

Задача 11. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный

Задача 12. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M, причём AK = AC и BM = BC. Найдите угол MCK

Задача 13. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, в котором BC=3AC, взята точки D такая, что $AI=DI$, где I - центр вписанной окружности треугольника ABC. Найдите отношение $BD: AC$.

Задача 14. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, разность которых равна одному из катетов треугольника. Найти углы треугольника.

Задача 15. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стёрта последней?

Задача 16. Докажите тождество: $1 + 3 + 5 +...+ (2n – 1) = n^2$

Задача 17. На каждой из клеток доски размером 9×9 находится фишка. Петя хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по стороне клетку так, чтобы снова в каждой из клеток оказалось по одной фишке. Сможет ли Петя это сделать?

18.07.19.

Занятие 2. Формулы сокращённого умножения

Задача 1. Вычислите:

(37,39+56,93/37,39−56,93−37,39−56,93/37,39+56,93)·(37,792−56,932/37,79·56,93).

Задача 2. Найдите значение произведения

$$(1 - 1/4) \cdot (1 - 1/9) \cdot (1 - 1/16) \cdot \ldots \cdot (1 - 1/400)$$

Задача 3. Известно, что $a+b=7$, $a\cdot b=2$. Найдите

а) ab^2+a^2b;

б) a^2+b^2;

в) $(a-b)^2$;

г) a^3+b^3;

д) $a^3b^6+a^6b^3$;

Задача 4. Про действительное число a известно, что $a - 1/a = 2/3$. Найдите

а) a^2+1/a^2;

б) $a^4+1/2a^2$;

в) a^3+1/a^3;

г) $a^{12}+1/a^6$;

Задача 5. а) Решите уравнение $x^2 = 20152014 \cdot 20152016 + 1$.

б) Два различных числа x и y (не обязательно целых) удовлетворяют равенству $x^2 - 2015x = y^2 - 2015y$. Найдите сумму чисел x и y.

в) Про различные числа a и b известно, что $a/b+a=b/a+b$. Найдите $1/a+1/b$.

Задача 6. Докажите, что если $b=a-1$, то

$$(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4) \cdot \ldots \cdot (a^{32}+b^{32})=a^{64} - b^{64}.$$

Задача 7. Найдите значение выражения $(a^3+b^3-3b^2+3b-1)/(a^2-ab+a+(b-1)^2)$ при $a=-3-5\sqrt{3}$, $b=11+5\sqrt{3}$.

Задача 8. Найдите все пары натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению:

а) $x^2-y^2=19$;

б) $x^2-y^2=111$.

в) Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых также является простым числом.

Задача 9. а) Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел:

$$(a+b+c)^2 = ?$$

б) Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac = 5$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$?

в) Известно, что $x+y+z=0$. Докажите, что $xy+yz+zx \leq 0$.

Задача 10. Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, является квадратом натурального числа.

19.07.19.

Занятие 3. Десятичная запись натурального числа. Признаки делимости.

Задача 1. Докажите, что число делится на 4, тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4.

Задача 2. Сформулируйте признак делимости на 2^n и на 5^n.

Задача 3. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

Задача 5. Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится
в 3 раза, если само число увеличить на 3.

Задача 6. Докажите, что если записать в обратном порядке любое натуральное число, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Задача 7. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Задача 8. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них - 97?

Задача 9. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого используются все 10 цифр.

Задача 10. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

Задача 11. Между цифрами двузначного числа, кратного трем, вставили нуль, и к полученному трехзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз больше первоначального. Найдите исходное число.

Задача 15. К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

Задача 16. Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

Задача 17. Когда число ПОТОП умножили на 99 999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

Задача 18. Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

Задача 19. Все цифры шестизначного числа A — различны и расположены в порядке возрастания. Чему может равняться сумма цифр числа 9A?

Задача 20. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что предпоследняя цифра данного числа нечетна.

23.07.19.

Занятие 4. Угадай, что я задумал!

Если не оговаривается противное, то во всех последующих задачах этого занятия загадывающий даёт на вопросы ответы «да» либо «нет».

Задача 1. Петя загадал натуральное число от 1 до 8. Витя хочет отгадать его, задавая Пете вопросы, на которые тот отвечает «да» либо «нет». Как должен действовать Витя, чтобы отгадать загаданное число за 3 вопроса?

Задача 2. Сколько вопросов понадобится Вите, если Петя может загадать число
от 1 до 32?

Задача 3. а) Петя загадал одну из сторон правильного восьмиугольника. Витя может провести любую диагональ в этом восьмиугольнике и спросить Петю, в какой из двух получившихся частей лежит загаданная сторона. Как Вите отгадать сторону за 3 вопроса? б) То же для семиугольника.

Задача 4. Петя загадывает число от 1 до 10. Докажите, что Вите не хватит трёх вопросов, чтобы угадать это число.

Задача 5. В орфографическом словарике 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача 6. В англо-русском словарике 80 страниц, на каждой из них по 50 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача 7. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 60. Помогите Вите угадать эти числа за три вопроса. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Задача 8. Петя загадывает два натуральных числа от 1 до 10—одно чётное и одно нечётное. Помогите Вите угадать эти числа за 5 вопросов.

Задача 9. а) Петя загадывает клетку шахматной доски 8×8. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Пети, попала ли в него загаданная клетка. Как должен действовать Витя, чтобы угадать Петину клетку за 6 ходов? б) Решите ту же задачу для доски 5×5 и пяти ходов.

Задача 10. Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X, и Петя отвечает, верно ли, что X делится на A. Может ли Витя угадать A после трёх таких вопросов?

Задача 11. Да/нет/не знаю. В этой задаче Петя может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал число 1, 2 или 3. Придумайте вопрос, ответ на который позволит Вите угадать это число.

Задачи для самостоятельного решения

Задача Д.1. Петя загадал пятизначное число, все цифры которого различны. Сможет ли Витя заведомо угадать его за 15 вопросов, на которые нужно дать ответ «да» или «нет»?

Задача Д.2. Петя задумал тройку натуральных чисел от 1 до 10 (возможно, некоторые из этих чисел одинаковы). Сумеет ли Витя угадать эту тройку за 8 вопросов, на которые нужно дать ответ «да» или «нет»? Порядок чисел в тройке значения не имеет.

Задача Д.3. На плоскости расположен квадрат и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?

24.07.19.

Занятие 5. Дискретная непрерывность.

Разберём несколько задач, выявив общие идеи их решения.

Пример 1.1. В ряд выписаны целые числа, причём каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно -10, а самое правое равно 10. Докажите, что в этом ряду есть число 0.

Пример 1.2. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0 : 1, а матч — со счётом 4 : 3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

Задача 1. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

Задача 2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

Задача 3. Матч «Бавария» – «Спартак» закончился со счётом 5:8. Муж (болеющий за «Бавария») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребёнком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

Задача 4. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Налево!» некоторые из них повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

Задача 5. В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

Задача 6. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

Дополнительные задачи

Задача Д1. К автомату с газированной водой стояла очередь из ста гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом — за 3 копейки — и без сиропа — за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом, а второй — без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

Задача Д2. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

Задача Д3. Петя записал в ряд несколько чисел так, что любые два соседних отличаются не больше чем на 1. Самое маленькое из этих чисел равно −5, а самое большое — это 100,25. Докажите, что хотя бы одно из записанных чисел отличается от нуля не больше чем на 0,5.

Задача Д4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

Задача Д5. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже чем на двадцать пятый день?

Задача Д6. Школьники играли в настольный теннис «на победителя». Они установили очередь и правила: вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова сыграли по тем же правилам, но очередь шла в обратном порядке (вчерашний последний стал первым, предпоследний — вторым, и так далее). Известно, что каждый сыграл хотя бы раз и в первый день, и во второй. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.

25.07.19.

Занятие 6. Параллельность и сумма углов треугольника.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) на стороне AB отмечена точка E такая, что перпендикуляр ED, опущенный на сторону BC, равен отрезку EA. Вычислите угол DAC.

Задача 2. На сторонах AB и CD квадрата ABCD выбраны точки E и F соответственно. Отрезки EF и AC пересекаются в точке O. Найдите величину угла COF, если известно, что $\angle BEF=73^\circ$.

Задача 3. Два угла треугольника равны 10 и 70 градусов соответственно. Найдите величину угла между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.

Задача 4. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведённые из вершин A и B, пересекаются в точке H, причём $\angle AHB=120^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C — в точке K, причём $\angle BKC=130^\circ$. Найдите величину угла ABC.

Задача 5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X, а на боковой стороне BC — точка Y так, что BX=BY, $\angle ABX=46^\circ$. Найдите величину угла YXC.

Задача 6. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC (AB=AC) нашлись такие точки D и E (точка D лежит между точками A и E), а на стороне AC — такая точка F, что BC=CE=EF=FD=DA. Найдите величину угла ABC.

Задачи повышенной трудности.

Задача 1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок AD=AB, а за точку C — отрезок CE=CB. Найдите углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC.

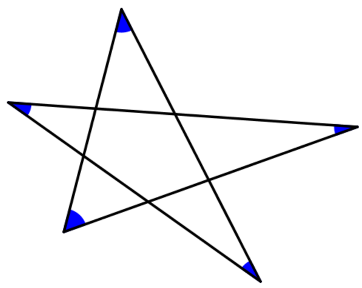
Задача 2. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC, причём $\angle ABM=\angle C$ и $\angle CBN=\angle A$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

Задача 3. Выразите угол между биссектрисой угла A и биссектрисой внешнего угла B через величину угла C.

Задача 4. В четырёхугольнике ABCD биссектрисы углов A и C параллельны. Докажите, что углы B и D четырёхугольника равны.

Задача 5. Дан квадрат ABCD. На стороне AD внутрь квадрата построен равносторонний треугольник ADE. Диагональ AC пересекает сторону ED этого треугольника в точке F. Докажите, что CE=CF.

Задача 6. Найдите сумму острых углов пятиугольной звезды (отмеченных на рисунке синим).



26.07.19.

Занятие 7. Прямоугольный треугольник.

Задача 0. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CHCH. На катете BC отмечена точка D такая, что ∠CAD=∠ABC. Докажите, что CH делит отрезок AD пополам.

Задача 00. Дан параллелограмм ABCD, точка M — середина стороны CD. Из точки B на отрезок AM опущен перпендикуляр BK. Докажите, что CK=CB.

Задачи для самостоятельного выполнения.

Задача 1. Про четырёхугольник ABCD известно, что AD∥BC, ∠A+∠D=90∘. Чему равна длина отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC, если AD=11, BC=7?

Задача 2. Про четырёхугольник ABCD известно, что AD∥BC, AC⊥BD. Чему равна длина отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC, если AD=11, BC=7?

Задача 3. Дан четырёхугольник ABCD, в котором ∠A=90∘, ∠B=120∘, ∠D=30∘. Пусть AB=7, BC=5. Чему равно CD?

Задача 4. Точки E и K —середины сторон AD и DC параллелограмма ABCD соответственно. Из его вершины B на отрезок EK опустили перпендикуляр BH.
На стороне BC выбрана точка F такая, что углы FHK и KED равны. Найдите отношение BF:FC.

Задача 5. Медиана, проведённая из вершины A треугольника ABC, образует со сторонами AB и AC углы 30∘ и 90∘ соответственно. Чему равно отношение AB:AC?

Задача 6. Угол C треугольника ABC равен 150^0. Из середины стороны AB на сторону BC опустили перпендикуляр. Найдите длину этого перпендикуляра, если AC=1.

Задачи повышенной сложности.

Задача 1. Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, вдвое длиннее, чем высота, проведённая из той же вершины.

Задача 2. В треугольнике ABC длины высоты BH и медианы CM равны. Найдите $\angle MCA$.

Задача 3. Прямоугольный лист бумаги ABCDABCD согнули так, как показано на рисунке. Найдите отношение DK:AB, если C1 — середина AD.

Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AA1 и CC1 — его высоты, а M — середина стороны AC. Докажите, что треугольник A1MC1 — равносторонний.

Задача 5. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C равен 30°. Найдите угол между медианой AM и стороной BC.

Задача 6. В треугольнике ABC угол C равен 45°. Докажите, что CH=AB, где H — точка пересечения высот треугольника ABC.

Задача 7. Дан прямоугольный треугольник ABC с углом B больше 60°. На катете BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD, а на гипотенузе AB во внутреннюю сторону — равносторонний треугольник ABE. Прямые DE и BC пересекаются в точке M. Найдите CM, если BC=10.

Задача 8. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что BD=BC, а на катете BC — такая точка E, что DE=BE. Докажите, что AD+CE=DE.

Задача 9. В треугольнике ABC угол A равен 30°, а угол B равен 15°. Найдите угол между медианой CM и стороной AB.

29.07.19

Занятие 8. Математическая индукция.

Основная схема.

Метод индукции требует установления истинности двух фактов:

База. Первое утверждение верно. (мы можем толкнуть первую доминошку).

Переход. Если интересующее нас утверждение верно на каком-то шаге, то верно и следующее за ним утверждение. (толкнув одну, уроним и другую)

Часть 1. Индукция на пальцах

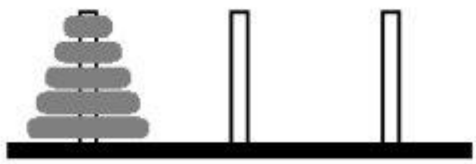
Задача 1. Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стрежня на другой, если в пирамидке:

a) 2 кольца;

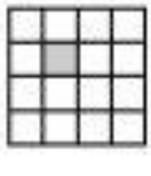
b) 3 кольца;

c) 5 колец;

d) n колец.



Задача 2. Рассмотрим уголок. Он получается вырезанием из квадрата 2*2 одной клетки.



Можно ли разрезать на такие уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)?

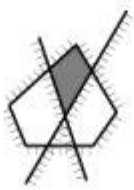
a) 4*4 c) 128*128

b) 8*8 d) 2^n*2^n

Задача 3. Плоскость разбита на области n прямыми. Докажите, что вне зависимости от расположения прямых, можно так раскрасить эти области в черный и белый цвета, что никакие две области одного цвета не будут иметь общего участка (отрезка) границы.

Часть 2. Абстракции.

Задача 4. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.



Задача 5. Докажите, что для любого натурального n справедливы неравенства

a) $2^n > n$

b)$1 + 2 + \ldots + n \leq n^2$

Задача 6. Докажите, что для произвольного натурального n верно равенство:

$$1+3+ \ldots +(2n - 1)=n^2$$

Задача 7. В пробирке живут амёбы. Каждую минуту происходит следующее: каждая амёба делится пополам, после чего в пробирку добавляют еще одну такую же амёбу. В начальный момент времени там была всего одна амёба. Докажите, что через n минут в пробирке будет $2^{n+1} - 1$ амёба.

Задача 8. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Доказать, что эту картинку можно обвести "одним росчерком", то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

Задача 9. Докажите, что сумма внутренних углов любого n-угольника равна $(n - 2)*180^{o}$

Задача 10. Ханойские башни. (Эвристическая задача) За какое минимальное число перекладываний можно переместить пирамидку с одного стержня на другой.

30.07.2019.

Занятие 9. Монета на весах

Сокращение «ФМ» означает «фальшивая монета». В задачах взвешивания производятся на чашечных (с двумя чашками) весах без делений.

Задача 1. Самая классическая головоломка. Одна из девяти монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 2 взвешивания?

Задача 2. а) Одна из 27 монет фальшивая, она весит легче настоящей. Как определить ФМ за 3 взвешивания? б) Решите ту же задачу для 26 монет. в)* Придумайте, как обобщить решение на любое число монет от 10 до 27.

Задача 3. а) Докажите, что за два взвешивания невозможно гарантированно определить одну лёгкую ФМ из более чем девяти монет.

б) Решая задачу 2.2(а), Петя положил в первом взвешивании на каждую чашу весов не по 9 монет. Докажите, что у него может не получиться определить ФМ за три взвешивания.

Задача 4. Из какого наибольшего числа монет удастся определить одну лёгкую ФМ за четыре взвешивания? Обоснуйте свой ответ.

Задача 5. Среди восьми монет, возможно, есть одна лёгкая ФМ (но её может и не быть). Как за два взвешивания найти ФМ, если она есть, или доказать, что её нет?

Задача 6. а) Пусть имеется 7 серебряных монет и 2 медные, причём медные отличаются по виду от серебряных. Известно, что одна из монет фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). Как найти ФМ за два взвешивания?

б) Решите ту же задачу для N 69 серебряных монет и 9 − N медных.

Задача 7. Есть одна золотая, 3 серебряные и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая (весит легче настоящей).

Настоящие медали из одного металла весят одинаково, а из различных— нет. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

Задача 8. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные—медные. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей медной). ФМ легче настоящей монеты из того же металла. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 9. Есть 5 серебряных и 4 золотые монеты. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Если ФМ серебряная, то она легче настоящих серебряных монет, а если золотая, то тяжелее настоящих золотых. Как найти ФМ за два взвешивания?

Задача 10. Есть 27 монет, часть из них серебряные, остальные—золотые. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Серебряная ФМ легче настоящей серебряной, а золотая ФМ тяжелее настоящей золотой. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 11. Пусть среди 24 монет ровно половина—золотые. Одна из этих монет фальшивая, причём серебряная ФМ легче настоящей серебряной монеты, а золотая—тяжелее настоящей золотой. Более четырёх золотых или более четырёх серебряных монет класть на одну чашку запрещено. Как найти ФМ за три взвешивания?

Задача 12. Имеется 9 гирек весом 100 г, 200 г, ..., 900 г. К сожалению, одна из гирек побывала в руках нечестных торговцев, и теперь она весит немного (не более чем на 10 г) легче, чем раньше. Как определить эту гирьку за два взвешивания?

Группа 3.

Преподаватели: ***Бронников Иван Александрович*** *– учитель математики физико-математической школы Тюменской программы, руководитель образовательной программы.*

Горечин Егор Николаевич *– руководитель заочной Учебно-научной школы ТюмГУ, преподаватель математики Школы одаренных Тюменского государственного университета, руководитель образовательной программы.*

Сорокина Алиса Александровна *– студент направления «Математика» Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, тьютор Школы одаренных Тюменского государственного университета.*

17.07.19.

Занятие 1. Алгебра: «Тождества, формулы сокращенного умножения».

Задачи для разбора.

Задача 1. Пусть $a+b=7$, $a{\cdot}b=2$. Найдите:

а) ab^2+a^2b; б) a^2+b^2; в) $a^2{\cdot}b^4+a^4{\cdot}b^2$; г) a^3+b^3; д) $a^3b^6+a^6b^3$; е) a^4+b^4.

Задача 2. Пусть $a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$. Найдите:

а) $a^2+\frac{1}{a^2}$; б) $a^3-\frac{1}{a^3}$; в) $\frac{a^{12}+1}{a^6}$.

Задача 3. Известно, что $a–b+c=8$ и $a^2+b^2+c^2=110$. Найдите $ac–ab–bc$.

Задача 4. Докажите, что из равенства $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ следует равенство $x=y=z$.

Задача 5. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

Задача 6. Одно из чисел a, b, c положительно, одно — отрицательно, одно — равно 0. Определите, какое из чисел положительно, какое — отрицательно, и какое равно 0, если известно, что $ab^2(a+c)(b+c) < 0$.

Задача 7. Числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ таковы, что $x+y=xy=17$. Найдите значение выражения $(x^2-17x)\left(y+\frac{17}{y}\right)$.

Задача 8. Докажите, что если b есть среднее арифметическое чисел a и c, то значение выражения $a^4+2a^3c-2ac^3-c^4-4a^2b^2+4b^2c^2$ равно нулю.

Задача 9. Известно, что $a+b+c=9$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{9}{10}$. Найдите значение данного выражения $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$.

Задача 10. Докажите, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то сумма каких-то двух из них равна нулю.

<u>Задачи для самостоятельного решения.</u>

Задача 1. Дано $x+\frac{1}{x}=a$. Вычислите $x^5+\left(\frac{1}{x}\right)^5$ в зависимости от a.

Задача 2. Известно, что x, y, z такие, что $x(x+1)=y(y+1)=z(z+1)$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0.$$

Задача 3. Различные действительные числа a, b, c таковы, что $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. Какие значения может принимать $a+b+c$?

Задача 4. Для двух различных положительных чисел a и b известно, что $a^2-2019a=b^2-2019b$. Какое наименьшее значение может принимать a^2+b^2+2ab?

Задача 5. Докажите, что если $x+y+z=0$, то $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

18.07.19.

Занятие 2. Геометрия – 1. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник.

Краткий конспект

Определение. Две геометрические фигуры называются *равными*, если одну фигуру можно совместить с другой наложением. На плоскости для такого совмещения можно использовать сдвиги, повороты и перевороты (симметрию).

Первый признак равенства треугольников. Два треугольника равны, если у них равны две стороны и угол между ними. Например, если у треугольников ABC и DEF равны стороны AB=DE и AC=DF и углы ∠BAC=∠EDF, то треугольники ABC и DEF равны.

Второй признак равенства треугольников. Два треугольника равны, если у них равны два угла и сторона между ними. Например, если у треугольников ABC и DEF равны стороны AC=DF и углы ∠BAC=∠EDF и ∠ACB=∠DFE, то треугольники ABC и DEF равны.

Третий признак равенства треугольников. Два треугольника равны, если у них попарно равны три стороны. Например, если у треугольников ABC и DEF равны стороны AB=DE, BC=EF и AC=DF, то треугольники ABC и DEF равны.

Определение. Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

Рассмотрим несколько свойств и признаков равнобедренного треугольника.

Свойство. Если треугольник равнобедренный, то его углы при основании равны.

Признак. Если в треугольнике равны два угла, то он равнобедренный.

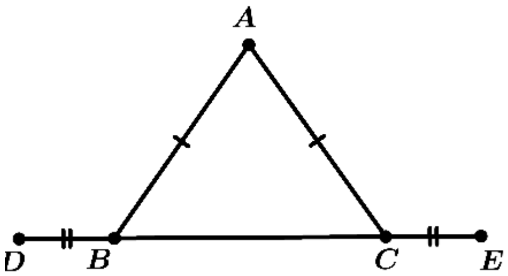
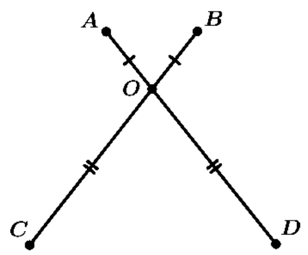
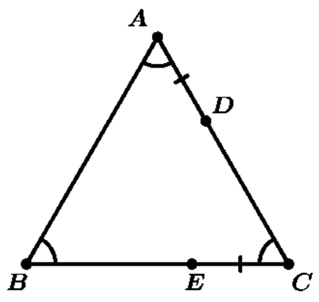
Свойство. В равнобедренном треугольнике совпадают медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию треугольника.

Признак. Если в треугольнике совпадают высота и медиана, проведённые из одной и той же вершины, то этот треугольник является равнобедренным.

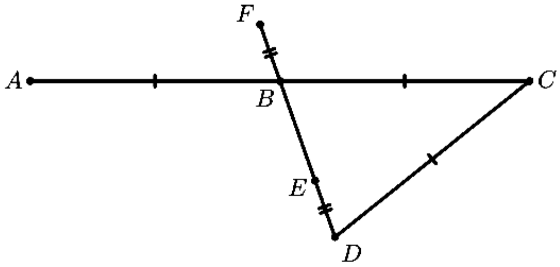
Признак. Если в треугольнике совпадают высота и биссектриса, проведённые из одной и той же вершины, то этот треугольник является равнобедренным.

Признак. Если в треугольнике совпадают медиана и биссектриса, проведённые из одной и той же вершины, то этот треугольник является равнобедренным.

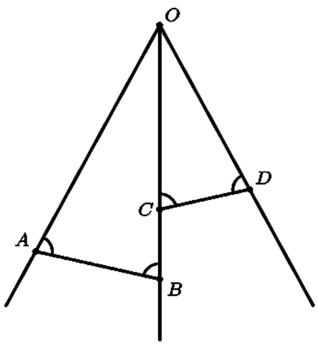
Задания для разбора.

№	**Задание.**	**Ответ.**
1.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных. 	A) △ABC B) △ABE C) △ACD D) △ACE
2.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных. 	A) △ACD B) △AOC C) △COD D) △ABD E) △BDC
3.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных. 	A) △ABE B) △ACE C) △BDE D) △BAD

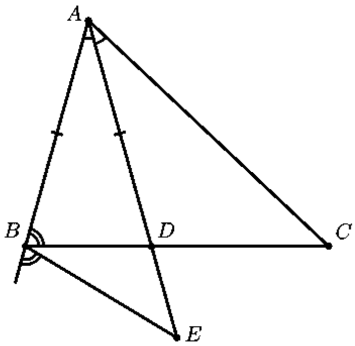
<table>
<tr>
<td>4.</td>
<td>Выберите пару равных треугольников, из предложенных.



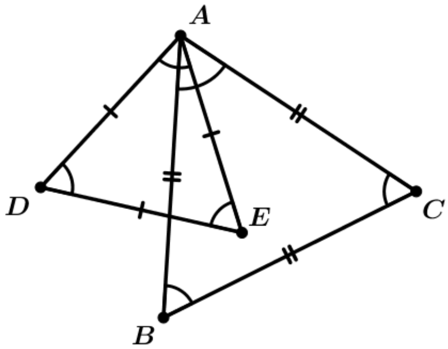
</td>
<td>A) △AFC
B) △AFB
C) △BCE
D) △BCD
E) △AFE
F) △CED</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Выберите пару равных треугольников, из предложенных.



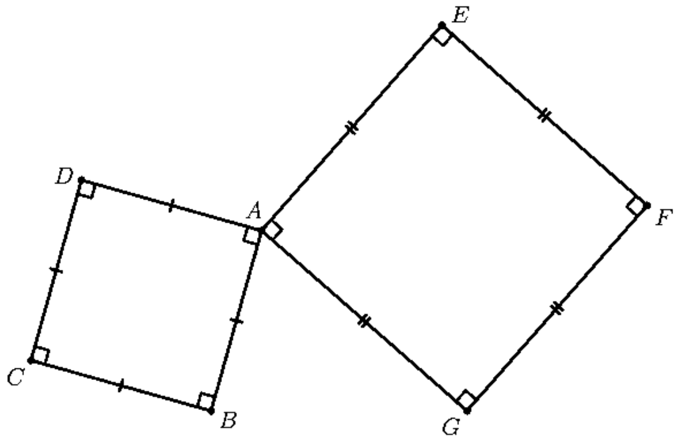
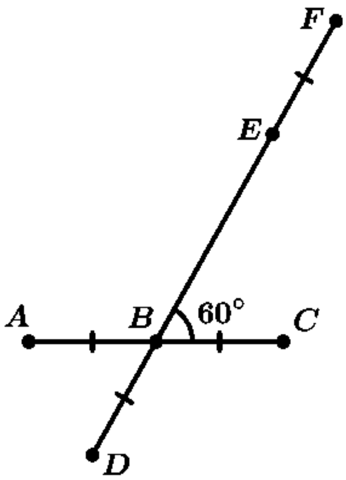
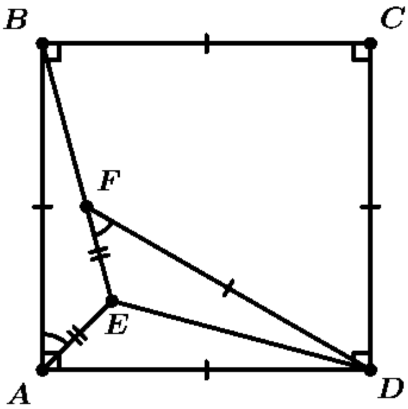
</td>
<td>A) △OAB
B) △OAC
C) △ACB
D) △OCD
E) △OBD
F) △BCD</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Выберите пару равных треугольников, из предложенных.



</td>
<td>A) △ABC
B) △ABD
C) △ADC
D) △ABE
E) △BDE
F) △DEC
G) △ACE</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Выберите пару равных треугольников, из предложенных.



</td>
<td>A) △ABD
B) △ACD
C) △ACE
D) △ABE
E) △BEC
F) △BED</td>
</tr>
</table>

8.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных.  	A) △DAG B) △CAG C) △BAG D) △CAF E) △BAE F) △EGB
9.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных.  	A) △ADE B) △DEC C) △CEF D) △EBA E) △CBF F) △ADF
10.	Выберите пару равных треугольников, из предложенных.  	A) △BCF B) △ABE C) △CDF D) △EFC E) △ADE F) △DFB

Задачи для индивидуальной работы.

Задача 1. На сторонах угла с вершиной O отметили точки A_1 и A_2 на одной стороне, B_1 и B_2 — на другой стороне. Оказалось, что $OA_1=OB_1$ и $OA_2=OB_2$. Докажите, что точка пересечения отрезков A_1B_2 и A_2B_1 лежит на биссектрисе угла.

Задача 2. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K соответственно, а на стороне AC – точки E и M, причём $DA+AE=KC+CM=AB$. Докажите, что $DM=KE$.

Задача 3. AF — медиана треугольника ABC, D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что $BD=BF=CF$. Докажите, что $AE=DE$.

Задача 4. Выберите все свойства равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB=AC$ (то есть выберите все утверждения, которые верны для любого равнобедренного треугольника ABC).

A) Равны углы B и C треугольника;

B) Равны высоты, проведённые из вершин B и C;

C) Равны медианы, проведённые из вершин B и C;

D) Равны биссектрисы, проведённые из вершин B и C;

E) Медиана и биссектриса, проведённые из вершины A, совпадают;

F) Медиана и высота, проведённые из вершины B, совпадают.

Задача 5. Выберите все признаки того, что треугольник ABC равнобедренный (то есть все утверждения, из которых следует, что треугольник ABC равнобедренный).

A) Равны углы B и C треугольника;

B) Равны высоты, проведённые из вершин B и C;

C) Медиана и биссектриса, проведённые из вершины A, совпадают;

D) Медиана и высота, проведенные из вершины A, совпадают;

E) Медиана и биссектриса, проведенные из вершины A, совпадают;

F) Равны медиана из вершины B и высота из вершины C;

G) Равны медианы, проведённые из вершин *B* и *C*;

H) Равны биссектрисы, проведённые из вершин *B* и *C*.

19.07.19.

Занятие 3. Подсчет сумм групировкой. Арифметическая прогрессия.

Определение. Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где разность между соседними членами $d = a_{i+1} - a_i$ постоянна. Тогда общий член последовательности можно задать формулой

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

Задача 1. На каком месте в ряду 1; 1,1; 1,2; 1,3; … стоит число 2019?

Задача 2. Найдите формулы для сумм

а) 2+4+…+2n;

б) 1+3+…+(2n-1);

Задача 3. Докажите, что

а) если a, b, c – три последовательных члена арифметической прогрессии, то

$$b = \frac{a+c}{2}$$

б) если в последовательности каждый член, кроме крайних, равен полусумме своих соседей, то это – арифметическая прогрессия.

Задача 4. Докажите формулы для суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Задача 5. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые оканчиваются на 3.

Задача 6. Найдите сумму $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \cdots 2017^2 - 2019^2$.

Задача 7. 7-й член арифметической прогрессии равен 77, 77-й равен 777, а всего в ней 100 членов. Чему равна сумма всех этих членов прогрессии?

Задача 8. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем 121.

Задача 9. При каком наименьшем n сумма 1+2+3+…+n заканчивается а) на два нуля; б) на три нуля?

Задача 10. Найдите все группы из двух или более последовательных натуральных чисел с суммой а) 100; б) 2019.

Задача 11. Разбейте натуральные числа от 1 до 20 включительно на две группы так, чтобы сумма в одной была равна произведению в другой.

Задача 12. Петя вычислил сумму $1+2+\ldots+N$ и зачеркнул в ней последние три цифры. У него опять получилось N. Найдите N.

23.07.19.

Занятие 4. Геометрия – 2. Дополнительные построения.

Задача 1. В треугольнике ABC медиана BM является биссектрисой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Задача 2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите неравенство BM⩽(BA+BC)/2.

Задача 3. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный; и наоборот, если треугольник прямоугольный, то медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Задача 4. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C, равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

Задача 5. В четырёхугольнике ABCD стороны AD и BC равны и параллельны. Точка M —середина стороны CD, точка N на стороне BC такова, что ∠AMN=90°. Известно, что BN=7, NC=3. Чему равна длина отрезка AN?

Задача 6. В треугольнике *ABC* медиана *BM* в два раза меньше стороны *AB* и образует с ней угол в 40°. Найдите *∠ABC*.

Задача 7. На сторонах AB и BC во вне построили квадраты ABKL и CBNT. Доказать, что отрезок KN в два раза больше медианы BM треугольника ABC.

Задача 8. В четырёхугольнике ABCD известно, что AD‖BC, AD=24, BC=9. Биссектриса угла CAD пересекает диагональ BD в её середине. Найдите длину другой диагонали AC.

Задача 9. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A к стороне BC, в четыре раза меньше стороны AB и образует с ней угол 60°. Найдите угол BAC.

Задача 10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Оказалось, что ∠BAC:∠ADC:∠ACB=3:2:1. Найдите длину отрезка AD, если AB=11, BC=19.

Задача 11. В треугольнике ABC биссектриса AE равна по длине отрезку CE. Также известно, что 2AB=AC. Найдите величину угла B.

Задача 12. На медиане *BM* треугольника *ABC* взяли точку *E* так, что угол *CEM* равен углу *ABM*. Докажите, что отрезок *EC* равен одной из сторон треугольника.

Задача 13. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

Задача 14. В треугольнике *ABC* точка *M* – середина стороны *AC*. На стороне *BC* взяли точку *K* так, что угол *BMK* – прямой. Оказалось, что *BK*=*AB*. Найдите $\angle BKM$, если $\angle A+\angle C=70°$.

Задача 15. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что BD = BF = CF. Докажите, что AE = DE.

24.07.19.

Занятие 5. Геометрия - 3. Средняя линия треугольника и немного около неё.

Определение. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема. *Средняя линия треугольника* параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Задача 1. Биссектриса внешнего угла A пересекает прямую, содержащую среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне AB, в точке X. Найдите величину угла XCA, если $\angle CAB=54^\circ$.

Теорема Фалеса. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Задача 2. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляр AX на биссектрису угла B и перпендикуляр AY на биссектрису внешнего угла C. Чему равна длина отрезка XY, если AB=5, AC=11, BC=12?

Теорема Вариньона. Середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Задача 3. Точки *M* и *T* – середины сторон *AD* и *BC* параллелограмма *ABCD*. Докажите, что прямые *AT* и *CM* делят диагональ BD на три равные части.

Задача 4. Середины сторон *AB* и *CD*, *BC* и *ED* выпуклого пятиугольника *ABCDE* соединены отрезками. Точки *H* и *K* соответственно — середины этих отрезков. Доказать, что отрезок *HK* параллелен стороне *AE* и равен одной четверти этой стороны.

Задача 5. Дан параллелограмм ABCD с длинами сторон 12 и 8. Биссектрисы его углов при пересечении образуют четырёхугольник. Чему равны длины диагоналей этого четырёхугольника?

25.07.19.

Занятие 6. Десятичная запись натурального числа. Признаки делимости.

Начальный уровень

Задача 1. Докажите, что число делится на 4, тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4.

Задача 2. Сформулируйте признак делимости на 2^n и на 5^n.

Задача 3. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 4?

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

Задача 5. Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых уменьшится в 3 раза, если само число увеличить на 3.

Задача 6. Докажите, что если записать в обратном порядке любое натуральное число, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

Задача 7. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Задача 8. Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них - 97?

Задача 9. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого используются все 10 цифр.

Задача 10. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получится нуль.

Задача 11. Между цифрами двузначного числа, кратного трем, вставили нуль, и к полученному трехзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число, в 9 раз больше первоначального. Найдите исходное число.

Задача 15. К задумчиво стоящему на тротуаре человеку, а им оказался математик, подошёл милиционер. «Вы не обратили внимания на номер проехавшего сейчас самосвала?» — спросил он. «О, да! У него был редкостный номер. Второе двузначное число получается из первого перестановкой цифр, а их разность равняется сумме цифр каждого из них» — таков был ответ математика. Какой же номер у самосвала?

Задача 16. Шестизначное число начинается с цифры 2. Откинув эту цифру слева и написав её справа, получим число, которое в 3 раза больше первоначального. Найдите первоначальное число.

Задача 17. Когда число ПОТОП умножили на 99 999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом ПОТОП?

Задача 18. Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

Задача 19. Все цифры шестизначного числа A — различны и расположены в порядке возрастания. Чему может равняться сумма цифр числа 9A?

Задача 20. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что предпоследняя цифра данного числа нечетна.

Средний уровень

Задача 1. Докажите, что число $\overline{abcde}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $a-b+c-d+e$ делится на 11.

Задача 2. Докажите, что число $\overline{abcd}$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $\overline{bcd}-a$ делится на 13.

Задача 3. Не проводя вычислений, скажите какой остаток от деления на 11 дает число 123456789. А число 234567891?

Задача 4. Докажите, что разность числа, имеющего нечетное количество цифр и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.

Задача 5. Докажите, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 18.

Задача 6. Может ли число, в записи которого 33 единицы и несколько нулей быть полным квадратом некоторого натурального числа?

Задача 7. Сумма цифр трехзначного числа равна 17. Если из исходного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 792. Найти это число.

Задача 8. Найти наименьшее 4-значное число, удовлетворяющее соотношению $\overline{abcd} = \overline{ab} * \overline{cd} + \overline{ab} + \overline{cd}$.

Задача 9. Найти все пятизначные числа, обладающие тем свойством, что если приписать впереди этого числа некоторое однозначное число, а затем приписать в конце этого числа то же однозначное число, то отношение полученного большего числа к меньшему будет равно 3.

Задача 10. Найти четырехзначное число, у которого сумма двух первых и двух последних цифр равна 13, а сумма квадратов двух последних цифр равна двузначному числу, образованному первыми двумя цифрами искомого числа.

Повышенный уровень.

Задача 11. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних он посчитал их разность. В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

Задача 12. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

Задача 13. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть записано на доске?

Задача 14. Даны натуральные числа M и N, большие 10, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что M=3N. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечетной цифре. Какой цифрой может оканчиваться число N? Найдите все возможные значения.

Задача 15. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трех числе записали на доске, а затем всё, кроме последних трёх цифр этого произведения, стерли. Какие три цифры могли остаться на доске. Найдите все возможные ответы

26.07.2019.

Занятие 7. Комбинаторика 1.

Часть 1.

Задача 1. Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г - четыре дороги, из Б в В - три дороги, из Г в В - пять дорог, между Б и Г дорог нет. Сколько различных дорог ведет из А в В через Б? Сколько вообще различных дорог из А в В?

Задача 2. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две так, чтобы их можно было приложить друг к другу

Задача 3. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее количество зубов равно 32).

Задача 4. В стране 10 городов, каждые два из которых соединены авиалиниями. Сколько авиалиний в этой стране

Задача 5. а) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата - белый и черный?

б) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата - белый и черный, не лежащие на одной и той же горизонтали, и вертикали.

Задача 6. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть в белый и часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались)

Задача 7. Сколько имеется 4-значных натуральных чисел, которые не делятся на 5?

Задача 8. Пусть $p_1, p_2, \dots p_n$ - различные простые числа. Сколько делителей (включая 1 и q) имеет число $q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ - некоторые натуральные числа.

Часть 2.

Задача 1. Сколькими способами 3 девушки и 5 юношей могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Задача 3. На каждой стороне четырехугольника отмечено по четыре различных точки, не совпадающих с вершинами четырехугольника. Найти, сколько всего можно указать треугольников, выбирая их вершины из отмеченных точек

Задача 4. а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол три юноши и три девушки так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

б) А если они садятся не за стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими.

Задача 5. Найти количество шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых не более двух нечетных цифр.

Задача 6. Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера?

Задача 7. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечетная цифра?

Задача 8. Сколькими способами можно переставить буквы слова “девушка” так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

Занятие 8. Математическая индукция.

Основная схема.

Метод индукции требует установления истинности двух фактов:

База. Первое утверждение верно. (мы можем толкнуть первую доминошку).

Переход. Если интересующее нас утверждение верно на каком-то шаге, то верно и следующее за ним утверждение. (толкнув одну, уроним и другую)

Часть 1. Индукция на пальцах

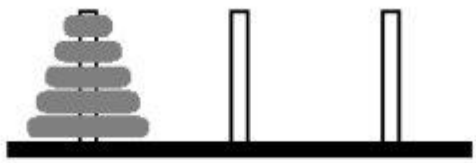
Задача 1. Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стрежня на другой, если в пирамидке:

a) 2 кольца;

b) 3 кольца;

c) 5 колец;

d) n колец.



Задача 2. Рассмотрим уголок.  Он получается вырезанием из квадрата 2*2 одной клетки.

Можно ли разрезать на такие уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)?

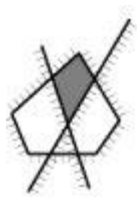
a) 4*4 c) 128*128

b) 8*8 d) 2^n*2^n

Задача 3. Плоскость разбита на области n прямыми. Докажите, что вне зависимости от расположения прямых, можно так раскрасить эти области в черный и белый цвета, что никакие две области одного цвета не будут иметь общего участка (отрезка) границы.

Часть 2. Абстракции.

Задача 4. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.



Задача 5. Докажите, что для любого натурального n справедливы неравенства

a) $2^n > n$

b)$1 + 2 + \ldots + n \leq n^2$

Задача 6. Докажите, что для произвольного натурального n верно равенство:

$$1+3+ \ldots +(2n - 1)=n^2$$

Задача 7. В пробирке живут амёбы. Каждую минуту происходит следующее: каждая амёба делится пополам, после чего в пробирку добавляют еще одну такую же амёбу. В начальный момент времени там была всего одна амёба. Докажите, что через n минут в пробирке будет $2^{n+1} - 1$ амёба.

Задача 8. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Доказать, что эту картинку можно обвести "одним росчерком", то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

Задача 9. Докажите, что сумма внутренних углов любого n-угольника равна $(n - 2)*180^o$

Задача 10. Ханойские башни. (Эвристическая задача) За какое минимальное число перекладываний можно переместить пирамидку с одного стержня на другой.

30.07.2019.

Занятие 9. Инвариант.

Инвариант — это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях. Например, четность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

Задача 1. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число

а) $a + b$;

б) ab;

в) $a + b - 2$.

Какое число получится после 20 таких действий?

Задача 2. На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?

Задача 3. На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

Задача 4. На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.

Задача 5. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Задача 6. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?

Задача 7. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять металлический рубль на 26 монет?

Задача 8. Имеется набор чисел *а, в, с*. Данный набор чисел меняется на тройку чисел: $а + в – с$, $в + с – а$, $а + с – в$. Дан набор чисел 2018, 2020, 2021. Можно ли из него получить набор из чисел 2001, 2002, 2003?

Задача 9. Из цифр 2, 3, 4, …, 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

Задача 10. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2018. За один ход разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность. В результате многократного выполнения таких действий на доске окажется записанным одно число. Может ли оно быть нулем?

Задача 11. На столе лежит куча из 637 ракушек. Из нее убирают одну ракушку и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной ракушки, снова убирают одну ракушку и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех ракушек?

Задача 12. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2019-го дня.

Приложение 1. Математические игры-мероприятия.

22.07.2019.

Мероприятие 1. Математическое домино.

Правила игры. (по таким проводилась игра на смене, а вот тут правила от создателя данной игры: http://adygmath.ru/content/files/smena2018/mathgames/domino/domino_pravila2018.pdf)

1. В игре могут участвовать до 20 команд (по 4 человека в каждой команде) на один комплект задач. Игра идет в течение 2-3 часов, о чем сообщается заранее.

2. Протокол игры ведется жюри с выводом на экран текущих результатов через мультимедийный проектор.

3. Каждая из 28 задач имеет свою стоимость согласно распределению баллов на доминошках (0-0, 0-1, 0-2, …, 5-5, 5-6. 6-6).

4. Каждая команда получает изначально две задачи с суммарной стоимостью не более 8 баллов случайным образом из банка задач, который находится у жюри (каждая задача каждого комплекта – в одном экземпляре). После этого при сдаче ответа вместе с условием задачи команда самостоятельно берет себе новую задачу. При этом у команды на руках всегда две задачи.

5. На каждую задачу (кроме 0-0) команда может дать ответ только **два раза**.

6. Если сразу даны верный ответ или решение, то команда получает полное суммарное количество баллов соответствующей доминошки. Если же с первого раза даны неверный ответ или решение, то в протокол ставится 0 баллов, и со второй попытки (после взятия этой задачи в будущем) за верное решение команда сможет получить только большую часть баллов доминошки. После двух неудачных попыток задача больше не принимается, а команда наказывается штрафом, равным меньшей части баллов доминошки. Невозможность в будущем решать команду задачу со штрафом в 0 баллов отмечается в протоколе желтым цветом (карточкой).

7. Задача 0-0 при верном решении с первой попытки дает 10 баллов, если же решение неверное, то задача больше не принимается, по ней команда получает 0 баллов и желтую карточку.

8. Если команда не может решить задачу или не хочет давать по ней ответ, то она может ее «сбросить», т.е. сдать в жюри без получения полагающегося штрафа (в этом случае команда должна сдать листочек, на котором ответ не указывается, записывается слово «сброс» или ставится прочерк). При этом команда может взять себе эту задачу в будущем, если по ней у команды пока еще 0 баллов и нет желтой карточки. В случае первой попытки при сбросе карточки команда получает 0 баллов, в случае второй попытки команде выставляется 0 баллов и дается желтая карточка.

9. Если команда ошибочно взяла задачу, которую решала ранее и уже получила по ней соответствующий ненулевой балл или желтую карточку, то она наказывается одним штрафным баллом, который выставляется в графу «штраф». Сдает эту задачу в жюри и берет себе новую.

10. Ответ на задачу команда указывает на специальном бланке. В случае неверного оформления листка ответа (отсутствие названия команды, цены задачи, эмблемы-логотипа на задней стороне) команда наказывается штрафным баллом.

11. Если во время или по окончания игры в ответах жюри обнаружится ошибка, то команда, сдавшая правильный ответ, получает удвоенное количество баллов, полагавшихся ей за правильный ответ в момент его сдачи. Баллы за подобную задачу у команд, которым был засчитан неверный ответ, обнуляются.

12. Игра для команд прекращается либо по окончании отведенного на нее времени, либо после того, как командой разобраны все 28 задач.

13. Команды по итогам игры занимают места по убыванию количества набранных ими баллов.

Методические рекомендации по проведению.

1. Для более грамотной игры целесообразно вести собственный протокол, в котором отмечать решенные задачи, а также приоритетные для выбора в будущем или те, которые команде стратегически невыгодно брать. Кроме того, в случае отключения проектора (случайного, по техническим причинам или запрограммированного жюри) у команды будет возможность продолжать игру, не совершая ошибок при неправильном выборе задач.

2. К столу жюри представителю команды лучше подходить со своим списком приоритетов, в котором указан желательный порядок выбора задач.

3. Одному из игроков команды сразу записывать в отдельную тетрадь условия задач. Если выяснится, что команда решила задачу неправильно, остается возможность продолжить решать задачу, имея текст перед глазами. Поняв свою ошибку и решив задачу заново, команда может взять эту задачу в следующий раз и ответить на нее, экономя время. Подойдя к столу жюри с заранее заготовленным ответом и сдав предыдущую задачу, сразу взять нужную карточку и положить ее на стол жюри с новым ответом. Тем самым команда экономит свое время на перемещении игрока к команде и обратно. После этого игрок берет новую задачу, которая нужна команде.

4. Размявшись на 5-6 несложных задачах с невысокой стоимостью, стоит брать более сложные задачи. Затем играть по принципу «качелей» (легкая-трудная), чередуя выбор легких и трудных задач. Если команда успешно решает трудные задачи, то стараться сохранять набранный темп.

5. Следить за протоколом, выбирать среди сложны задач те, которые уже решены парой команд, а значит, потенциально решаемы.

6. Разумно рисковать выбором сложных задач, которые еще никто не брал, - задача может оказаться вполне решаемой, да и первый неверный ответ не штрафуется.

7. Если по смыслу решенной задачи видно, что у нее может быть задача-партнер («доминошка»), то взять задачу с соседним номером, т.к. в игре

при большом количестве задач обязательно применяется подбор парных задач с минимальным изменением условий. Тем самым по свежим следам команда решает еще одну подобную задачу.

8. Перед сдачей ответа обязательно проанализировать протокол. Если выяснится, что у команды есть простой ответ на поставленную задачу, а в протоколе практически у всех команд стоит неположительное число баллов, то в задаче явно есть «ловушка», в которую попались соперники. Внимательно перечитать условие задачи и попытаться понять, на чем все соперники попались, и обошла ли команда «подводные камни» задачи.

9. Если по протоколу видно, что по некоторой неразобранной еще командой задаче осталось только 2-3 команды, не бравшие ее, то оставить эту задачу себе в «запасе». Т.е. пока ее не брать, т.к. в конце игры может возникнуть ситуация, когда все команды решают сложные задачи, и свободных карточек с условиями в банке задач у жюри нет. Команды начинают простаивать в ожидании появления нужных карточек в банке. Когда команда попадает к концу игры в такую ситуацию, у нее еще есть «запасные» задачи, которые она может взять.

10. При написании ответа обратить внимание на вопрос, который задается в задаче, и требования к ответу, особенно, когда необходимо дать ответ и привести пример. При отсутствии ответа или примера задача считается нерешенной.

Математическое домино. Задания.

0–0. Является ли простым число $500^2–999$**?** Представьте доказательство своего ответа.

1–1. Имеется 7 дверей и 7 ключей от них. Сколько проб достаточно, чтобы подобрать ключ к каждой из них?

0–1. Маша пробежала 1 км со средней скоростью 4 м/с. С какой средней скоростью (м/с) пробежал эту дистанцию Вася, если, стартовав на 25 секунд позже Маши, он финишировал на 25 секунд раньше?

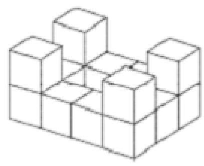
1–2. Найдите наибольший угол треугольника, если он в 3 раза больше наименьшего и в 1,5 раза больше среднего угла треугольника.

0–2. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если BC = 12.

1–3. Назовём натуральное число «в доску своим», если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «в доску своих» чисел?

0–3. Пусть $a - b = 5$, $a \cdot b = 3$. Найдите $a^3b + ab^3$.

1–4. Фигура, изображённая на рисунке, состоит из 14 кубиков. Эту фигуру снаружи (в том числе, и основание, и все видимые грани внутри) покрасили в красный цвет, а потом разломали на отдельные кубики. У скольких из них оказались окрашенными ровно 4 грани?

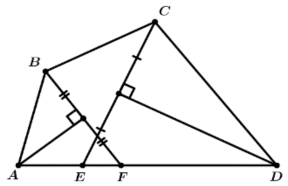


0–4. Города А, В и С вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из А в В на 200 км короче объезда через С, а прямой путь из А в С на 300 км короче объезда через В. Найдите расстояние между городами В и С.

1–5. Числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ таковы, что $x + y = xy = 17$. Найдите значение выражения $(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right)$.

0–5. Известно, что $c–b–a=11$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 111$. Найдите $ac – ab + bc$.

1–6. Известно, что ABCD – выпуклый четырёхугольник (смотри рисунок). AB = 8, BC = 10, CD = 12, AD = 14. Чему равна отрезка EF?



0–6. В белом квадрате 10×10 первым ходом закрашивают клетку в виде прямоугольника 1×1, вторым ходом – клетки в виде прямоугольника 1×2, третьим – 1×3 и т.д. Какое наименьшее число ходов могло быть сделано, если клетки нельзя красить повторно? Приведите ответ и пример.

2–2. Какое наибольшее число королей (на доске должны быть короли обоих цветов – чёрного и белого) можно расставить на шахматной доске так, чтобы чёрные не били белых, а белые - чёрных? Приведите ответ и пример.

2–3. На доске были написаны примеры на сложение. Вася заменил одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. Получилось, что Д+В+А+Ж+Д+Ы+Д+В+А = 20, а Т+Р+И+Ж+Д+Ы+Т+Р+И = 50. Чему может быть равно Д+В+А+Ж+Д+Ы+Т+Р+И?

3-6. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2. Найдите площадь зала.

2–4. Для двух различных положительных чисел ***a*** и ***b*** известно, что $a^2–2019a = b^2 – 2019b$. Какое наименьшее значение может принимать $a^2 + b^2+2ab$?

4–4. На клетчатой доске размером 4×4 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?

2–5. Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.

4–5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стёрта последней?

2–6. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *C* пересекает сторону *AB* в точке *M*, а биссектриса угла *A* пересекает отрезок *CM* в точке *T*. Оказалось, что отрезки *CM* и *AT* разбили треугольник *ABC* на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника *ABC*.

4–6. На стороне *BC* треугольника *ABC* выбрана точка *L* таким образом, что $\angle ALB = 60°$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите угол *C* треугольника.

3–3. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки – чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура – мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон? Приведите ответ и пример.

3–4. Известно, что $a + b + c = 9$ и

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{9}{10}.$$

Найдите значение данного выражения

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}.$$

3–5. В ΔABC с $\angle ABC=60^\circ$ точка H – основание высоты, проведённой из вершины A. Известно, что H делит отрезок BC в отношении $BH:HC=1:3$. Найдите $\angle ACB$.

5–5. Представьте число $\frac{5}{17}$ в виде суммы наименьшего количества дробей вида $\frac{1}{n}$ с натуральными n. (Такие дроби называются *аликвотными*.)

5–6. В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 6 класса. Два семиклассника набрали в сумме 8 очков, а каждый из шестиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько шестиклассников могло участвовать в турнире? (Каждый из участников турнира играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков.)

6–6. Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Отметьте на плоскости 7 точек и проведите для них 5 нечестных прямых.

Математическое домино. Решения.

0–0. Является ли простым число $500^2–999$? Представьте доказательство своего ответа.

Ответ: Нет.

Доказательство.

$500^2–(1000 –1) = 500^2–1000 +1 = 500^2– 2·500 + 1 = (500 – 1)^2 = 499^2$.

Ясно, что квадрат натурального числа, за исключением 1, является составным числом.

0–1. Маша пробежала 1 км со средней скоростью 4 м/с. С какой средней скоростью (м/с) пробежал эту дистанцию Вася, если, стартовав на 25 секунд позже Маши, он финишировал на 25 секунд раньше?

Ответ: 5 м/с.

Решение. Маша бежала 1 км в течение 1000:4=250 секунд, тогда Вася потратил 250-25-25=200 секунд. Значит, его скорость была 1000м:200с=5м/с.

0–2. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если BC = 12.

Ответ: 6.

Решение. Треугольник ABM – равнобедренный, т.к. биссектриса BK пересекает отрезок AM под прямым углом, следовательно, AM – основание, а AB и BM – боковые стороны, равные половине BC.

0–3. Пусть $a – b =5$, $a·b = 3$. Найдите $a^3b + ab^3$.

Ответ: 93.

Решение. $a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2)= ab((a – b)^2+2ab)= 3·(25 + 2·3)= 93$.

0–4. Города A, B и C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче объезда через C, а прямой путь из A в C на 300 км короче объезда через B. Найдите расстояние между городами B и C.

Ответ: 250 км.

Решение.

Путь из А в В: (1) АВ = АС + СВ - 200 (объезд через С - сумма расстояний АС и СВ).

Путь из А в С: (2) АС = АВ + ВС - 300.

Заменим в (1) АС на значение из (2): АВ = АВ + ВС - 300 +ВС - 200, откуда получаем, что ВС = 250 км.)

0–5. Известно, что $c - b - a = 11$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 111$. Найдите

$$ac - ab + bc.$$

Ответ: **-5.**

Решение. Из формулы для квадрата трёх слагаемых

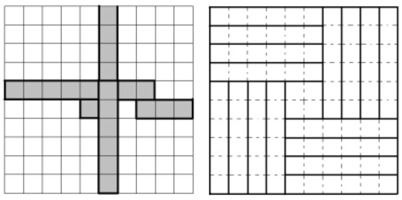
$$(c - b - a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac + 2ab - 2bc,$$

получаем

$$2\cdot(ac - ab + bc) = (a^2 + b^2 + c^2) - (c - b - a)^2 = 111 - 121 = -10.$$

Откуда и получаем требуемое.

0–6. В белом квадрате 10×10 первым ходом закрашивают клетку в виде прямоугольника 1×1, вторым ходом – клетки в виде прямоугольника 1×2, третьим – 1×3 и т.д. Какое наименьшее число ходов могло быть сделано, если клетки нельзя красить повторно? Приведите ответ и пример.



Ответ: 6 ходов.

Решение. На доске можно выделить 16 прямоугольников 1×6, из которых максимум 1+2+3+4+5=15 будут содержать закрашенные клетки, значит, всегда можно сделать шестой ход. На рисунке приведён пример, когда седьмой ход сделать уже нельзя.

1–1. Имеется 7 дверей и 7 ключей от них. Сколько проб достаточно, чтобы подобрать ключ к каждой из них?

Ответ. 21.

Решение. Будем использовать способ – «худший случай», т.е. берём какой-то ключ. Чтобы определить его дверь «наверняка» необходимо сделать 6 проб (пусть они все будут неудачными), тогда ещё одну пробу делать необязательно, ибо ключ уже понятно соответствие «ключ-дверь». Заметим, что определяемых соответствий стало 6. Продолжаем с остальными ключами и получаем, что количество проб равно 6+5+4+3+2+1=21.

1–2. Найдите наибольший угол треугольника, если он в 3 раза больше наименьшего и в 1,5 раза больше среднего угла треугольника.

Ответ: 90°.

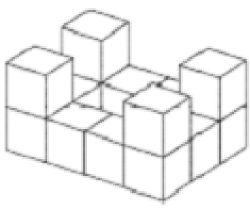
Решение. Пусть наименьший угол равен x градусам, тогда два других угла равны $2x$ и $3x$. Тогда сумма углов $x+2x+3x=180°$, значит, $x=30°$.

1–3. **Назовём натуральное число «в доску своим», если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных
«в доску своих» чисел?**

Ответ: **625.**

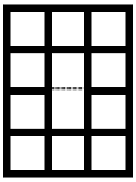
Решение. **Заметим, что нечётных цифр всего пять штук, значит, количество вариантов выбрать нечётное число на каждый из четырёх разрядов равно 5. Следовательно, всего вариантов 5^4 = 625.**

1–4. Фигура, изображённая на рисунке, состоит из 14 кубиков. Эту фигуру снаружи (в том числе, и основание, и все видимые грани внутри) покрасили в красный цвет, а потом разломали на отдельные кубики. У скольких из них оказались окрашенными ровно 4 грани?



Ответ: у шести.

Решение. Вверху 4 кубика, значит, в основании 10 кубиков, и основание выглядит сверху так, как показано на рисунке (части некоторых кубиков видны на исходном рис.). У кубиков на втором этаже закрыта только нижняя грань, поэтому окрашено будет по 5 граней. Кубики, стоящие на «первом» этаже, соприкасаются с кубиками на своем уровне по двум граням. Но у угловых кубиков еще закрыта верхняя грань, поэтому будут окрашены только три грани. Остальные шесть кубиков нам подходят.)



1–5. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найдите значение выражения $(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right)$.

Ответ: -289.

Решение. Заметим, что из равенства $x+y=xy=17$ следует, что $x+y=17$ и $xy=17$. Следовательно, первая скобка

$$(x^2 - 17x)=x\cdot(x-17)=x\cdot(-y)=-xy=-17.$$

Вторая скобка примет вид $(y+x)=17$. Общий итог очевиден.

1–6. Известно, что ABCD – выпуклый четырёхугольник (смотри рисунок). AB = 8, BC = 10, CD = 12, AD = 14. Чему равна отрезка EF?

Ответ: 6.

Решение. ABF – равнобедренный, значит AF=8. CDE – равнобедренный, значит ED=12.

$$AF+ED=AE+EF+EF+FD=(AE+EF+FD)+EF=AD+EF=14+EF=20.$$

Получаем искомое значение.

2–2. Какое наибольшее число королей (на доске должны быть короли обоих цветов – чёрного и белого) можно расставить на шахматной доске так, чтобы чёрные не били белых, а белые - чёрных? Приведите ответ и пример.

<u>Ответ:</u> 61

<u>Решение.</u> Например, 1 белый король в углу и 60 чёрных королей во всех остальных не соседних с ним клетках. Заметьте, что про одноцветный бой не сказано ни слова.

2–3. На доске были написаны примеры на сложение. Вася заменил одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные–разными. Получилось, что Д+В+А+Ж+Д+Ы+Д+В+А=20, а Т+Р+И+Ж+Д+Ы+Т+Р+И = 50. Чему может быть равно Д+В+А+Ж+Д+Ы+Т+Р+И?

<u>Ответ:</u> **35.**

<u>Решение.</u> Сделаем замену. Д+В+А=X, Т+Р+И=Y, Ж+Д+Ы=Z. Получим, что X+Z+X=20, Y+Z+Y = 50. Сложив эти равенства, получим, что 2X+2Y+2Z = 70, X+Y+Z = 35, после замен легко понять, что именно это и требовалось найти**.**

2–4. Для двух различных положительных чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известно, что $\boldsymbol{a^2-2019a=b^2-2019b}$. Какое наименьшее значение может принимать $\boldsymbol{a^2+b^2+2ab}$?

<u>Ответ:</u> 2019^2 или 4076361.

<u>Решение.</u>

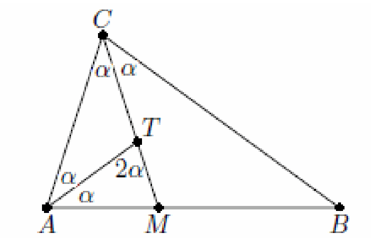
Запишем так $a^2 - b^2=2019a - 2019b$, далее $(a - b)(a + b)=2019\cdot(a - b)$, $(a - b)(a + b - 2019)=0$. В силу различности чисел a и b получаем, что $a - b \neq 0$ и получаем $a + b = 2019$. Осталось понять выражение $a^2+b^2+2ab=(a + b)^2 = 2019^2$.

2–5. Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.

<u>Ответ:</u> 17°, 78° и 85°.

<u>Решение.</u> Пусть α - наименьший угол, тогда в силу остроугольности $5\alpha<90°$, значит, $\alpha<18°$. С другой стороны, сумма всех углов треугольника не больше $\alpha+5\alpha+5\alpha$, значит, $11\alpha \geq 180°$, т.е. $\alpha > 16°$. В силу целочисленности получаем, что $\alpha=17°$, откуда другие углы треугольника равны 85° и 78°.

2–6. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *C* пересекает сторону *AB* в точке *M*, а биссектриса угла *A* пересекает отрезок *CM* в точке *T*. Оказалось, что отрезки *CM* и *AT* разбили треугольник *ABC* на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника *ABC*.



Ответ: 72°, 36° и 72°.

Решение. Так как сумма углов *A* и *C* треугольника *ABC* меньше, чем 180°, то $\angle TAC+\angle TCA<90°$, поэтому угол *ATC* – тупой (см. рис.). Значит, в равнобедренном треугольнике *ATC* сторона *AC* является основанием. Тогда $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Угол *ATM* – внешний для треугольника *ATC*, значит, $\angle ATM=2\alpha$. Треугольник *ATM* также является равнобедренным. $\angle AMT$ – внешний угол треугольника *MBC*, значит, $\angle AMT>\angle MCB=\alpha$, тогда $\angle AMT=\angle ATM=2\alpha$. Следовательно, сумма углов треугольника *ATM* равна 5α. Отсюда $\alpha = 36°$. Треугольник *MBC* также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36°$.

3–3. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки – чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура – мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон? Приведите ответ и пример.

1		4		6
	2		5	
3		7		9
	11		8	
12		10		

Ответ: 12 клеток.

Решение. Приведём сначала пример маршрута мини-слона, который обеспечит посещение им двенадцати клеток (см. рис., числа от 1 до 12 показывают порядок обхода клеток). Докажем, что все чёрные клетки мини-слон обойти не сможет. Рассмотрим четыре угловые клетки. Выйти из такой клетки мини-слон может либо в соседнюю клетку, либо в центральную. В соседнюю клетку из угловой он может пойти только первым ходом. Действительно, попасть в угловую клетку можно либо из соседней, либо из центральной, перепрыгнув через уже пройденную соседнюю. В обоих случаях, снова пойти в соседнюю клетку мини-слон не сможет. В центральную клетку из угловой мини-слон может пойти также не более одного раза. Таким образом, мини-слон покинет угловые клетки не более двух раз, значит, он посетит не более трёх угловых клеток.

3–4. Известно, что $a+b+c=9$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{9}{10}$. Найдите значение данного выражения $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$.

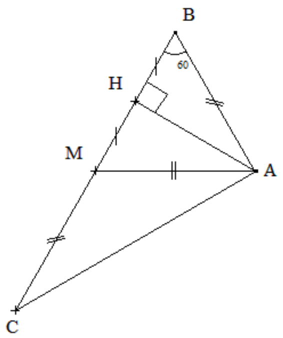
Ответ: 5,1.

Решение. Перемножим два выражения

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=$$
$$\frac{(a+b)+c}{a+b}+\frac{a+(b+c)}{b+c}+\frac{(a+c)+b}{c+a}=1+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+1+1+\frac{b}{c+a}=\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)++3=8{,}1.$$

Откуда несложно понять значение требуемого выражения.

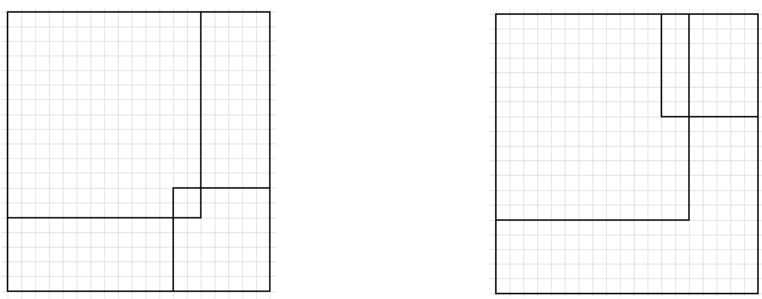
3–5. В ΔABC с $\angle ABC=60^{\circ}$ точка H – основание высоты, проведённой из вершины A. Известно, что H делит отрезок BC в отношении $BH:HC=1:3$. Найдите $\angle ACB$.



Ответ: 30°.

Решение. Пусть M – середина BC. Тогда $BH=BC/4=BM/2$. Значит, в ΔBAM высота AH является медианой => ΔBAM – равнобедренный с $\angle ABM=60^{\circ}$ => ΔBAM – равносторонний => $AM=MB=MC$ и $\angle AMB=60^{\circ}$ => $\angle AMC=180^{\circ}-\angle AMB=120^{\circ}$. ΔAMC равнобедренный ($AM=MC$) => $\angle ACM=90^{\circ}-\angle AMC/2=30^{\circ}$.)

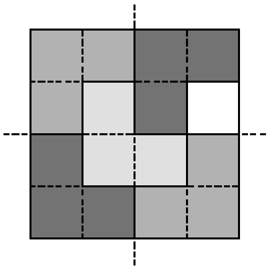
3–6. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2. Найдите площадь зала.



Ответ: 361 м^2.

Решение. В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м^2, значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м., Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна 14:2 = 7 (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна 7 +14 – 2 = 19 (м), а площадь равна 19^2=361 ($м^2$).)

4–4. На клетчатой доске размером 4×4 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?



Ответ: 16 клеток.

Решение. Так как 16 не делится на 3, то всю доску (16 клеток) нельзя покрыть не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Покажем, что любые 15 покрашенных клеток можно покрыть такими уголками. Разобьём квадрат 4×4 на четыре квадрата размером 2×2, тогда единственная не покрашенная клетка попала в какой-то один из них. Любые три полностью покрашенных квадрата можно покрыть уголками из трёх клеток (см. рис.), а в четвёртом квадрате любые три покрашенные клетки всегда можно покрыть одним уголком. При меньшем 15 количестве закрашенных клеток выбираем 1 не покрашенную и сводим ситуацию к уже рассмотренной.

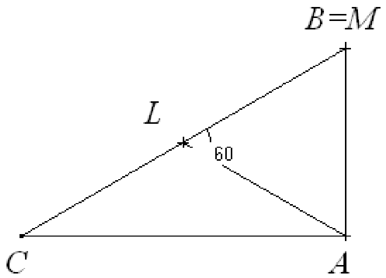
4–5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стёрта последней?

Ответ: 561234789 и 549876321**.**

Решение. На доске записано по 8! чисел, начинающихся с 1, 2, …, 9.

Поэтому после $4\cdot 8!$ стираний на ней останутся в точности все числа, начинающиеся с пятерки. Сотрем все начальные пятерки — порядок чисел от этого не изменится. Останется по 7! чисел, начинающихся с 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Последними будут стёрты самое больше число, начинающееся на 4: 49876321 и самое маленькое, начинающееся на 6: 61234789. Вернув стертые пятерки, получаем ответ.

4–6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L таким образом, что $\angle ALB = 60°$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите угол C треугольника.



Ответ: 30°.

Решение. Отложим на луче LB отрезок $LM = AL$. Получится равносторонний треугольник ALM. Пусть точка M оказалась между точками B и L. Тогда $AB+BM=LC+BM=BC–LM=2AL–AL=AL=AM$, то есть в треугольнике ABM сторона AM равна сумме двух других, что невозможно. Допустим, точка M оказалась за точкой B. Тогда

$$AB–BM = LC–BM = LC+BL–BL–BM=BC–LM=2AL–AL = AL = AM,$$

и неравенство треугольника снова нарушено. Стало быть, $M=B$, а L — середина стороны BC, откуда легко получается ответ.

5–5. Представьте число $\frac{5}{17}$ в виде суммы наименьшего количества дробей вида $\frac{1}{n}$ с натуральными n. (Такие дроби называются *аликвотными*.)

Ответ: $\frac{5}{17}=\frac{1}{4}+\frac{1}{34}+\frac{1}{68}$ – три дроби.

Решение. Заметим, что $5/17 = 1/17+(4/17–4/16)+1/4 = 1/17–1/68+1/4 = 1/34+1/68+1/4$. Допустим, есть такие натуральные m и n, что $1/m+1/n = 5/17 \Leftrightarrow 17(m+n) = 5mn$. Тогда одно из чисел m или n (пусть m) делится на 17: $m = 17k$.

Имеем $17k+n = 5kn$. Теперь получается, что n делится на k: $n=ks$. Тогда $17+s = 5ks \Leftrightarrow s(5k-1) = 17$. Но так не бывает: у числа 17 нет делителя вида $5k-1$.

5–6. В шахматном турнире участвовали два ученика 7 класса и некоторое число учеников 6 класса. Два семиклассника набрали в сумме 8 очков, а каждый из шестиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько шестиклассников могло участвовать в турнире? (Каждый из участников турнира играет с каждым из остальных по одной партии. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью – ½ очка, за проигрыш – 0 очков.)

Ответ: 7 или 14.

Решение. Пусть x – число шестиклассников, y – число очков, набранных каждым шестиклассником. Подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy+8=\frac{(x+1)(x+2)}{2}, \text{ т.е. } 2y=\frac{(x+1)(x+2)-16}{x}=x+3-\frac{14}{x}.$$

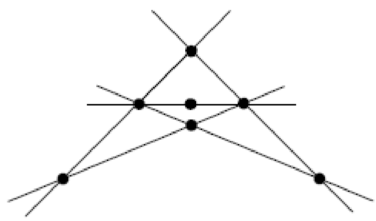
Поэтому x является делителем 14 и принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число $y < 0$.

При x=7 получаем y=4. Такой турнир возможен: например, все партии завершились вничью; тогда каждый участник набрал по 4 очка.

При x=14 получаем y=8. Такой турнир также возможен: например, один из семиклассников все партии проиграл, а все остальные встречи завершились вничью; тогда каждый участник, кроме последнего, набрал по 8 очков.

6–6. Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Отметьте на плоскости 7 точек и проведите для них 5 нечестных прямых.

Ответ:



26.07.19

Мероприятие 2. Математическая карусель.

Правила проведения игры

Математическая карусель – командное соревнование в решении задач. Всем командам, участвующим в карусели, предлагается в строго определенном порядке (одинаковом для всех команд) один и тот же набор задач, в котором достаточно указывать верные ответы.

Система подсчета баллов такова, что условием успешного выступления не обязательно является решение большого количества задач. Важнее дать как можно больше верных ответов подряд.

Во время игры команда получает очередную задачу, решает ее и дает ответ. Независимо от результата (верный ответ или нет), команда получает следующую задачу. И так далее. Время на решение одной задачи не ограничено, определено только общее время проведения карусели.

Подведение итогов игры.

Места распределяются согласно количеству набранных баллов. Если команды имеют равное количество баллов, то выше ставится та, у которой больше верно решенных задач.

Начисление баллов

Первая задача стоит три балла. Если к задаче дан верный ответ, то команда получает ее стоимость, а следующая задача будет стоить на 1 балл больше. Если на задачу дан неверный ответ, то команда получает за решение 0 баллов, а следующая задача будет стоить на 2 балла меньше, но не менее 3 баллов.

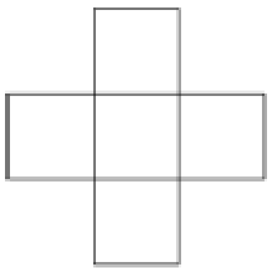
Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время (1,5 – 2 часа), отведенное для игры. Итоги Игры подводятся и доводятся до сведения участников в день проведения Игры. Победители награждаются дипломами I, II и III степени и памятными подарками

Математическая карусель. Задания.

Задача 1. Кирилл написал на доске число. Алиса уменьшила его на 20. Ваня увеличил число Алисы на 16. Потом они сложили три своих числа и получили 2019. Какое число написал Кирилл?

Задача 2. Аня записала десять чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19. Она берет какие-то два из них и складывает. Сколько различных результатов у нее получится?

Задача 3. Числа 3, 7, 11, 15 и 19 расставлены в пять квадратиков на рисунке так, что сумма трёх чисел по горизонтали равна сумме трёх чисел по вертикали. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?



Задача 4. В магазине возле школы продаются карандаши. Все они стоят одинаково, и целое число рублей. Несколько семиклассников купили себе по карандашу, в сумме потратив 143 рубля. Потом несколько из 79 шестиклассников тоже купили себе по карандашу, в сумме потратив 195 рублей. На сколько карандашей больше купили шестиклассники?

Задача 5. Рецепт горячего шоколада рассчитан ровно на 5 порций и требует для их приготовления взять 2 плитки шоколада, 1/4 чашки сахара, одну чашку воды и 4 чашки молока. У Иры есть 7 плиток шоколада, 2 чашки сахара, много воды и 11 чашек молока. При условии, что она будет соблюдать пропорции ингредиентов по рецепту, какое наибольшее количество ***целых*** порций горячего шоколада она сможет приготовить?

Задача 6. В кондитерской есть в наличии наборы по 3, по 4 и по 5 пирожных. Всего 30 наборов, в которых вместе ровно 98 пирожных. Сколько может быть наборов по 3 пирожных? Постарайтесь найти все варианты.

Задача 7. Сумма трёх различных наименьших положительных делителей некоторого натурального числа А равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число А?

Задача 8. В Бразилии в ходу монеты в 1, 10, 25 и 50 сентаво. Густав имеет монеты всех видов, хотя бы по одной, но не может набрать 1 реал (равный 100 сентаво) без сдачи. Какую наибольшую сумму может иметь Густав?

Задача 9. В компьютерный лагерь в каникулы приехало 20 девочек, 15 мальчиков и 5 преподавателей. Средний возраст девочек равен 15 лет, средний возраст мальчиков — 16 лет, а средний возраст всех 40 человек — 17 лет. Каков средний возраст преподавателей?

Задача 10. Сколько существует различных трёхзначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 48?

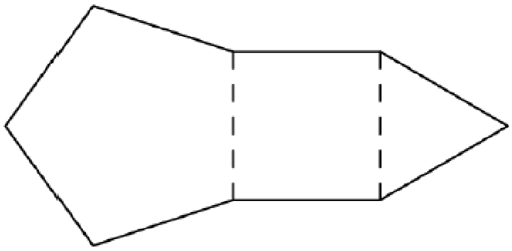
Задача 11. Сколько различных натуральных делителей у числа 2017^{2018}?

Задача 12. Ваня записал в тетради все нечетные четырехзначные числа. А Аня — все четырехзначные числа, состоящие только из нечетных цифр. Кто записал больше чисел и на сколько?

Задача 13. Вычислите:

$$\mathbf{25072018 \times 25072019 - 25072017 \times 25072020}.$$

Задача 14. Саша нарисовал равносторонний треугольник. Потом он пристроил к одной из его сторон квадрат. Потом он пристроил к противоположной стороне квадрата правильный пятиугольник. Дальше на каждом шаге он строит правильный многоугольник, у которого на одну сторону больше, чем на предыдущем, причем пристраивает его к самой дальней стороне (любой из двух, если их две). После того, как он пристроит правильный десятиугольник, сколько сторон окажется у полученного большого многоугольника?



Задача 15. В шеренге стоят 2019 человек, и одного из них зовут Иван. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Ивана, сказал: "Между мной и Иваном стоят ровно два лжеца". Сколько лжецов могло быть в этой шеренге, если известно, что Иван – рыцарь?

Задача 16. По дороге в одну сторону ехали грузовик со скоростью 50 км/ч, джип со скоростью 65 км/ч и мотоцикл со своей постоянной скоростью. В 12:00 джип догнал грузовик. В 12:10 мотоцикл догнал грузовик, а в 12:15 мотоцикл догнал джип. Какова скорость мотоцикла?

Задача 17. Танечка выписывает на доску цифры. Сначала она пишет 8, потом 9. После этого каждая следующая цифра равна последней цифре суммы двух предыдущих. То есть, третья цифра равна 7, четвертая — 6 и так далее. Какая цифра будет стоять на 2018-м месте?

Задача 18. Укажите какие-нибудь два двузначных числа A и B такие, что если A увеличить на B процентов, то получится тот же самый результат, что и если B уменьшить на A процентов.

Задача 19. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, произведение цифр которого делится на сумму его цифр.

Задача 20. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Математическая карусель. Решения.

Задача 1. Кирилл написал на доске число. Алиса уменьшила его на 20. Ваня увеличил число Алисы на 16. Потом они сложили три своих числа и получили 2019. Какое число написал Кирилл?

Ответ: 681.

Решение. Обозначим число Кирилла за x, тогда получается уравнение:

$$x+(x-20)+((x-20)+16)=2019,$$

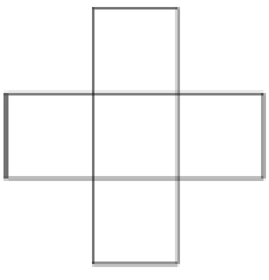
откуда находим $x=681$. Это и есть искомое число.

Задача 2. Аня записала десять чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19. Она берет какие-то два из них и складывает. Сколько различных результатов у нее получится?

Ответ: 17.

Решение. Поскольку даны последовательные 10 нечётных чисел, то значения парных сумм будут чётными в интервале значений от 4 (наименьшая сумма) до 36 (наибольшая сумма). Чётных чисел от 1 до 36 ровно 18, но нам необходимо выкинуть «2» (ибо мы её не сможем получить).

Задача 3. Числа 3, 7, 11, 15 и 19 расставлены в пять квадратиков на рисунке так, что сумма трёх чисел по горизонтали равна сумме трёх чисел по вертикали. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма?



Ответ: 37.

Решение. Понятно, что в центральной клетке может находится число 3 или 11, или 19, иначе равные суммы не набираются (свойство данной числовой последовательности *a, a + 4, a + 8, a + 12, a + 16*). А дальше без комментариев.

Задача 4. В магазине возле школы продаются карандаши. Все они стоят одинаково, и целое число рублей. Несколько семиклассников купили себе по карандашу, в сумме потратив 143 рубля. Потом несколько из 79 шестиклассников тоже купили себе по карандашу, в сумме потратив 195 рублей. На сколько карандашей больше купили шестиклассники?

Ответ: на 4 штуки.

Решение. В силу того, что цена и кол-во учеников - целое число, получаем $143 = 11 \cdot 13 = 1 \cdot 143$ и $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13 = 1 \cdot 195$. Из условия ясно, что карандаш не может стоить 1 рубль. Тогда ясно, что 1 карандаш стоит 13 рублей.

Задача 5. Рецепт горячего шоколада рассчитан ровно на 5 порций и требует для их приготовления взять 2 плитки шоколада, 1/4 чашки сахара, одну чашку воды и 4 чашки молока. У Иры есть 7 плиток шоколада, 2 чашки сахара, много воды и 11 чашек молока. При условии, что она будет соблюдать пропорции ингредиентов по рецепту, какое наибольшее количество ***целых*** порций горячего шоколада она сможет приготовить?

Ответ: 13 порций.

Решение. Ясно, что ингредиентов точно хватит на 10 порций и не хватит на 15, ибо возникнет нехватка молока. На порцию требуется 4/5 чашки молока, откуда понимаем, что 3 чашек молока хватит на приготовление только 3-х порций.

Задача 6. В кондитерской есть в наличии наборы по 3, по 4 и по 5 пирожных. Всего 30 наборов, в которых вместе ровно 98 пирожных. Сколько может быть наборов по 3 пирожных? Постарайтесь найти все варианты.

Ответ: 23,24,25.

Решение. Пусть наборов по 3 – x штук, по 4 – y, по 5 – z. Тогда получаем два уравнения: (1) $x + y + z = 30$ и (2) $3x + 4y + 5z = 98$. Вычтем из (2) утроенное (1), получим $y + 2z = 8$, понимаем, что $y = 2k$, тогда $k + z = 4$. Из условия ясно, что каждый из наборов присутствует, а значит $z = 1;2;3$ при этом $y = 6;4;2$ и x=23,24,25. Проверкой убеждаемся, что данные варианты возможны.

Задача 7. Сумма трёх различных наименьших положительных делителей некоторого натурального числа А равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число А?

Ответ: на один нуль.

Решение. Число 8 можно представить в виде суммы трёх различных натуральных чисел двумя способами: 8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4. Числа 1, 3 и 4 не могут быть тремя наименьшими делителями числа А: если А делится на 4, то оно делится и на 2. Значит, три наименьших делителя А – это 1, 2 и 5. Таким образом, А делится на 10, но не делится на 4. Следовательно, число А оканчивается ровно на один нуль.

Задача 8. В Бразилии в ходу монеты в 1, 10, 25 и 50 сентаво. Густав имеет монеты всех видов, хотя бы по одной, но не может набрать 1 реал (равный 100 сентаво) без сдачи. Какую наибольшую сумму может иметь Густав?

Ответ: 1 реал 19 сентаво = 119 сентаво.

Решение. Заметим, что он не может иметь две монетки по 50. Значит, монетка в 50 ровно одна. Если он имеет две монетки в 25, то получаем, что 50+25+25=100, это невозможно, поэтому монетка в 25 тоже одна. Кроме того, не может быть 5 монеток в 10, поэтому монеток по 10 максимум 4 штуки. Теперь рассмотрим единички. Если у нас единичек 10 или больше, то каждые десять единичек заменим на 10, от этого ситуация не улучшится. Значит, единичек не больше 9. Если у нас есть хотя бы 5 единичек, то наберем 50+25+5=80, но тогда десяток не больше одной. Итого в сумме мы можем иметь не больше чем 50+25+10+9=99 сентаво. Значит, у нас максимум 4 единички, и мы имеем 50+25+10+10+10+10+1+1+1+1 = 119.

Задача 9. В компьютерный лагерь в каникулы приехало 20 девочек, 15 мальчиков и 5 преподавателей. Средний возраст девочек равен 15 лет, средний возраст мальчиков — 16 лет, а средний возраст всех 40 человек — 17 лет. Каков средний возраст преподавателей?

Ответ: 28 лет.

Решение. По определению среднего арифметического получаем, что суммарное количество лет всех девочек равно 20·15, мальчиков – 15·16, преподавателей – 5x, а также общее количество лет всех приехавших в лагерь – 40·17. Тогда решая уравнение 20·15+15·16+5x=40·17, находим, что x=28.

Задача 10. Сколько существует различных трёхзначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 48?

Ответ:21.

Решение. 48 = 1·6·8 = 2·3·8 = 2·4·6 = 3·4·4. Первые три комбинации дают по 6 вариантов каждая, а четвёртая – 3. Получается всего 21 вариант составления различных чисел.

Задача 11. Сколько различных натуральных делителей у числа 2017^{2018}?

Ответ: 2019.

Решение. Это числа 1, 2017, 2017^2, 2017^3, …, 2017^{2018}, т.к. 2017 – простое число.

Задача 12. Ваня записал в тетради все нечетные четырехзначные числа. А Аня — все четырехзначные числа, состоящие только из нечетных цифр. Кто записал больше чисел и на сколько?

***Ответ: Ваня больше на* 3875.**

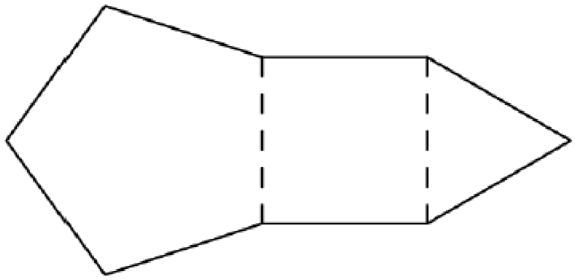
Решение. Всего четырёхзначных чисел – 9000, из них нечётных – 4500. Всего четырёхзначных чисел, записанных нечётными цифрами – 5^4 = 625. Теперь понятен ответ.

Задача 13. Вычислите 25072018×25072019 – 25072017×25072020.

Ответ: 2.

Решение. Применим немного алгебры – пусть 25072018=x, тогда наше выражение примет вид: $x\cdot(x+1) - (x-1)\cdot(x+2)$. Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые и получаем 2.

Задача 14. Саша нарисовал равносторонний треугольник. Потом он пристроил к одной из его сторон квадрат. Потом он пристроил к противоположной стороне квадрата правильный пятиугольник. Дальше на каждом шаге он строит правильный многоугольник, у которого на одну сторону больше, чем на предыдущем, причем пристраивает его к самой дальней стороне (любой из двух, если их две). После того, как он пристроит правильный десятиугольник, сколько сторон окажется у полученного большого многоугольника?



Ответ: 38.

Решение. Заметим, что у первого и последнего многоугольников «съедается» по одной стороне, а у остальных по две. Тогда количество сторон нового многоугольника таково: 2+2+3+4+5+6+7+9 = 38.

Задача 15. В шеренге стоят 2019 человек, и одного из них зовут Иван. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Ивана, сказал: "Между мной и Иваном стоят ровно два лжеца". Сколько лжецов могло быть в этой шеренге, если известно, что Иван – рыцарь?

Ответ: 2, 3 или 4.

Решение. Те, кто стоят рядом с Иваном, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут. Поэтому тот, между кем и Иваном стоят ровно два человека, – рыцарь. Перебирая по очереди каждого стоящего за этим рыцарем, (удаляясь от Ивана), убеждаемся, что все они – также рыцари. Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Иваном или через одного человека от него, может быть различным. Их может быть: 1) двое, если Иван – крайний в шеренге; 2) трое, если Иван – второй с краю; 3) четверо во всех остальных случаях.

Задача 16. По дороге в одну сторону ехали грузовик со скоростью 50 км/ч, джип со скоростью 65 км/ч и мотоцикл со своей постоянной скоростью. В 12:00 джип догнал грузовик. В 12:10 мотоцикл догнал грузовик, а в 12:15 мотоцикл догнал джип. Какова скорость мотоцикла?

Ответ: 95 км/ч.

Решение. За 10 мин. грузовик проехал 50/6км. За 15 мин. Джип проехал 65/4км. Следовательно, за 5минут мотоцикл преодолел расстояние равное 95/12 км, а это означает, что его скорость 95км/ч.

Задача 17. Танечка выписывает на доску цифры. Сначала она пишет 8, потом 9. После этого каждая следующая цифра равна последней цифре суммы двух предыдущих. То есть, третья цифра равна 7, четвертая — 6 и так далее. Какая цифра будет стоять на 2018-м месте?

Ответ: 9.

Решение. Выпишем ряд цифр 8976392134718976…Заметим цикл из 12 цифр (897639213471). Таких циклов до 2018 места будет ровно 12 и остаток 2.Это показывает на место где стоит нужная нам цифра и эта цифра 9.

Задача 18. Укажите какие-нибудь два двузначных числа A и B такие, что если A увеличить на B процентов, то получится тот же самый результат, что и если B уменьшить на A процентов.

Ответ: A=30, B=75 или A=25, B=50.

Задача 19. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, произведение цифр которого делится на сумму его цифр.

Ответ: 9876543210.

Решение. Т.к. различных цифр всего 10, а их сумма равна 45, то мы получаем делимость произведения различных цифр на 45, а это значит, что число должно делиться на 9 и на 5. В силу того, что число будет содержать 9, то делимость на 9 будет автоматически выполняться. Делимость на 5 обеспечивает окончание числа на 5 или 0. А дальше надо придумать пример, причём наибольший.

Задача 20. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Ответ: 99 чисел.

Решение. Самое маленькое число, представимое в виде произведения двух трёхзначных чисел, это $100 \cdot 100 = 10000$. Следующее такое число: $100 \cdot 101 = 10100$, поэтому числа 10001, 10002, ..., 10099 – неразложимые. Таким образом, указано 99 идущих подряд неразложимых пятизначных чисел. Больше, чем 99 неразложимых чисел идти подряд не может: каждое сотое пятизначное число оканчивается на два нуля, значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на 100.

30.07.2019.

Мероприятие – 3. Математическая абака.

Правила игры.

Математическая абака - это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая большую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач.

Каждой команде предлагается для решения 5 тем по 5 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 5-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный - 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы - 10 очков, второй - 20, ..., пятой - 50 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до 5*150=750 очков.)

Основные бонусы.

Каждая команда может заработать дополнительные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы ("бонус-горизонталь") - 50 очков
- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах ("бонус-вертикаль") - цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

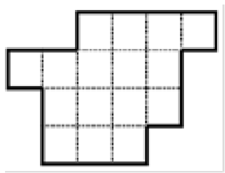
Окончание игры.

На решение задач отводится 90 минут. Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

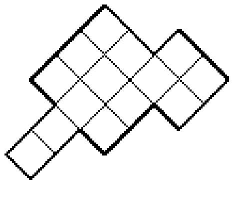
Математическая абака. Задания.

«Семь раз отмерь, один раз ОТРЕЖЬ!!!»

Задача 1. Разделите фигуру по линиям сетки на две равные части. Части могут быть повернуты или перевернуты. (Равные части – это части, совпадающие полностью при наложении друг на друга.)



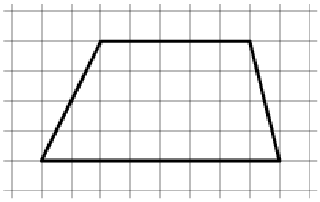
Задача 2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части.



Задача 3. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют

собой квадраты площади 1. Разрежьте эту коробку на 3 куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат площади 5.

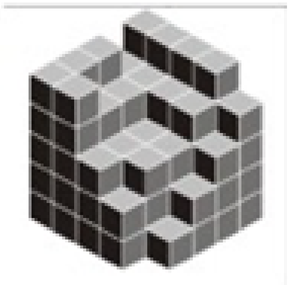
Задача 4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две такие части, из которых можно сложить треугольник. И докажите достоверность разрезания.



Задача 5. Разрежьте **произвольный** треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник. И докажите достоверность разрезания.

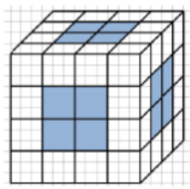
«Вот такие дела … — ТЕЛА!!!»

Задача 1. Из скольких маленьких кубиков состоит фигура на картинке?



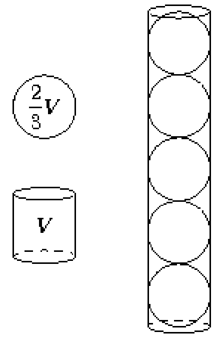
Задача 2. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Задача 3. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеили кубик $4 \times 4 \times 4$. Потом на трёх смежных гранях отметили средние квадраты 2×2 и выбили их насквозь. Найдите площадь поверхности оставшейся части кубика. Площадь каждой грани кубика равна 1.



Задача 4. Еще Архимед знал, что шар занимает ровно $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра).

В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.



Задача 5. Иван Александрович построил сруб, квадратный в основании, и собирается покрывать его крышей. Он выбирает между двумя крышами одинаковой высоты: двускатной и четырёхскатной (см. рисунки). На какую из этих крыш понадобится больше жести? Ответ необходимо обосновать.

<u>«Барабанные палочки? Нет… ПАРАЛЛеЛЬКИ!!!»</u>

Задача 1. Внешние углы треугольника *ABC* при вершинах *A* и *C* равны 115° и 140°. Прямая, параллельная прямой *AC* пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *M* и *N*. Найдите углы треугольника *BMN*.

Задача 2. Через вершину *B* треугольника *ABC* проведена прямая, параллельная прямой *AC*. Образовавшиеся при этом три угла с вершиной *B* относятся как 3:10:5. Найдите углы треугольника *ABC*.

Задача 3. В параллелограмме ABCD биссектрисы углов A и D пересекаются в точке S, лежащей на стороне BC. Известно, что сторона AB = $2\frac{9}{17}$ см. Найдите периметр параллелограмма ABCD.

Задача 4. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *M* и *N*, причём $MN \| AB$ и $MN = AM$. Найдите угол *BAN*, если $\angle B = 45°$ и $\angle C = 60°$.

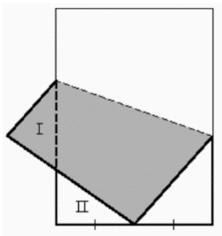
Задача 5. В трапеции $ABCD$ (AD – большее основание) диагональ AC перпендикулярна стороне CD и делит угол BAD пополам. Известно, что $\angle CDA = 60°$, а периметр трапеции равен 2. Найдите AD.

«ТРЕУГОЛЬНИчКИ – такие волшебные!!!»

Задача 1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB=BC$. Лучи BA и CD пересекаются в точке E, а лучи AD и BC – в точке F. Известно также, что $BE = BF$ и $\angle DEF = 25°$. Найдите угол EFD.

Задача 2. Даны такие точки A, B, C и D, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, $AE=DC$, $AD=BE$, $\angle ADC=\angle DEC$. Найдите длину EC.

Задача 3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рис.). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC сторона AC является основанием и боковая сторона AB равна 37см. Внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

Задача 5. Дан квадрат ABCD. Взяли некую точку F внутри квадрата так, что оказалось $\angle FAD = \angle FDA = 15°$. Найдите углы треугольника BFC.

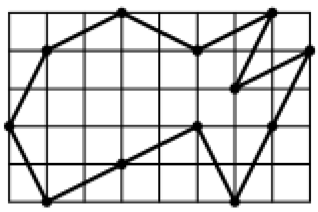
«ОтРезочки. Куда ты, тропинка, меня завела...»

Задача 1. Можно ли расположить на плоскости 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?

Задача 2. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?

Задача 3. Лист бумаги имеет форму круга. Можно ли провести на нем пять отрезков (разрезов), каждый из которых соединяет две точки на границе листа так, чтобы среди частей, на которые эти отрезки (разрезы) делят лист, нашлись пятиугольник и два четырехугольника?

Задача 4. Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображён пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.

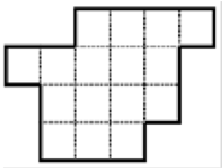


Задача 5. Какое наибольшее количество точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, в которой 7 звеньев?

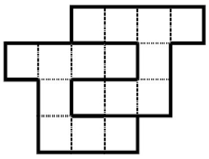
Математическая карусель. Ответы и указания к решениям.

<u>«Семь раз отмерь, один раз ОТРЕЖЬ!!!»</u>

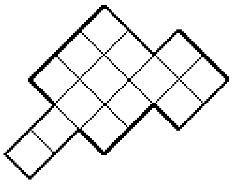
Задача 1. Разделите фигуру по линиям сетки на две равные части. Части могут быть повернуты или перевернуты. (Равные части – это части, совпадающие полностью при наложении друг на друга.)



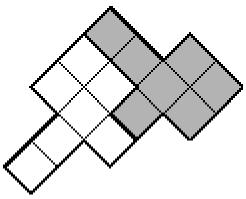
<u>Ответ.</u>



Задача 2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части.

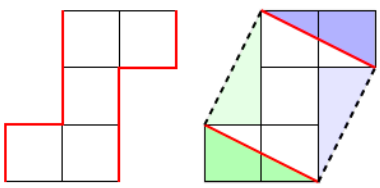


<u>Ответ:</u>



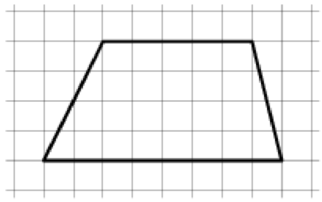
Задача 3. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты площади 1. Разрежьте эту коробку на 3 куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат площади 5.

<u>Ответ:</u>

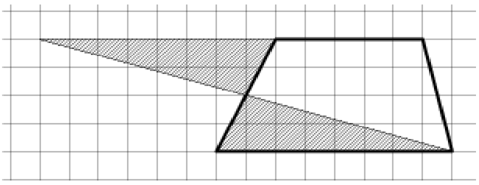


<u>Решение.</u> Сначала развернем коробку на плоскость, как показано на рисунке, сделав соответствующие разрезы. Потом отрежем два треугольника по красным линиям. Приставив их к оставшейся части, получаем нужный квадрат

Задача 4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две такие части, из которых можно сложить треугольник. И докажите достоверность разрезания.

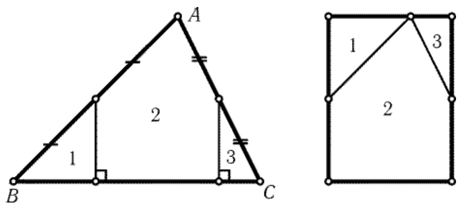


<u>Решение.</u> Разрезание должно проходить через вершину четырёхугольника и середину боковой стороны. Доказывается через равенство треугольников.



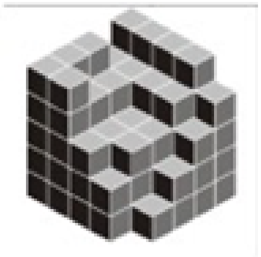
Задача 5. Разрежьте **<u>произвольный</u>** треугольник на 3 части и сложите из них прямоугольник. И докажите достоверность разрезания.

<u>Решение.</u> Разрезания должны проходить через середины двух сторон перпендикулярно к третьей стороны. Доказывается через равенство треугольников.



«Вот такие дела … — ТЕЛА!!!»

Задача 1. Из скольких маленьких кубиков состоит фигура на картинке?



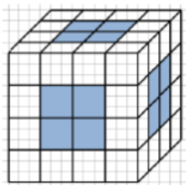
***Ответ*:** 91 кубик.

Задача 2. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Ответ: на 432 части.

Решение. Меридианы делят глобус на 24 части (дольки), а параллели делят каждую дольку на 17+1=18 частей. Всего $18 \cdot 24 = 432$ части.

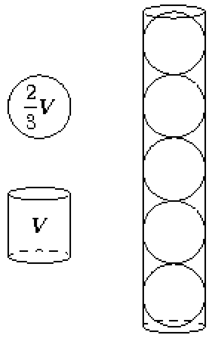
Задача 3. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеили кубик $4 \times 4 \times 4$. Потом на трёх смежных гранях отметили средние квадраты 2×2 и выбили их насквозь. Найдите площадь поверхности оставшейся части кубика. Площадь каждой грани кубика равна 1.



Ответ: 120.

Решение. Заметим, что останется «каркас» толщиной в один кубик. Посчитаем грани входящих в него кубиков. Возьмём угловые, их 8 штук и в каждом участвуют три грани (другие три грани участвуют в соединении), т.е они дают в сумму $8 \cdot 3=24$. Рассмотрим кубики которые соединяют угловые, каждые два образуют, так сказать, «ребро». В общей площади поверхности участвуют от каждого кубика 4 грани (2 уходят на соединение). Значит в общую сумму каждое «ребро» даёт 8, таких рёбер 12, значит $8 \cdot 12=96$. Следовательно, площадь поверхности «каркаса» будет равна 96 + 24 = 120.

Задача 4. Еще Архимед знал, что шар занимает ровно $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, в который он вписан (шар касается стенок, дна и крышки цилиндра). В цилиндрической упаковке находятся 5 стоящих друг на друге шаров. Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.



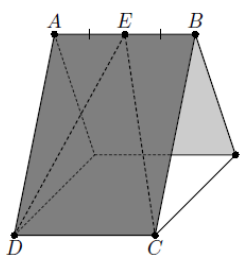
Ответ: **1:2.**

Решение. Разделим упаковку на 5 цилиндров, в каждый из которых вписан шар. В каждом из цилиндров отношение пустого места к занятому есть $\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$. Значит, и во всей упаковке это отношение такое же, 1:2.

Задача 5. Иван Александрович построил сруб, квадратный в основании, и собирается покрывать его крышей. Он выбирает между двумя крышами одинаковой высоты: двускатной и четырёхскатной (см. рисунки). На какую из этих крыш понадобится больше жести? Ответ необходимо обосновать.

Ответ: на обе крыши понадобится одинаковое количество жести.

Решение.



Рассмотрим один скат двускатной крыши – прямоугольник $ABCD$ (см. рисунок). Пусть E – середина AB, тогда E – вершина четырёхскатной крыши. "Отрежем" от ската двускатной крыши прямоугольные треугольники AED и BEC. Из них можно составить треугольник, равный треугольнику CDE и равный одному скату четырёхскатной крыши. Таким образом мы "перекроили" один скат двускатной крыши в два ската четырёхскатной, следовательно, на обе крыши понадобится одинаковое количество жести.

«Барабанные палочки? Нет… ПАРАЛЛеЛЬКИ!!!»

Задача 1. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140°. Прямая, параллельная прямой AC пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите углы треугольника BMN.

Ответ: 75°, 40°, 65°.

Задача 2. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AC. Образовавшиеся при этом три угла с вершиной B относятся как 3:10:5. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 30°, 100°, 50°.

Задача 3. В параллелограмме ABCD биссектрисы углов A и D пересекаются в точке S, лежащей на стороне BC. Известно, что сторона AB = $2\frac{9}{17}$ см. Найдите периметр параллелограмма ABCD.

Ответ: $15\frac{3}{17}$ см.

Задача 4. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N, причём $MN||AB$ и $MN=AM$. Найдите угол BAN, если $\angle B = 45°$ и $\angle C=60°$.

Ответ: 37,5°.

Задача 5. В трапеции ABCD (AD – большее основание) диагональ AC перпендикулярна стороне CD и делит угол BAD пополам. Известно, что ∠CDA = 60°, а периметр трапеции равен 2. Найдите AD.

Ответ: AD = $\frac{4}{5}$.

«ТРЕУГОЛЬНИчКИ – такие волшебные!!!»

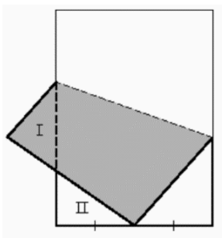
Задача 1. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* *AB*=*BC*. Лучи *BA* и *CD* пересекаются в точке *E*, а лучи *AD* и *BC* – в точке *F*. Известно также, что *BE* = *BF* и ∠*DEF* = 25°. Найдите угол *EFD*.

Ответ: 25°

Задача 2. Даны такие точки *A, B, C* и *D*, что отрезки *AC* и *BD* пересекаются в точке *E*. Отрезок *AE* на 1 см короче, чем отрезок *AB, AE*=*DC, AD*=*BE,* ∠*ADC* = ∠*DEC*. Найдите длину *EC*.

Ответ: 1

Задача 3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рис.). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



Ответ: 12

Задача 4. В равнобедренном треугольнике *ABC* сторона *AC* является основанием и боковая сторона *AB* равна 37см. Внешний угол при вершине *B* равен 60°. Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*.

Ответ: 18,5 см

Задача 5. Дан квадрат ABCD. Взяли некую точку *F* внутри квадрата так, что оказалось $\angle FAD = \angle FDA = 15°$. Найдите углы треугольника *BFC*.

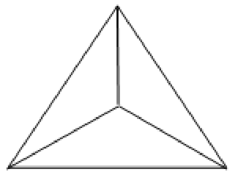
Ответ: все углы по 60°

«ОтРезочки. Куда ты, тропинка, меня завела...»

Задача 1. Можно ли расположить на плоскости 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?

Ответ: можно

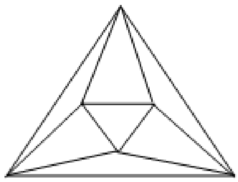
Решение.



Задача 2. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?

Ответ: можно

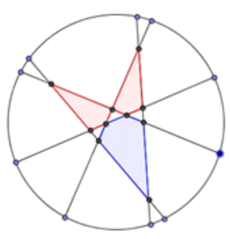
Решение.



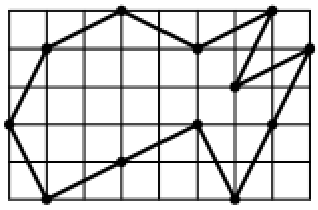
Задача 3. Лист бумаги имеет форму круга. Можно ли провести на нем пять отрезков (разрезов), каждый из которых соединяет две точки на границе листа так, чтобы среди частей, на которые эти отрезки (разрезы) делят лист, нашлись пятиугольник и два четырехугольника?

Ответ: можно

Решение. Например, см. рисунок. Два четырехугольника и пятиугольник выделены цветом.

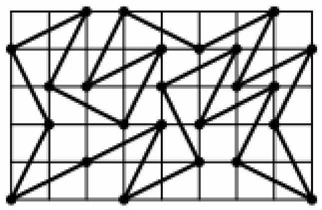


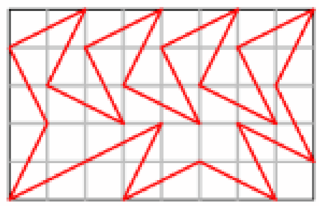
Задача 4. Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображён пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.



Ответ: можно

Решение.





Замечания. **1)** При первом взгляде может возникнуть подозрение, что путь длиннее 20 диагоналей нарисовать нельзя: "так как каждая диагональ занимает две клетки, всего их не больше $5\cdot8:2 = 20$". Но прямоугольники, "занимаемые" разными диагоналями, могут пересекаться. Именно поэтому в рисунке из ответа так много острых углов.

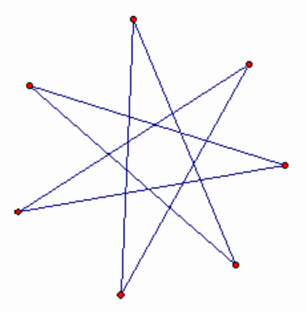
2) Любой путь, удовлетворяющий условию задачи, имеет чётную длину. Действительно, если мы покрасим узлы сетки в шахматном порядке (см. рис.), то каждая диагональ ("ход коня") соединяет узлы разных цветов; значит, чтобы закончить путь в том же узле, в котором он начинался, нужно сделать чётное число ходов.

3) В ответе приведён наиболее длинный известный замкнутый путь (24 диагонали). Есть ли более длинные пути, пока неясно.

Задача 5. Какое наибольшее количество точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, в которой 7 звеньев?

Ответ: 14 точек.

Решение. Рассмотрим звено AB этой ломаной. На отрезке AB могут находиться не более четырёх точек самопересечения, поскольку со звеньями, исходящими из вершин A и B, отрезок AB пересечься не может. Так как у ломаной 7 звеньев и в каждой точке пересекаются два звена, то точек самопересечения не больше чем $7 \cdot 4 : 2 = 14$. Пример ломаной, у которой 14 точек самопересечения, приведён на рисунке.



Приложение 2. Рекомендуемые статусные олимпиады для школьников.

1. Всесибирская открытая олимпиада школьников http://sesc.nsu.ru/vsesib/
2. Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба» https://olymp.hse.ru/mmo
3. Самарская математическая олимпиада http://sammat.ru/
4. Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» https://zv.susu.ru/
5. Московская олимпиада школьников http://mos.olimpiada.ru/
6. Объединённая международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» https://www.formulo.org/ru/
7. Олимпиада «Курчатов» (в системе «СТАТГРАД», в школах есть) http://olimpiadakurchatov.ru/
8. Олимпиада школьников «Ломоносов» http://olymp.msu.ru/
9. Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!» https://pvg.mk.ru/
10. Олимпиада школьников «Физтех» https://olymp.mipt.ru/
11. Олимпиада школьников Санкт-Петербургского государственного университета http://olympiada.spbu.ru/
12. Олимпиада Юношеской математической школы http://yumsh.ru/cms/yumsh-olymp
13. Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» https://mephi.ru/entrant/olimpiads/rosatom/
14. Турнир Городов https://www.turgor.ru/
15. Турнир имени М.В.Ломоносова http://turlom.olimpiada.ru/
16. Межрегиональная олимпиада «Менделеев» https://olymp.utmn.ru/
17. Олимпиада имени Л.Эйлера. http://www.matol.ru/

Приложение 3. Рекомендуемые социальные группы и сайты.

1. Учебно-научная школа ТюмГУ. https://vk.com/sessia_utmn?_smt=groups_list%3A1
2. Физико-математическая школа https://fmschool72.ru/ https://vk.com/fmschool72
3. Школа одаренных ТюмГУ https://vk.com/shkola_tgu
4. Заочная Учебно-научная школа ТюмГУ http://kd.utmn.ru/
5. Бонусная карта ТюмГУ https://vk.com/bonus_card_utmn
6. Региональный центр по работе с талантами «Новое поколение» https://vk.com/newgen72
7. Московский центр непрерывного математического образования https://mccme.ru/
8. Малый мехмат МГУ http://mmmf.msu.ru/