Смирнова Ирина Михайловна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Сайты: vasmirnov.ru, emmom.ru

Важность геометрии для науки

На протяжении всей истории человечества геометрия служила источником развития не только математики, но и многих других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии.

Многие геометрические проблемы способствовали появлению новых научных направлений. Наоборот, решение многих научных проблем получено с использованием геометрических методов.

Вообще современная наука и её приложения немыслимы без геометрии и её разделов, таких как топология, теория графов, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, компьютерная геометрия и др.

Появление информационных технологий не только не снижает, но и усиливает роль геометрии, поскольку при этом существенно расширяются возможности графического представления материала, компьютерного моделирования.

Важность геометрии для образования

Известен вклад, который вносит геометрия в развитие пространственного воображения и логического мышления школьников.

Н.Ф. Четверухин подчёркивал важность развития пространственных представлений для всех учащихся вне зависимости от направления их дальнейшего образования и выбора будущей профессии. «Хорошее пространственное воображение нужно конструктору, создающему новые машины, геологу, разведывающему недра земли, архитектору, сооружающему здания современных городов, хирургу, производящему тончайшие операции среди кровеносных сосудов и нервных волокон, скульптору, художнику и т.д.».

А.Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии, указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга».

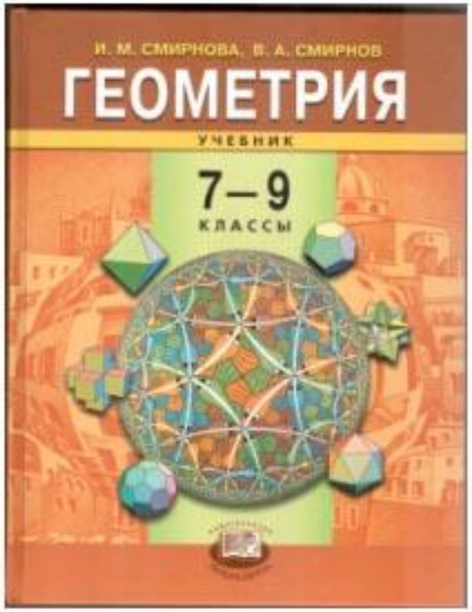
В.Г. Болтянский говорил о том, что природа геометрии предоставляет богатые возможности для воспитания у школьников эстетического чувства красоты в самом широком значении этого слова. Красота геометрии заключается в её проявлениях в живой природе, архитектуре, живописи, декоративно-прикладном искусстве, строительстве и т.д., а также в смелых, оригинальных, нестандартных доказательствах, выводах и решениях.

Опыт обучения геометрии

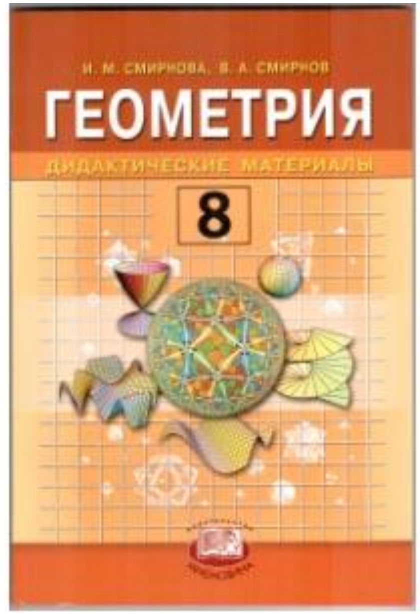
Отечественной школой накоплен уникальный опыт преподавания геометрии. Учебник по геометрии А.П. Киселёва под редакцией Н.А. Глаголева на протяжении десятилетий оставался образцом строгости, чёткости и доступности изложения геометрии.

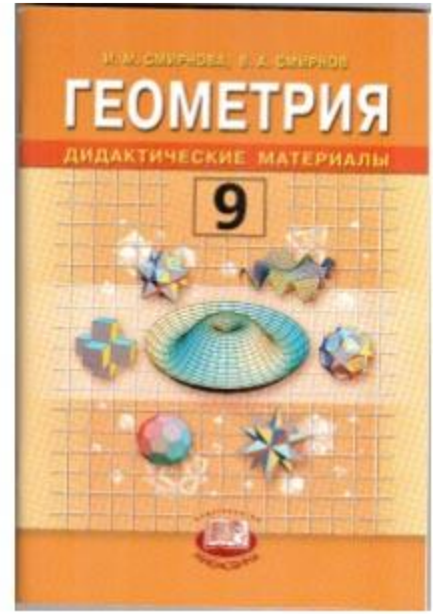
Сегодня задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, используя интернет-ресурсы и компьютерные средства, сделать обучение геометрии современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, её месте и роли в современном мире.

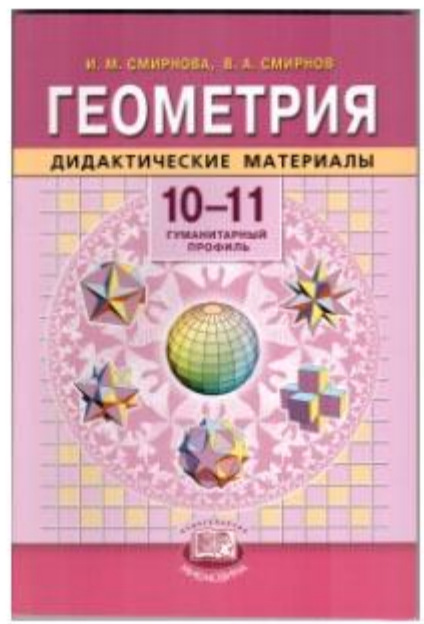
Наши учебники издательства «Мнемозина»



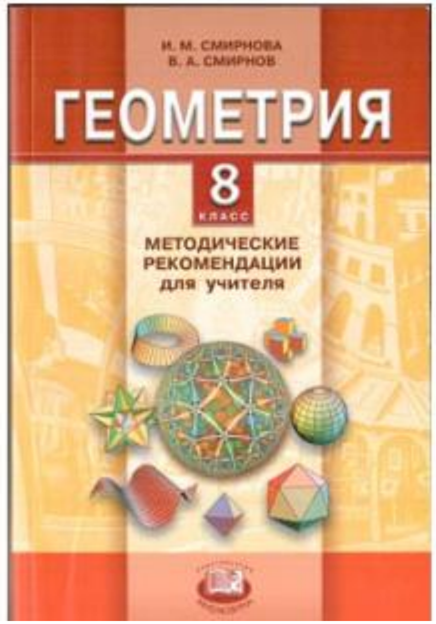
Дидактические материалы

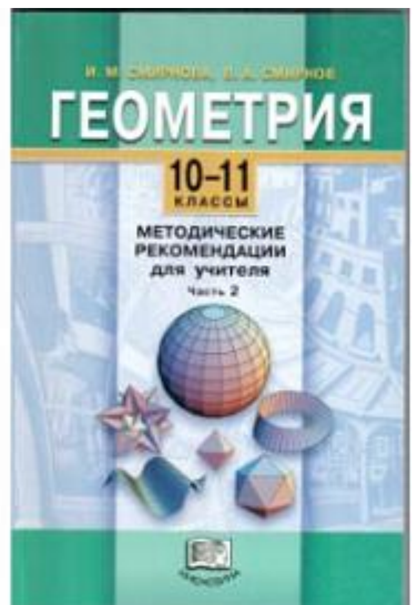






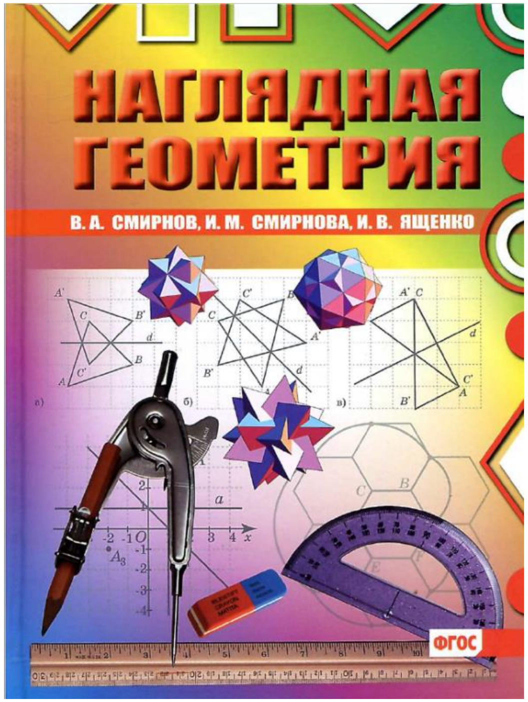
Методические рекомендации





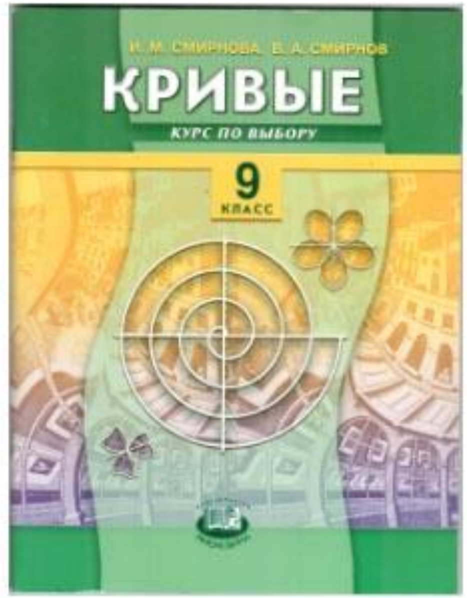
Рабочие тетради для 7-9 и 10-11 классов

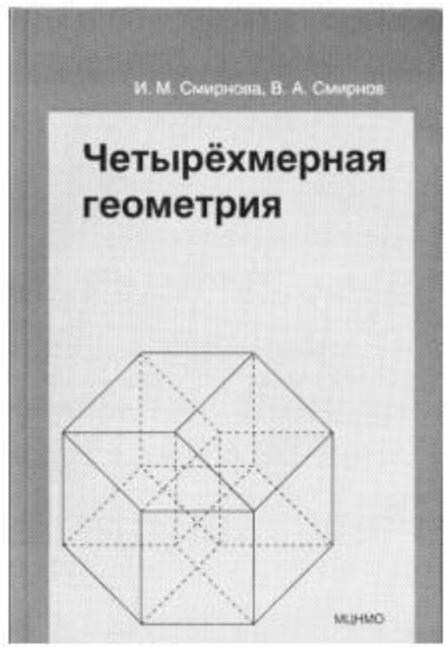
Наглядная геометрия



Дополнительные сборники задач

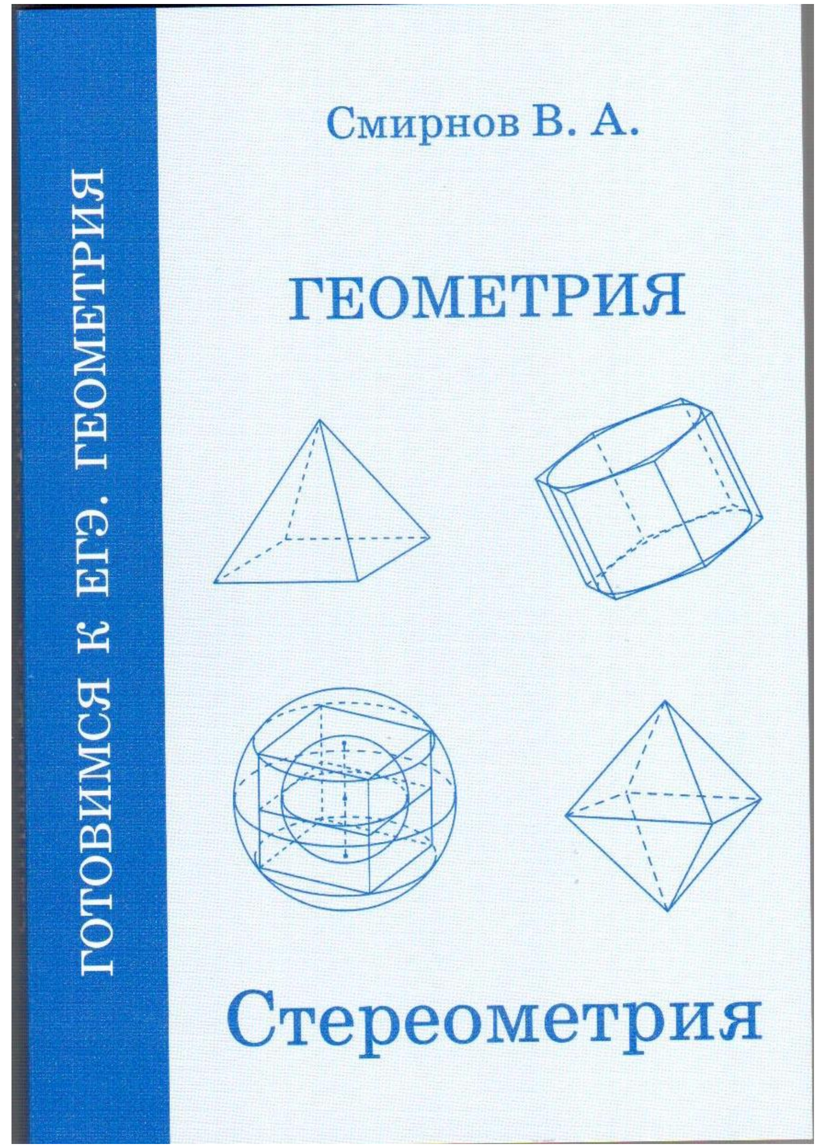
Курсы по выбору и элективные курсы





Рабочие тетради для подготовки к ГИА в 7 – 9 классах

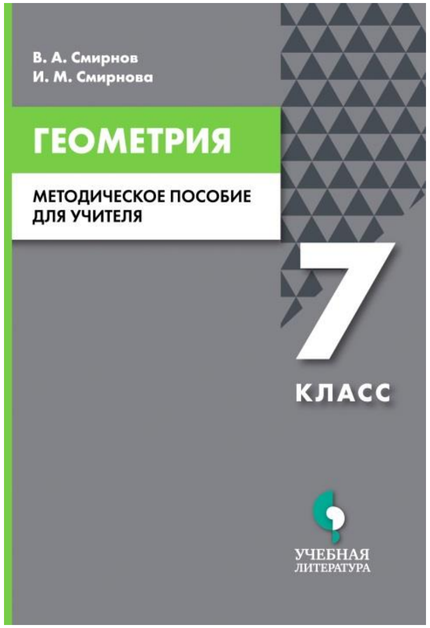
Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

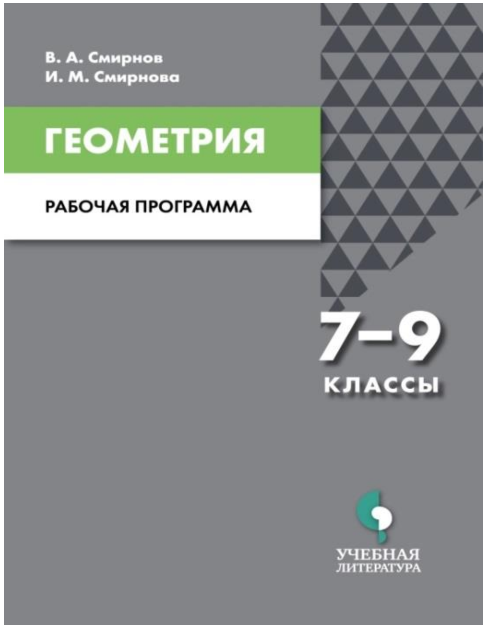


Пособия для подготовки к ЕГЭ

Наши новые учебники издательства «Бином»

Методические пособия





Некоторые наши статьи о преподавании геометрии в 7-9 классах (имеются pdf-файлы)

1. Абсолютная геометрия.
2. Автоподобные фигуры.
3. Аксиоматика элементарной геометрии.
4. Алгебраические операции над отрезками и углами.
6. Вписанные и описанные многоугольники.
7. Еще одно доказательство теоремы Пифагора.
8. Задачи с практическим содержанием, как средство развития геометрических представлений учащихся.
9. Измерение длин отрезков.
10. Как научить школьников решать задачи по геометрии.
11. Какой быть геометрии в ГИА и ЕГЭ по математике?
12. Кривые, как геометрические места точек.
13. Кривые, как траектории движения точек.
14. О развитии критического мышления учащихся при обучении геометрии.
15. О новой концепции обучения геометрии в школе.
16. О сумме углов звёздчатых многоугольников.
17. Построения на клетчатой бумаге.
18. Проектное обучение математике на примере темы «Окружность Эйлера».
19. Теорема о пропорциональных отрезках.
20. Учебник, или результаты обучения.

Некоторые наши статьи о преподавании геометрии в 10-11 классах (имеются pdf-файлы)

1. Вписанные и описанные фигуры в пространстве.
2. Задачи на нахождение кратчайших путей на поверхностях.
3. Задачи на нахождение объёмов многогранников, развивающие пространственные представления учащихся.
4. Задачи на распознавание пространственных фигур.
5. Задачи на распознавание сечений многогранников.
6. Заполнение пространства многогранниками.
7. Измерение многогранных углов.
8. Изображение пространственных фигур в центральной проекции.
9. Использование принципа Кавальери для нахождения объёмов пространственных фигур.
10. Каскады и правильных многогранников.
11. Об определениях параллелепипеда и призмы.
12. Полувписанные сферы.
13. Построения на изображениях пространственных фигур.
14. Развитие пространственных представлений старшеклассников при изучении темы «Поворот. Фигуры вращения».
15. Задачи на распознавание сечений многогранников.

Авторский сайт

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи о преподавании геометрии

Видеолекции и вебинары Подготовка к ГИА Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Особенности УМК по геометрии И.М. Смирновой и В.А. Смирнова

1. Преемственность. Опора на традиции отечественного геометрического образования, заложенные еще в учебнике А.П. Киселева.

2. Наглядность. Развитие геометрических представлений. Наличие большого числа рисунков, заданий на изображение геометрических фигур, проведение дополнительных построений.

3. Научность. Развитие логического мышления. Наличие большого числа задач на доказательство.

4. Доступность. Учёт возрастных и индивидуальных особенностей учащихся.

5. Систематичность и последовательность. Опора последующего материала на предыдущий. Расположение материала от частного к общему, от простого к сложному.

6. Практическая направленность. Наличие примеров и задач с практическим содержанием.

7. Ориентация на достижение результатов обучения, подготовку к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

8. Наличие дополнительного научно-популярного материала (со звёздочкой), для привлечение школьников к исследовательской и проектной деятельностям

9. Наличие презентаций, методических пособий, дополнительных сборников задач в открытом доступе.

7 класс

Результаты обучения в 7-м классе

После обучения геометрии в 7-м классе учащиеся должны научиться решать задачи:

1) на изображение геометрических фигур, проведение дополнительных построений;

2) на доказательство, используя признаки равенства треугольников и соотношения между сторонами и углами треугольника;

3) на нахождение геометрических мест точек;

4) на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки;

5) на нахождение углов, связанных с треугольником и выпуклым многоугольником.

6)* на моделирование геометрических фигур и проведение дополнительных построений с помощью компьютерной программы GeoGebra.

Аксиомы

Через любые две точки проходит единственная прямая.

Каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки.

На любом луче от его начала можно отложить только один отрезок, равный данному.

Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Изображение и построение

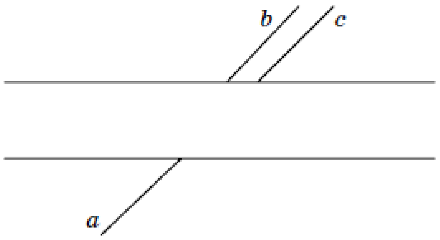


Рис. 2.8

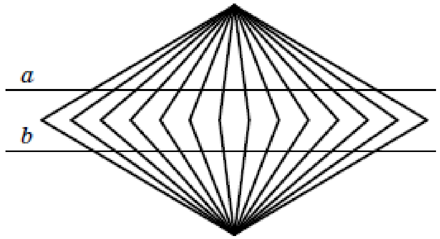


Рис. 2.9

9. Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой?

10. Не используя линейку, скажите, какие две линии на рисунке 2.8, a и b или a и c, изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

11. Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b, изображённые на рисунке 2.9, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

12. Являются ли отрезками линии, соединяющие точки A и B, B и C, C и D, A и D (рис. 4.8)?

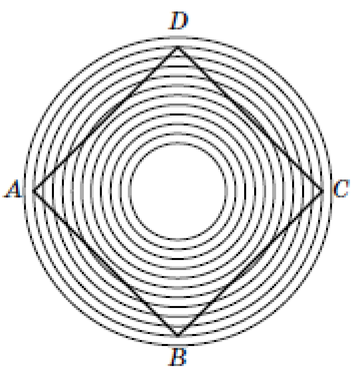


Рис. 4.8

7. На клетчатой бумаге изобразите прямую AB и точку C, как показано на рисунке 3.4. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB.

8. Укажите прямые, изображённые на рисунке 3.5: а) пересекающие прямую a; б) параллельные прямой a.

9. Пересекаются ли прямые: а) a и e; б) c и h, изображённые на рисунке 3.5?

10. Изобразите точку пересечения прямых: а) a и b; б) a и c; в) b и c (рис. 3.6).

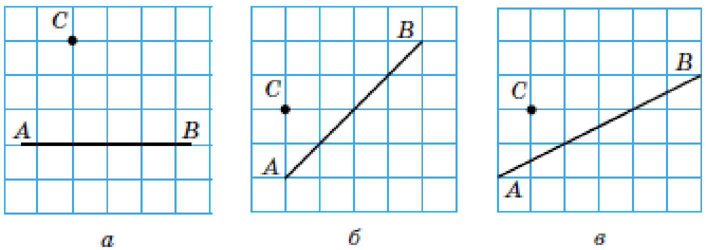


Рис. 3.4

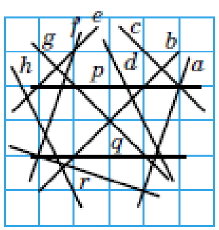


Рис. 3.5

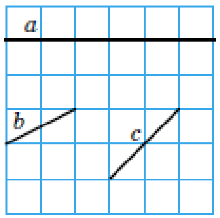
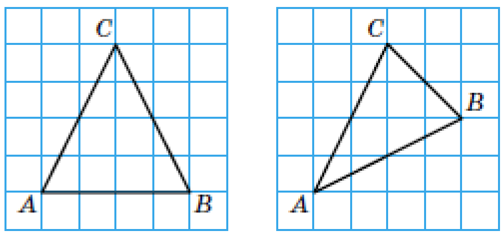


Рис. 3.6

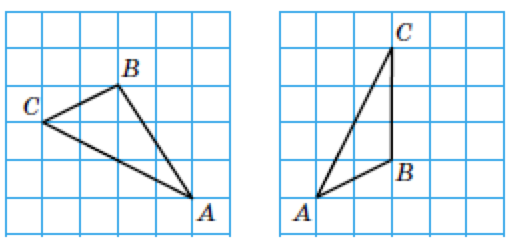
3. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник ABC (рис. 12.3) и изобразите его медианы.



а *б*

Рис. 12.3

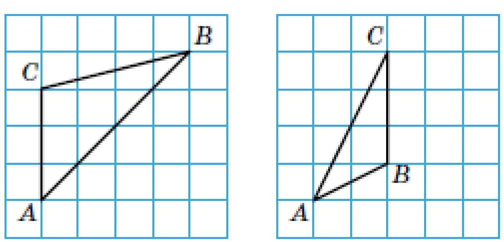
4. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник ABC (рис. 12.4) и изобразите его биссектрису: а) CD; б) AD.



а *б*

Рис. 12.4

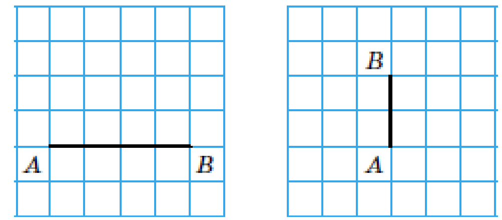
5. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник ABC (рис. 12.5) и изобразите его высоту: а) CH; б) AH.



а *б*

Рис. 12.5

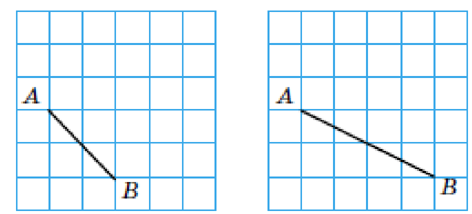
1. Изобразите какой-нибудь равнобедренный треугольник, основанием которого является отрезок AB, а вершина C находится в одном из узлов сетки (рис. 15.3).



а *б*

Рис. 15.3

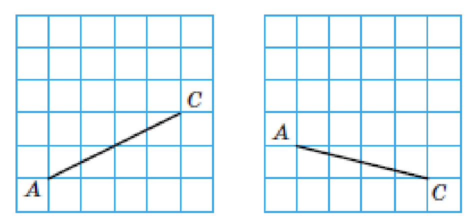
2. Изобразите какой-нибудь равнобедренный треугольник, боковой стороной которого является отрезок AB, а вершина C находится в одном из узлов сетки (рис. 15.4).



а *б*

Рис. 15.4

3. Изобразите какой-нибудь равнобедренный прямоугольный треугольник, одной стороной которого является отрезок AB, а вершина C находится в одном из узлов сетки (рис. 15.5).



а *б*

Рис. 15.5

Задачи на доказательство

Первый признак равенства треугольников

1. Равны ли треугольники, изображённые на рисунке 13.2, если $AB = DE$, $AC = EF$ и угол A равен углу E?

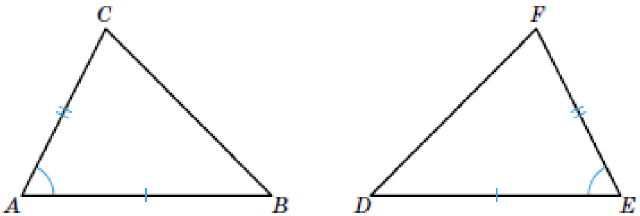


Рис. 13.2

2. Равны ли треугольники KLN и NMK, изображённые на рисунке 13.3, если $KL = NM$, $\angle 1 = \angle 2$?

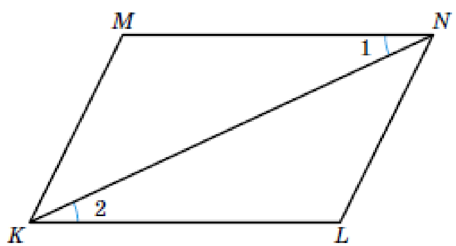


Рис. 13.3

3. На рисунке 13.3 $KL = NM = 4$ см, угол 1 равен углу 2, $KM = 3$ см. Найдите LN.

4. На рисунке 13.4 точка O — середина отрезков EF и GH. Есть ли на этом рисунке равные треугольники?

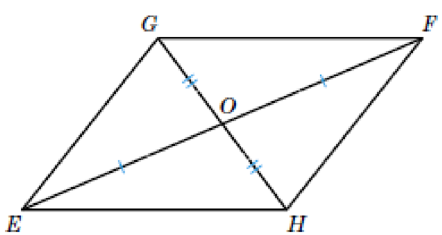


Рис. 13.4

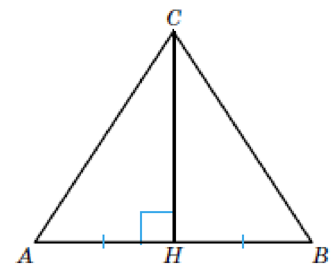


Рис. 13.5

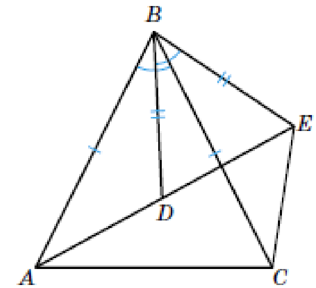


Рис. 13.6

5. Равны ли треугольники ACH и BCH, изображённые на рисунке 13.5, если $CH \perp AB$ и $AH = BH$?

6. На рисунке 13.5 CH перпендикулярна AB и $AH = BH = 2$ см, $AC = 5$ см. Найдите BC.

7. На рисунке 13.6 отмечены равные отрезки и равные углы. Найдите равные треугольники.

8. На рисунке 13.7 $AE = AD$, $AB = AC$. Докажите, что $BD = CE$.

9. На рисунке 13.8 $AB = AD$ и угол BAC равен углу DAC. Докажите, что $BC = DC$.

10. На сторонах угла AOB отложены равные отрезки OC и OD (рис. 13.9). Произвольная точка E биссектрисы этого угла соединена с точками C и D. Докажите, что $EC = ED$.

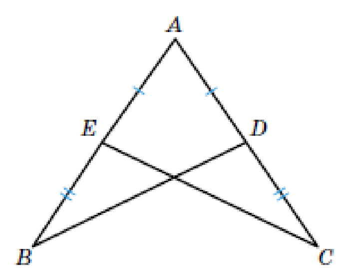


Рис. 13.7

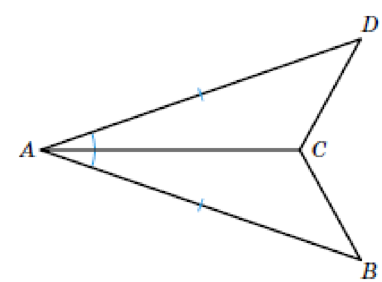


Рис. 13.8

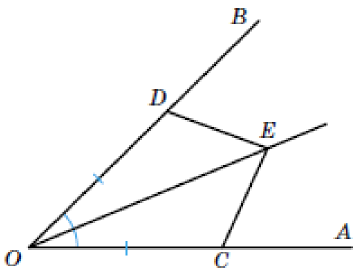


Рис. 13.9

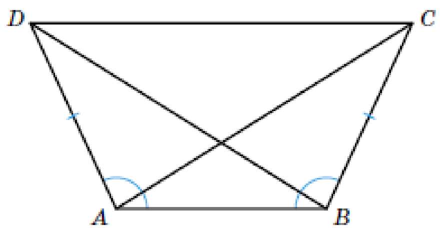


Рис. 13.10

11. На рисунке 13.10 угол A равен углу B, $AD = BC$. Докажите, что $AC = BD$.

12. На рисунке 13.11 точки A, B, C принадлежат одной прямой. Точки D_1 и D_2 лежат по разные стороны от этой прямой. Докажите, что если треугольники ABD_1 и ABD_2 равны, то треугольники BCD_1 и BCD_2 тоже равны.

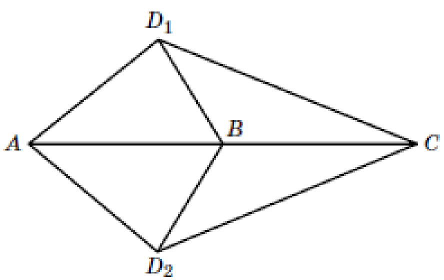


Рис. 13.11

13. Докажите, что в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны соответствующие медианы CM и C_1M_1 (рис. 13.12).

14. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 13.13), выбирают какую-нибудь точку C, для которой можно измерить расстояния AC и BC, и откладывают отрезки $CD = AC$ и $CE = BC$. Тогда расстояние между точками E и D будет равно искомому расстоянию. Объясните почему.

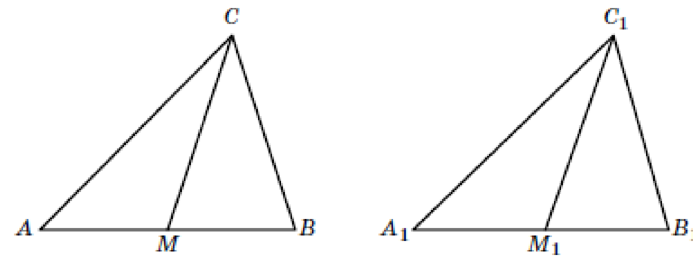


Рис. 13.12

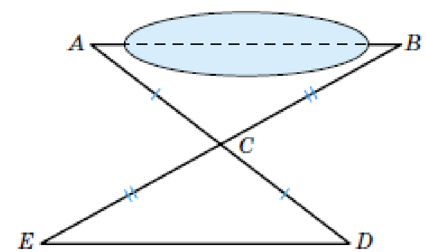


Рис. 13.13

14. Второй признак равенства треугольников

Докажем ещё один признак равенства треугольников.

Теорема (второй признак равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников

Доказательство. Пусть ABC и DEF — два треугольника, у которых $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ (рис. 14.1).

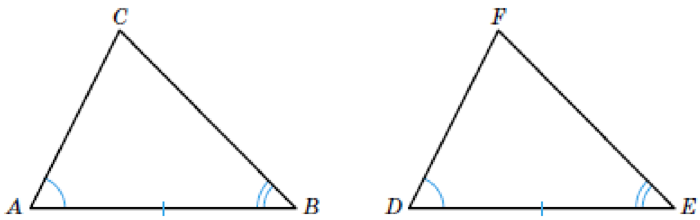


Рис. 14.1

Отложим угол BAC от луча DE в полуплоскости, определяемой вершиной F. При этом вершина A совместится с вершиной D. В силу равенства сторон AB и DE вершина B совместится с вершиной E. В силу равенства углов A и D, сторона AC пойдёт по стороне DF, и в силу равенства углов B и E сторона BC пойдёт по стороне EF. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником DEF. Следовательно, эти треугольники равны.

Вопросы

Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

Задачи

1. На рисунке 14.2 угол 1 равен углу 3, угол 2 равен углу 4. Будут ли треугольники CDA и ABC равны?
2. На рисунке 14.3, *а*, *б* угол 1 равен углу 2, угол 3 равен углу 4. Укажите равные отрезки.
4. На рисунке 14.4 $BC = CD$, угол B равен углу D. Докажите, что $AC = CE$.

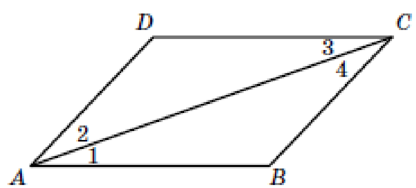


Рис. 14.2

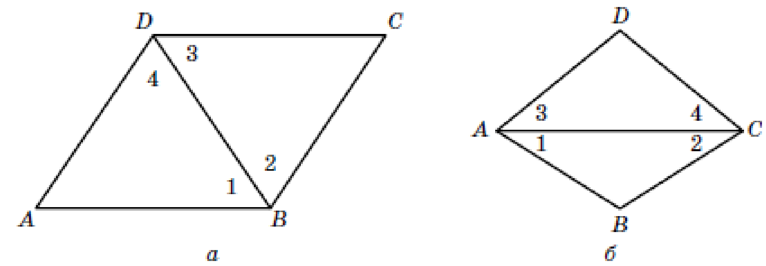


Рис. 14.3

5. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 14.5) угол 1 равен углу 2, угол 3 равен углу 4. Докажите, что $AB = AD$.
6. На рисунке 14.6 угол DBC равен углу DAC, $BO = AO$. Докажите, что угол C равен углу D и $AC = BD$.
7. На рисунке 14.7 изображена фигура, у которой $AD = CF$, угол BAC равен углу EDF, угол 1 равен углу 2. Докажите, что треугольники ABC и DEF равны.
8. На рисунке 14.8 отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $OB = OC$ и угол B равен углу C. Докажите равенство треугольников AOC и DOB.
9. На рисунке 14.9 отрезки AC и BD пересекаются в точке O, $AO = CO$ и угол A равен углу C. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

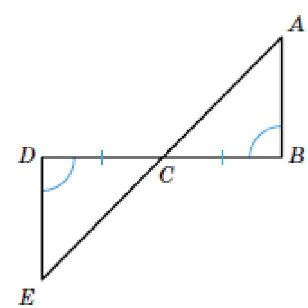


Рис. 14.4

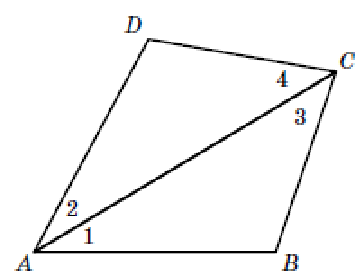


Рис. 14.5

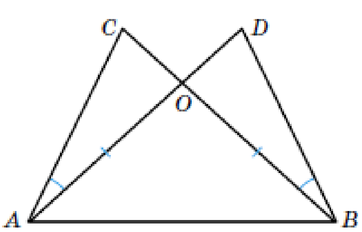


Рис. 14.6

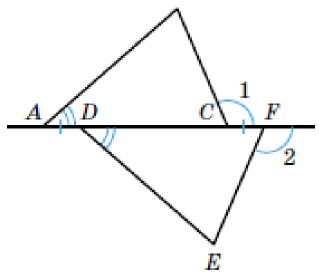


Рис. 14.7

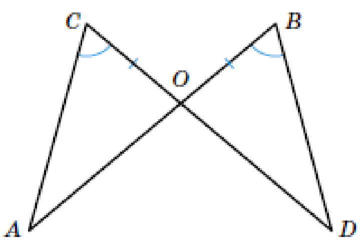


Рис. 14.8

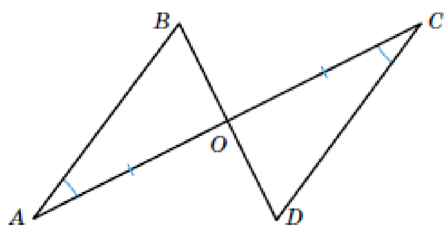


Рис. 14.9

10. На рисунке 14.10 лучи AD и BC пересекаются в точке O, угол 1 равен углу 2, $OC = OD$. Докажите, что угол A равен углу B.

11. На рисунке 14.11 прямые BF и DE перпендикулярны прямой AC, $AE = CF$ и угол BCA равен углу DAC. Найдите равные треугольники.

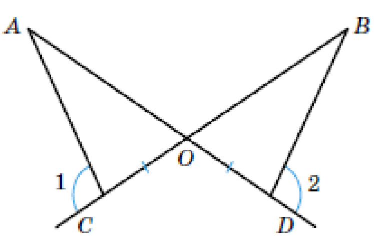


Рис. 14.10

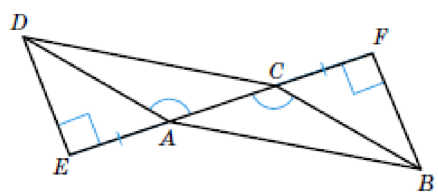


Рис. 14.11

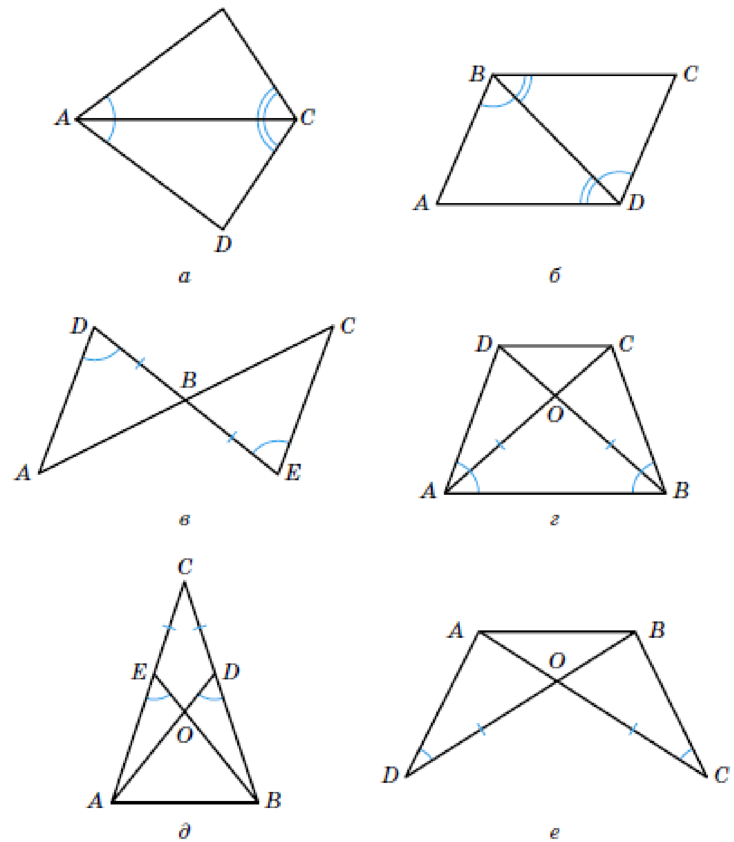


Рис. 14.12

3. На рисунках 14.12 отмечены равные отрезки и равные углы. Укажите равные треугольники.

12. На рисунке 14.13 треугольники ABC и DEF равны. Отрезки CG и FH образуют со сторонами соответственно CB и FE равные углы. Докажите, что $AG = DH$.

Третий признак равенства треугольников

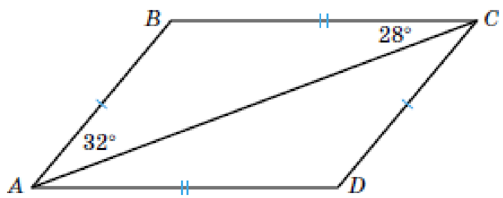


Рис. 17.5

4. На рисунке 17.6 $AB = BD$ и $AC = CD$, угол ABC равен 61°, угол ACB равен 59°. Найдите угол BCD.

5. На рисунке 17.7 $AB = AD$ и $DC = BC$. Докажите, что отрезок AC является биссектрисой угла BAD.

6. На рисунке 17.8 $AD = BC$ и $AC = BD$. Докажите, что угол BAD равен углу ABC.

7. На рисунке 17.9 $AB = BC$ и $AD = CD$. Докажите, что угол 1 равен углу 2.

8. На рисунке 17.10 $AD = CD$, $AO = OC$. Докажите, что $AB = BC$.

9. На рисунке 17.11 $AB = BC$, $AD = CD$. Докажите, что $AO = OC$.

10. На рисунке 17.12 треугольники ABC и CDA равны, причём точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Докажите, что треугольники BCD и DAB равны.

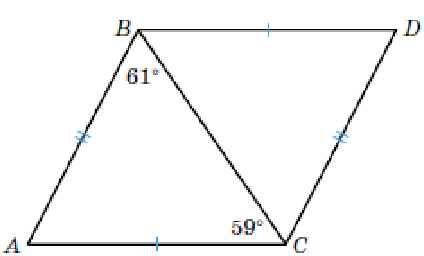


Рис. 17.6

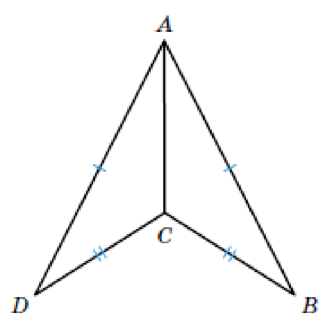


Рис. 17.7

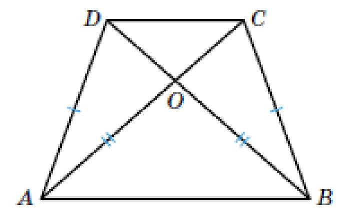


Рис. 17.8

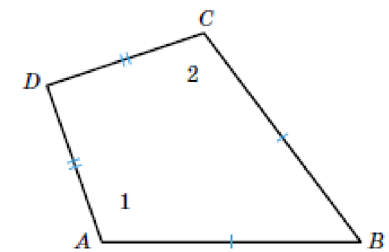


Рис. 17.9

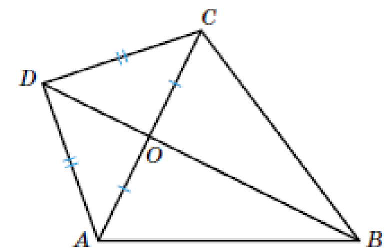


Рис. 17.10

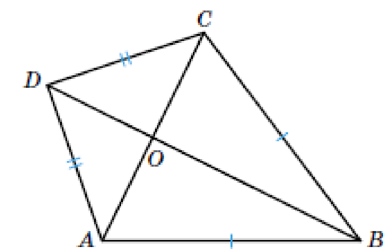


Рис. 17.11

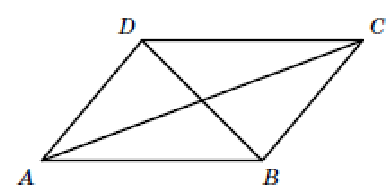


Рис. 17.12

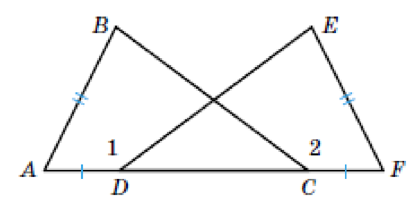


Рис. 17.13

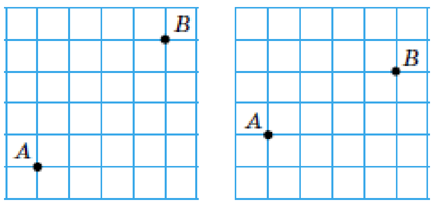
11. На рисунке 17.13 $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. Докажите, что угол 1 равен углу 2.

12. Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны (рис. 17.14), то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.

13. На рисунке 17.15 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что $\triangle ABE = \triangle CDF$.

Нахождение геометрических мест точек

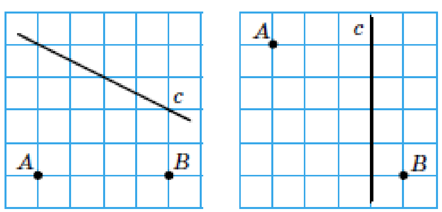
2. На клетчатой бумаге изобразите геометрическое место точек, равноудалённых от точек A и B (рис. 24.3).



а *б*

Рис. 24.3

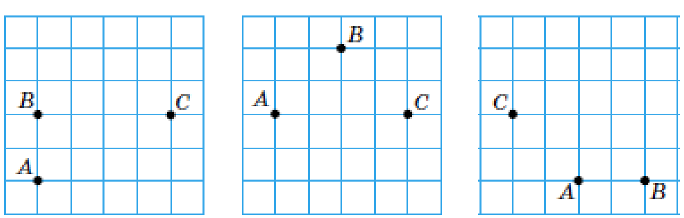
3. На прямой c изобразите точку C, равноудалённую от точек A и B (рис. 24.4).



а *б*

Рис. 24.4

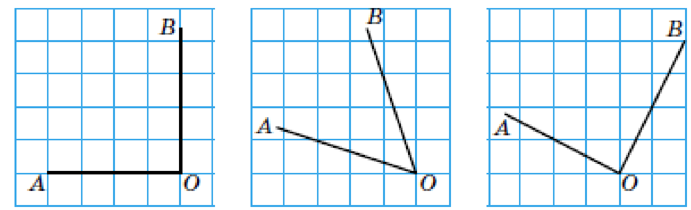
4. Отметьте точку, равноудалённую от точек A, B и C (24.5).



а *б* *в*

Рис. 24.5

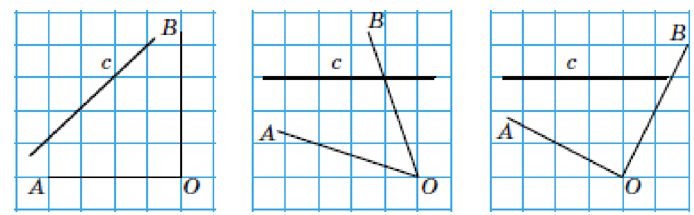
5. Изобразите геометрическое место внутренних точек угла AOB, равноудалённых от его сторон (рис. 24.6).



а *б* *в*

Рис. 24.6

6. На прямой c отметьте точку C, равноудалённую от сторон угла AOB (рис. 24.7).



а *б* *в*

Рис. 24.7

7. Изобразите геометрическое место центров окружностей радиуса 2, проходящих через данную точку A (рис. 24.8). Стороны клеток равны 1.

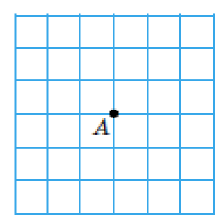


Рис. 24.8

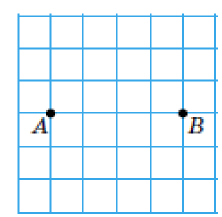


Рис. 24.9

8. Изобразите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B (рис. 24.9).

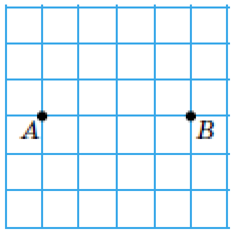
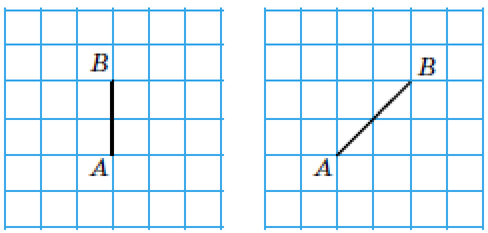


Рис. 24.9

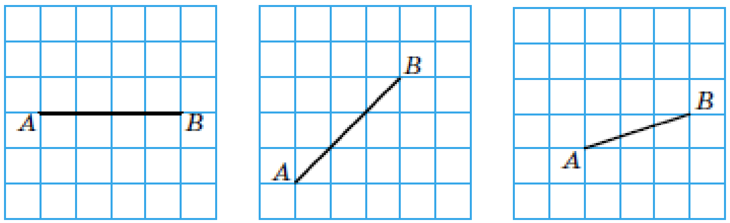
9. Изобразите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников ABC с данным основанием AB (рис. 24.10).



а *б*

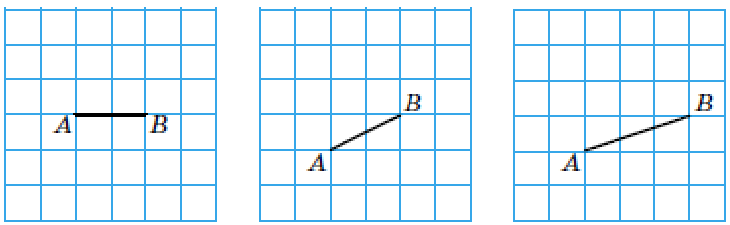
Рис. 24.10

14. Отметьте точки C, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 45°, т. е. угол ACB равен 45° (рис. 24.14).



а *б* *в*

Рис. 24.13



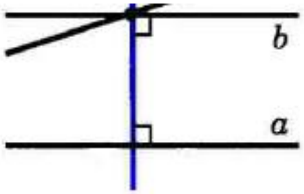
а *б* *в*

Рис. 24.14

Аксиома параллельных в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

Огромную роль в решении этого непростого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве еще одного из исходных положений мы принимаем **аксиому параллельных прямых.**



б)

Рис. 110 *Параллельные прямые*

61

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

В этой формулировке аксиомы параллельных имеется два недочета.

1. Неправильно писать «через точку, не лежащую на прямой». Нужно писать «через точку, не принадлежащую данной прямой».

2. Условие существования прямой, параллельной данной, содержащееся в формулировке, лишнее. Оно доказывается.

Аксиома параллельных в нашем учебнике 7 класса

Теорема (признак параллельности двух прямых). Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

Доказательство. Рассмотрим прямые a, b и прямую c, которая пересекает данные прямые соответственно в точках A, B и образует с этими прямыми равные накрест лежащие углы. Докажем, что прямые a и b параллельны. Если бы они пересекались в некоторой точке C (рис. 26.2), то внешний угол при вершине A треугольника ABC был бы равен внутреннему углу B.

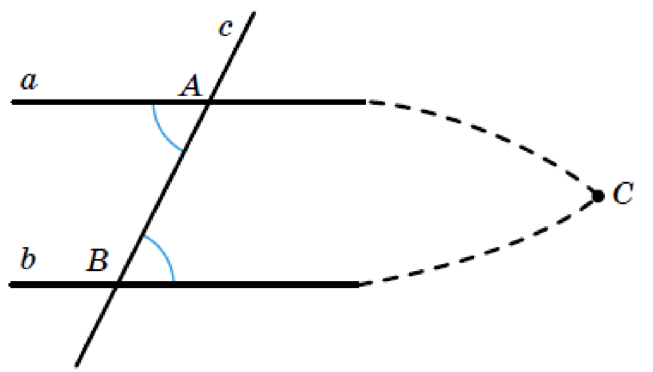


Рис. 26.2

Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Следовательно, прямые a и b не могут пересекаться, т. е. они параллельны.

Следующее свойство принимается за аксиому и называется ***аксиомой параллельных прямых***.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Сумма углов выпуклого многоугольника в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

40 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображенный на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдем их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ равна $(n-2)\cdot 180°$.

Итак, **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.**

Рис. 153

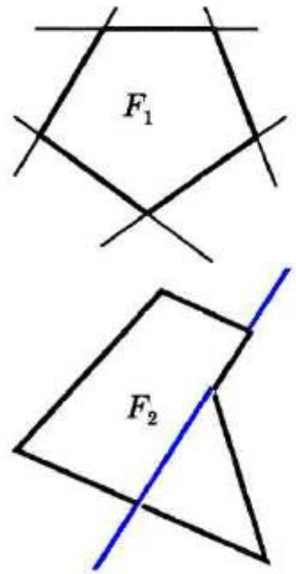
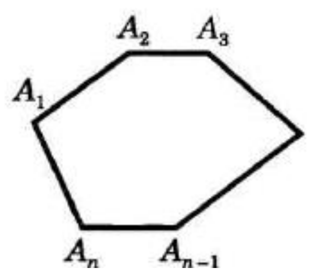


Рис. 154



Доказательство формулы суммы углов содержит существенный пробел, так как не использует выпуклость многоугольника.

Нужно доказывать, что диагональ выпуклого многоугольника разбивает его на два многоугольника.

С приведённым определением выпуклости это сделать довольно трудно.

Определение выпуклого многоугольника в нашем учебнике

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, который вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок (рис. 29.2).

На рисунке 29.3 изображены невыпуклые многоугольники.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины (рис. 29.4).

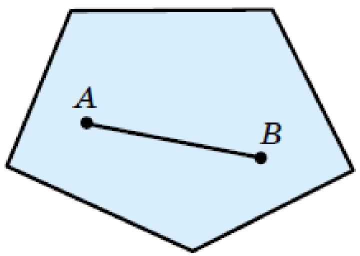
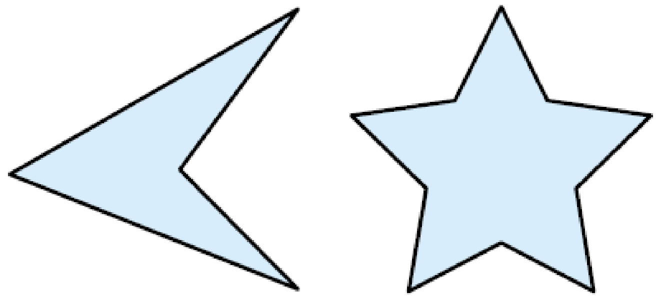


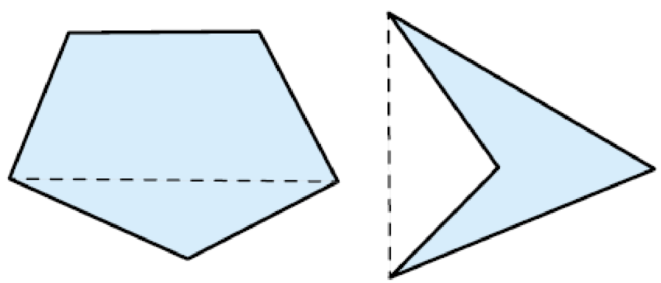
Рис. 29.2



а *б*

Рис. 29.3

Выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (см. рис. 29.4, *б*).



а *б*

Рис. 29.4

8 класс

Результаты обучения в 8-м классе

После обучения геометрии в 8-м классе учащиеся должны научиться решать задачи:

1) на изображение различных четырёхугольников, проведение дополнительных построений;

2) на доказательство, используя свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата;

3) на нахождение длин и отношений отрезков, используя теоремы о средней линии треугольника и трапеции, теоремы Фалеса и теоремы о пропорциональных отрезках;

4) на распознавание равенства и коллинеарности векторов; нахождение суммы и разности векторов, произведения вектора на число;

4) на нахождение углов, связанных с окружностью;

5) на построение центров окружностей, вписанных в треугольник и описанных около треугольника;

6) на распознавание вписанных и описанных четырёхугольников, нахождение их углов и сторон;

7) на установление элементов симметрии фигур на плоскости;

8) на нахождение площадей многоугольников;

9) на нахождение длин отрезков, используя теорему Пифагора;

10) на моделирование фигур и проведение дополнительных построений с помощью компьютерной программы GeoGebra.

Изображение

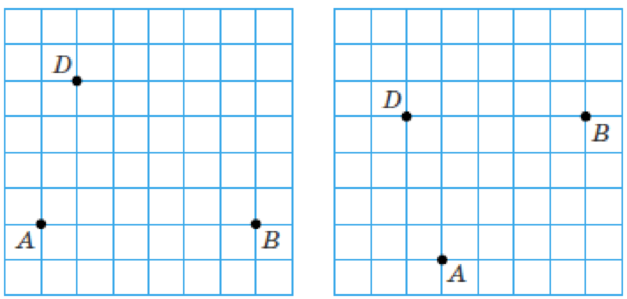
Задачи

1. Изобразите равнобедренную трапецию с тремя данными верш нами (рис. 6.6).

2. Изобразите прямоугольную трапецию с тремя данными вершинами (рис. 6.7).

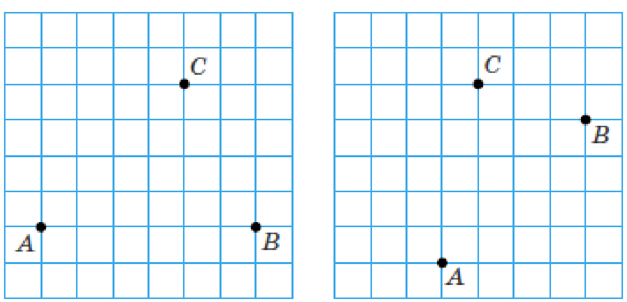
3. Определите вид четырёхугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.

6. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 см и 4 см. Найдите меньшее основание трапеции.



а *б*

Рис. 6.6

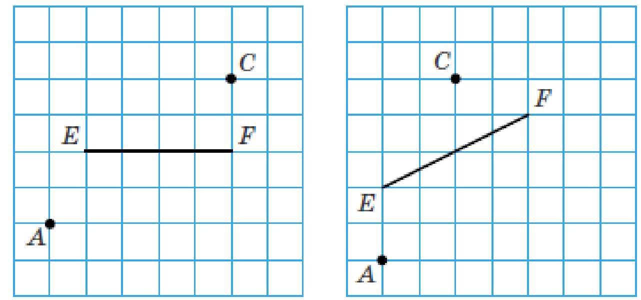


а *б*

Рис. 6.7

Задачи

1. Изобразите трапецию, если заданы две её вершины A, C и средняя линия EF (рис. 7.3).



а *б*

12. В треугольнике ABC сторона BC разделена на три равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC, равной 12. Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри треугольника (рис. 7.4).

13. Основания трапеции равны 7 и 10. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри трапеции (рис. 7.5).

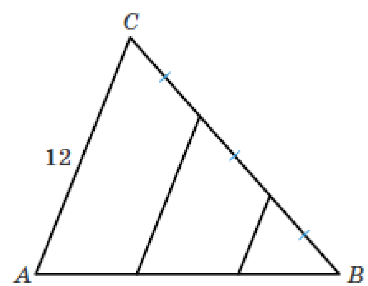


Рис. 7.4

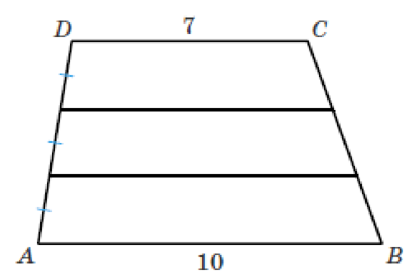


Рис. 7.5

Средняя линия треугольника в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства, — что $MN = \frac{1}{2}AC$. Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

Задача 1

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

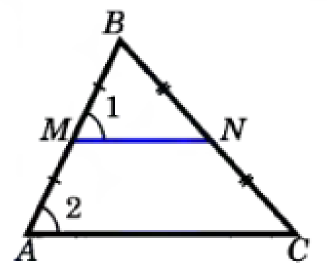


Рис. 195

Средняя линия треугольника в нашем учебнике 8 класса

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и его среднюю линию DE, соединяющую середины стороны AC и BC (рис. 5.2). Докажем, что отрезок DE параллелен стороне AB и равен её половине. Отложим на прямой DE отрезок $EF = DE$ и соединим отрезком точки B и F. Треугольники ECD и EBF равны по первому признаку равенства

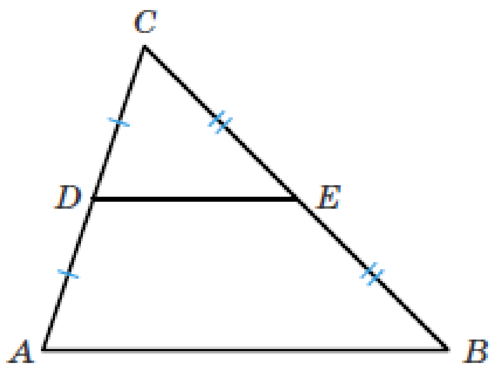


Рис. 5.1

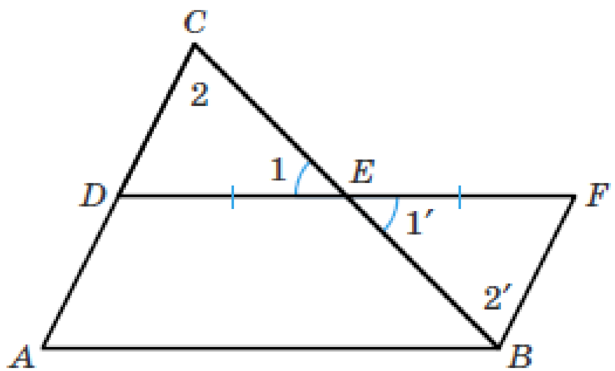


Рис. 5.2

треугольников ($CE = BE$ по условию, $DE = FE$ по построению, $\angle 1 = \angle 1'$ как вертикальные). Следовательно, $BF = CD$, значит, $BF = AD$. Так как угол 2 равен углу 2′, то прямые AC и BF параллельны. Таким образом, стороны AD и BF четырёхугольника $ABFD$ равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник — параллелограмм (по первому признаку параллелограмма). Значит, сторона AB параллельна и равна стороне DF. Средняя линия DE равна половине стороны DF и, следовательно, равна половине стороны AB.

Средняя линия трапеции в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 266). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим:
$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$. **Теорема доказана.**

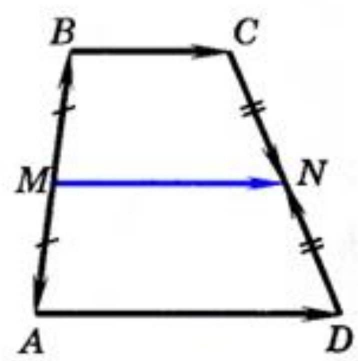


Рис. 266

Средняя линия трапеции в нашем учебнике 8 класса

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и её среднюю линию EF. Проведём прямую DF. Обозначим G её точку пересе-

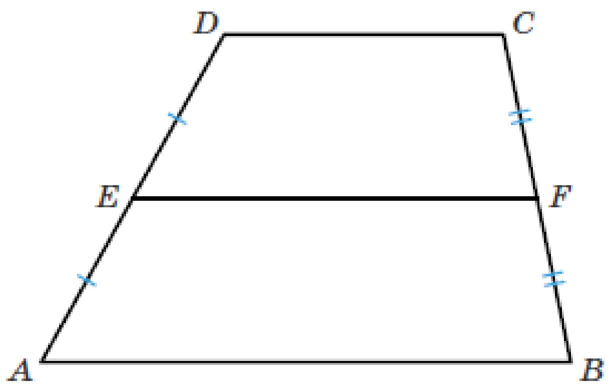


Рис. 7.1

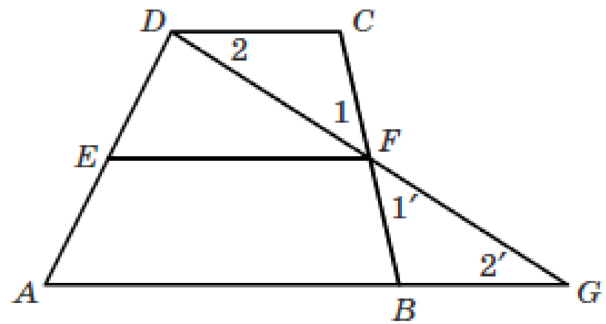


Рис. 7.2

чения с прямой AB (рис. 7.2). Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 1'$ как вертикальные, $\angle 2 = \angle 2'$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, CD и секущей DG). Из равенства этих треугольников следует, что равны отрезки DF и GF. Значит, EF — средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника получаем, что отрезок EF параллелен AB и равен половине отрезка AG. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок EF будет параллелен обоим основаниям трапеции. Так как отрезок AG равен сумме оснований трапеции, то отрезок EF будет равен полусумме оснований трапеции.

Теорема Фалеса в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

385 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать,

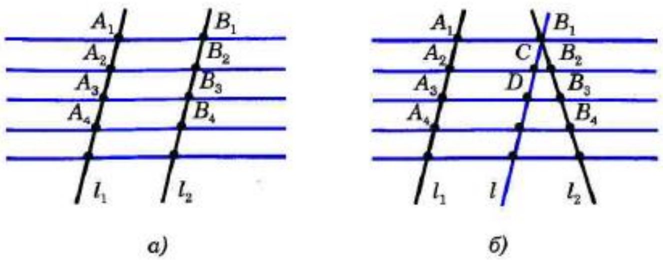


Рис. 165

что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то и $B_1B_2=B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то по доказанному $B_1C=CD$. Отсюда получаем $B_1B_2=B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3=B_3B_4$ и т. д.

Теорема Фалеса в нашем учебнике геометрии 8 класса

Теорема (Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Рассмотрим угол со сторонами a, b. Пусть три параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 (рис. 8.1).

Если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то A_2B_2 — средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$. Следовательно, равны и отрезки B_1B_2 и B_2B_3.

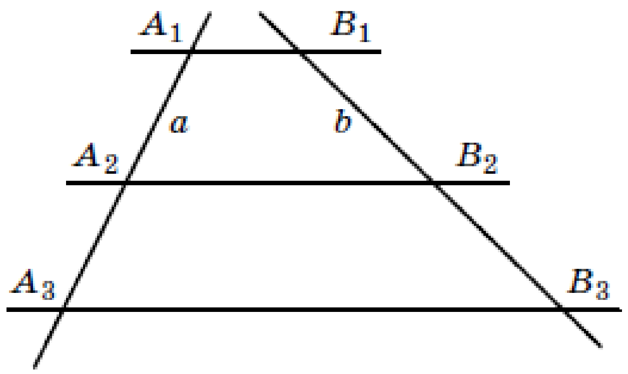


Рис. 8.1

Теорема о пропорциональных отрезках

Отношением двух отрезков AB и CD называется число, показывающее, сколько раз отрезок CD и его части укладываются в отрезке AB.

Теорема 4. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

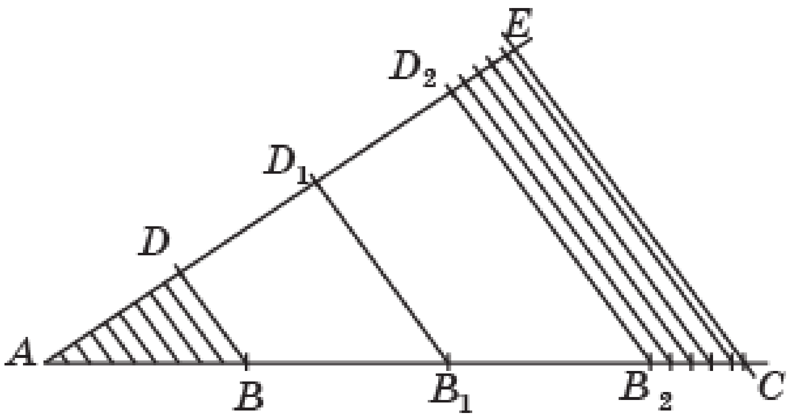
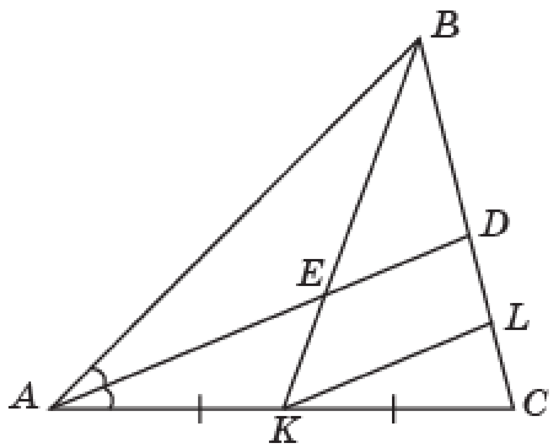


Рис. 8.3

Пример задачи из демоверсии ОГЭ

Задача. Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 3 : 2$. Найдите площадь четырёхугольника $CDEK$.

Решение. Через точку K проведём прямую, параллельную прямой AD, и обозначим L её точку пересечения со стороной BC треугольника ABC. Тогда отрезок KL является средней линией треугольника ADC, следовательно, $DL = LC$. Так как $BD : DC = 3 : 2$, то $BD : DL = 3 : 1$. Значит, $BE : EK = 3 : 1$. Таким образом, $BD = \frac{3}{5}BC$, $BE = \frac{3}{4}BK$. Площадь треугольника BCK равна половине площади треугольника ABC, т. е. равна 20. Площадь треугольника BDE равна $\frac{9}{20}$ площади треугольника BCK, т. е. равна 9. Следовательно, площадь четырёхугольника $CDEK$ равна 11.



Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F (рис. 8.7). Найдите отношение $DF : FB$. Найдите площадь треугольника ADF, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

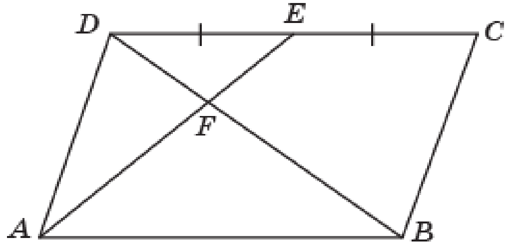
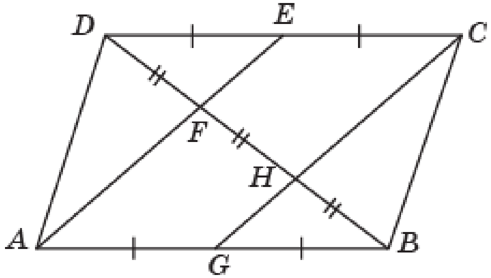


Рис. 8.7



2. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D, $AB = BD$. Через неё и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F (рис. 8.8). Найдите отношение $BF : FC$. Найдите площадь треугольника CEF, если площадь треугольника ABC равна 1.

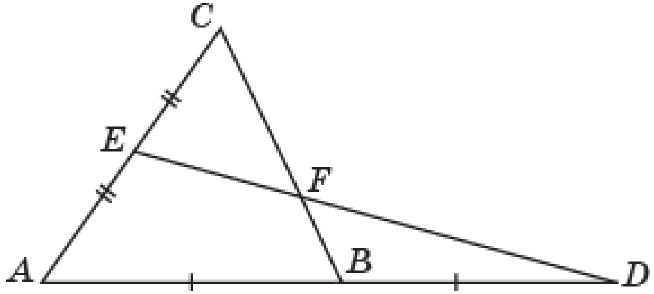


Рис. 8.8

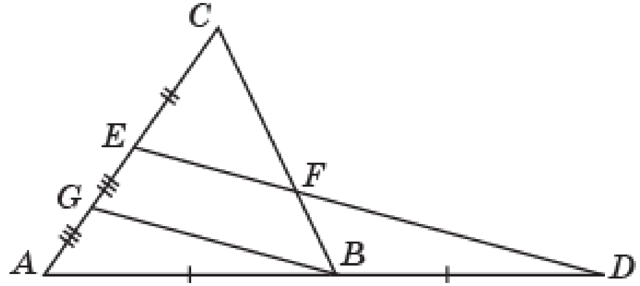
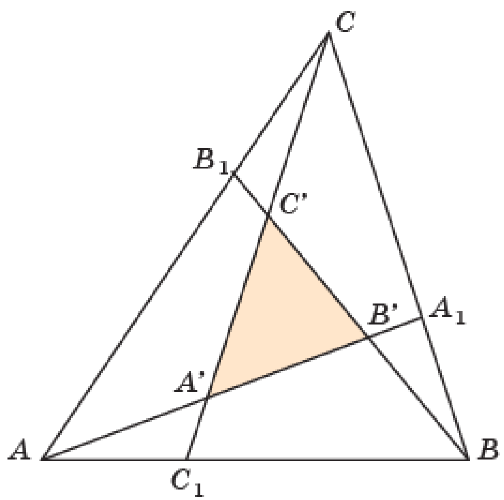


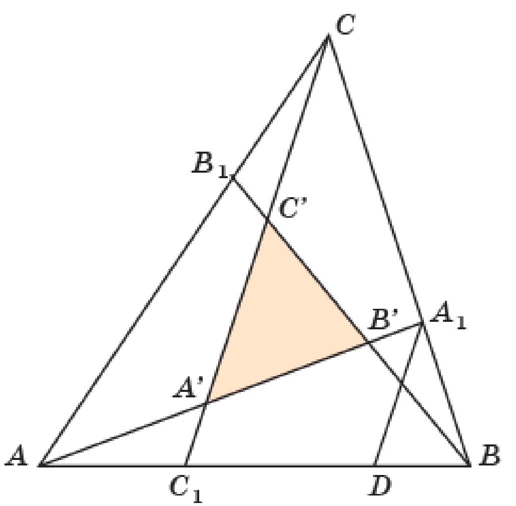
Рис. 8.8

5. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в отношении 1:2. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.



Решение. Площади треугольников AA_1B, BB_1C, CC_1A равны $\frac{1}{3}$. Найдём площадь треугольника $AA'C_1$. Через точку A_1 проведём прямую, параллельную прямой CC_1 и обозначим D её точку пересечения с отрезком AB.

Так как $BA_1 : A_1C = 1:2$, то $BD : DC_1 = 1:2$. Следовательно, $AC_1 : C_1D = 3 : 4$ и $AA' : AA_1 = 3 : 7$. Площадь треугольника $AA'C_1$ равна $\frac{1}{7}$ площади треугольника AA_1B и равна $\frac{1}{21}$.



Площади треугольников $BB'A_1$, $CC'B_1$ также равны $\frac{1}{21}$. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна площади треугольника ABC минус площади треугольников AA_1B, BB_1C, CC_1A плюс площади треугольников $AA'C_1$, $BB'A_1$, $CC'B_1$. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{1}{7}$.

Углы, связанные с окружностью

8. Найдите величину угла ABC (рис. 13.6).

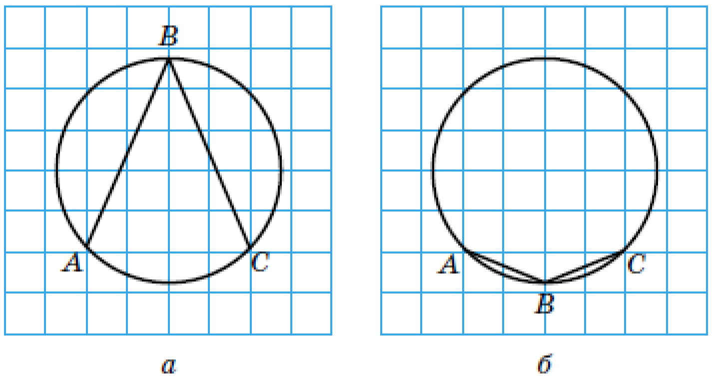


Рис. 13.6

9. Найдите величину угла ABC (рис. 13.7).

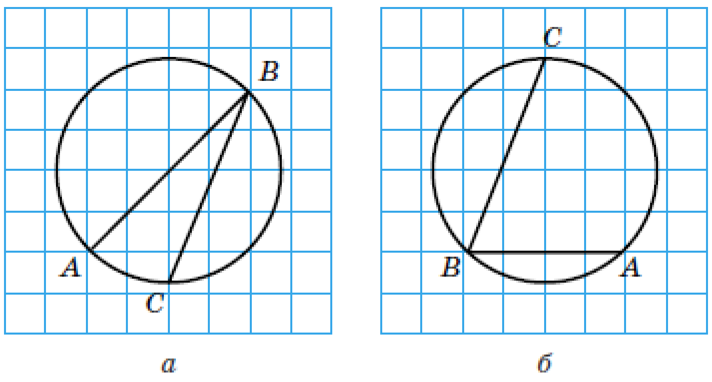
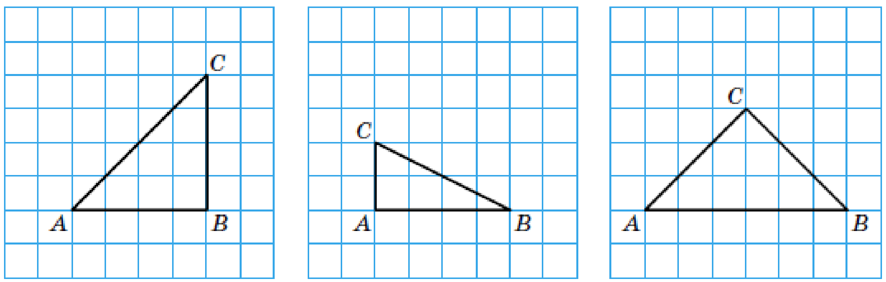


Рис. 13.7

Описанные окружности

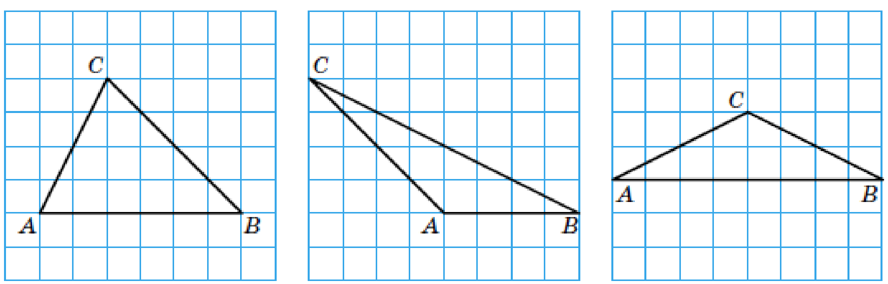
2. Для данных треугольников (рис. 14.4) изобразите центры описанных окружностей.

3. Для данных треугольников (рис. 14.5) изобразите центры описанных окружностей.



а *б* *в*

Рис. 14.4



а *б* *в*

Рис. 14.5

10. Укажите центр окружности, описанной около прямоугольника, изображённого на рисунке 15.6.

11. Укажите центр окружности, описанной около прямоугольника, изображённого на рисунке 15.7. Найдите радиус описанной около него окружности.

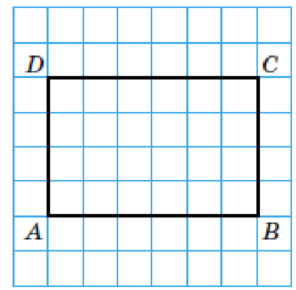


Рис. 15.6

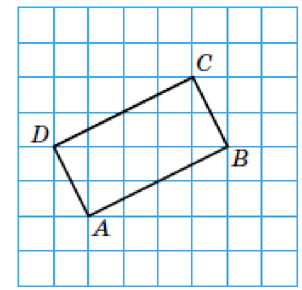
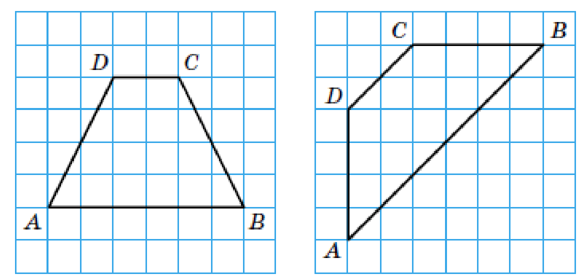


Рис. 15.7

14. Укажите центры окружностей, описанных около трапеций, изображённых на рисунке 15.8.

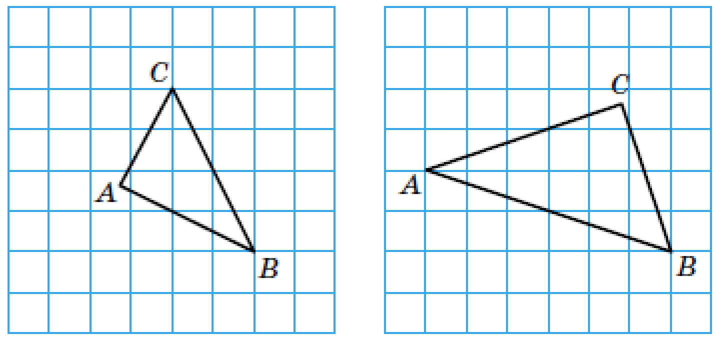


а *б*

Рис. 15.8

Вписанные окружности

1. Постройте центры окружностей, вписанных в треугольники, изображённые на рисунке 16.3.

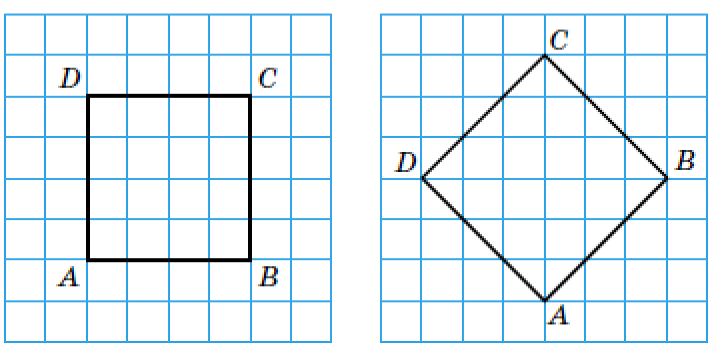


а *б*

Рис. 16.3

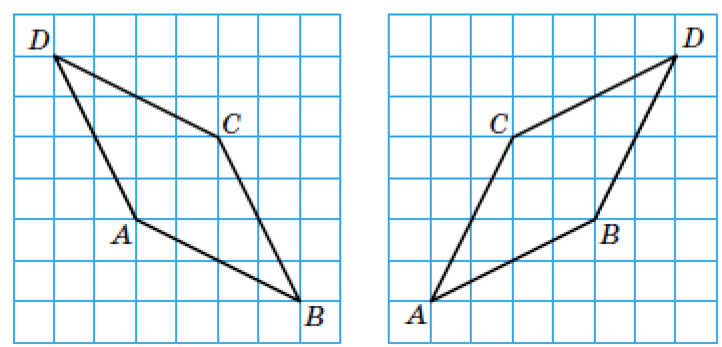
2. Укажите центры окружностей, вписанных в четырёхугольники, изображённые на рисунке 17.4.

3. Укажите центры окружностей, вписанных в четырёхугольники, изображённые на рисунке 17.5.



а *б*

Рис. 17.4



а *б*

Рис. 17.5

Окружность Эйлера*

11. Изобразите треугольник ABC, как показано на рисунке 18.13. Отметьте основания A_1, B_1, C_1 его медиан AA_1, BB_1, CC_1. Проведите высоты AA_2, BB_2, CC_2 и обозначьте H точку их пересечения. Отметьте точки A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH соответственно. Проверьте, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 принадлежат одной окружности.

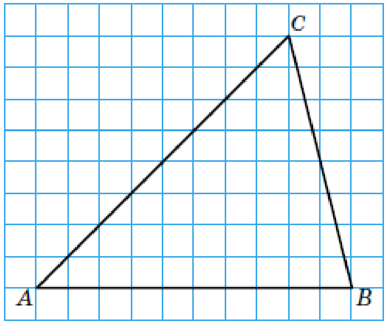


Рис. 18.13

12. Докажите, что для любого треугольника основания медиан, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, принадлежат одной окружности (рис. 18.14). Она называется ***окружностью девяти точек***, или ***окружностью Эйлера***.

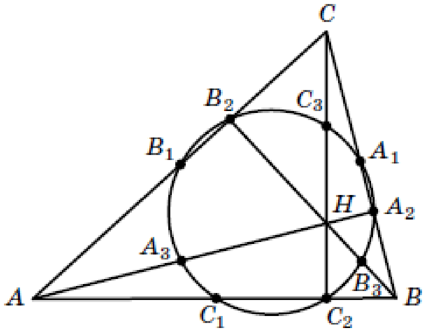


Рис. 18.14

13. Изобразите окружность Эйлера для треугольников на рисунке 18.15.

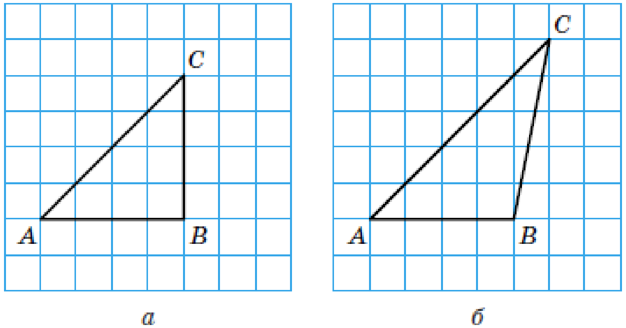


Рис. 18.15

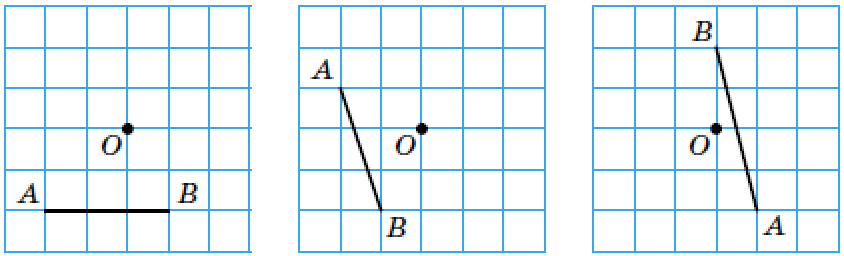
Центральная симметрия

12. Изобразите отрезок, симметричный отрезку AB относительно центра O (рис. 19.8).

13. Изобразите прямую, симметричную прямой a относительно центра O (рис. 19.9).

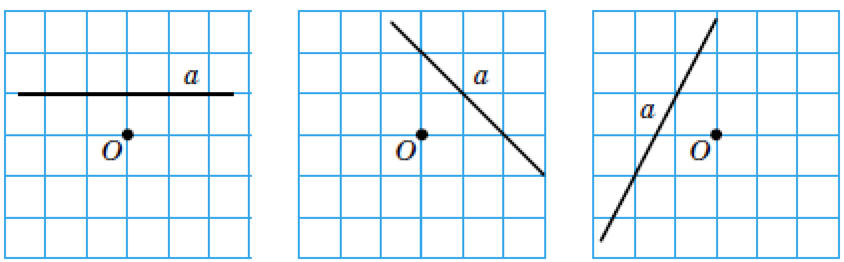
14. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра O (рис. 19.10).

15. Укажите центр симметрии для двух симметричных: а) отрезков; б) треугольников; в) четырёхугольников, изображённых на рисунке 19.11.



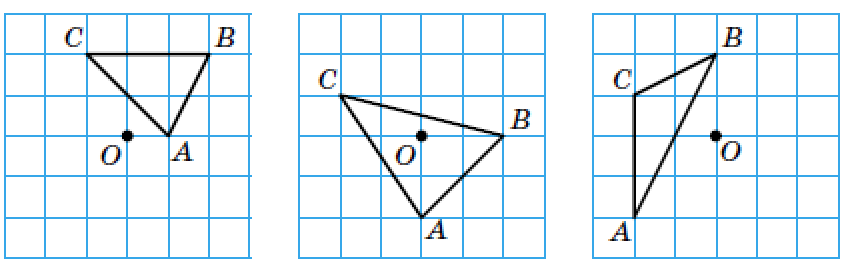
а *б* *в*

Рис. 19.8



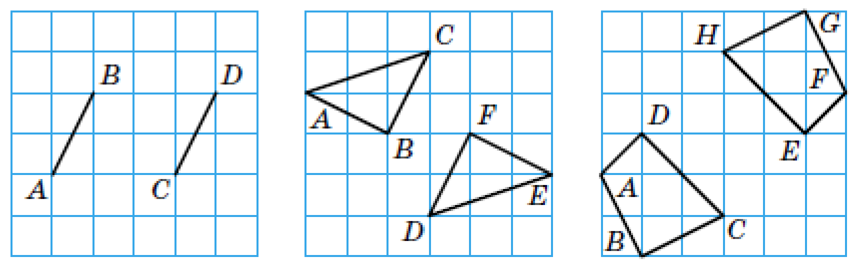
а *б* *в*

Рис. 19.9



а *б* *в*

Рис. 19.10



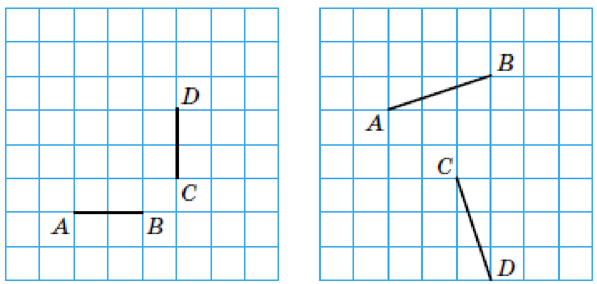
а *б* *в*

Рис. 19.11

Поворот, осевая симметрия

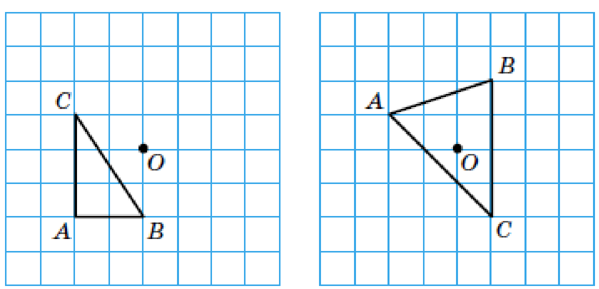
4. Отрезок CD получен поворотом отрезка AB (рис. 20.8). Укажите центр поворота.

5. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол: а) 90° против часовой стрелки (рис. 20.9, *а*); б) 90° по часовой стрелке (рис. 20.9, *б*).



а *б*

Рис. 20.8

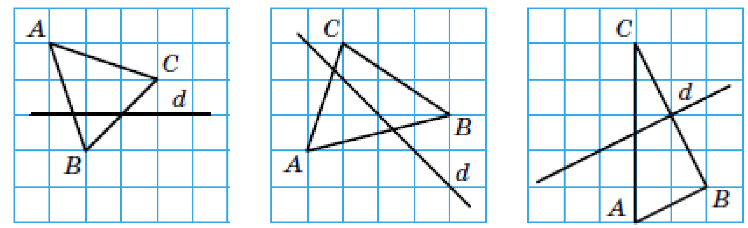


а *б*

Рис. 20.9

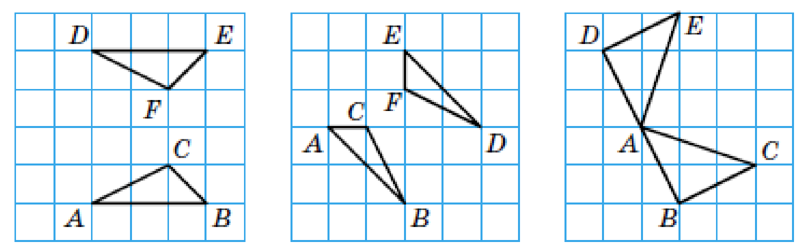
15. Изобразите треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d (рис. 21.7).

16. Изобразите ось симметрии для треугольников, изображённых на рисунке 21.8.



а *б* *в*

Рис. 21.7



а *б* *в*

Рис. 21.8

Паркеты*

1. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке 24.13. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

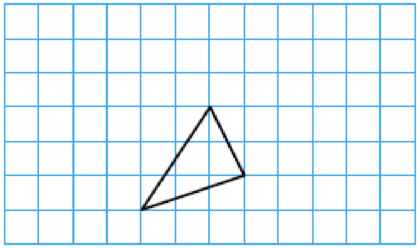


Рис. 24.13

3. Аналогично паркету на рисунке 24.3 на клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному (рис. 24.14). Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

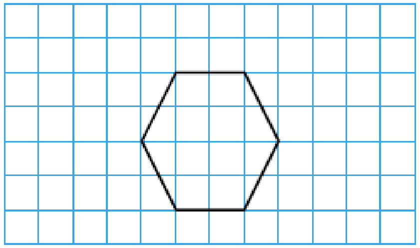


Рис. 24.14

12. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному (рис. 24.23). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

13. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному (рис. 24.24). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

14. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному (рис. 24.25). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

15. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному (рис. 24.26). Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами.

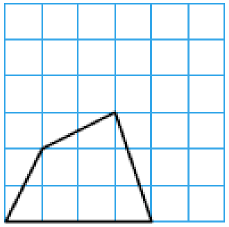


Рис. 24.23

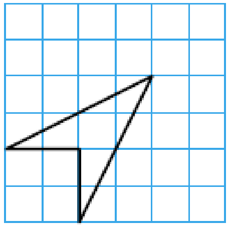


Рис. 24.24

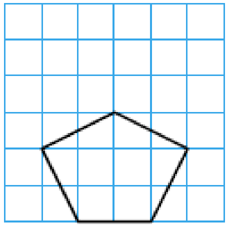


Рис. 24.25

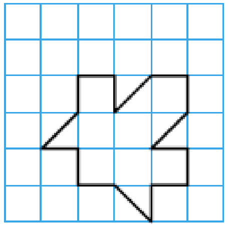


Рис. 24.26

Площадь в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

49* Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнем с того случая, когда $a=\frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *а* (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a\cdot 10^n$ целое. Разобьем данный квадрат со стороной a на m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *б* (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьется на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{a\cdot 10^n}=\frac{1}{10^n}.$$

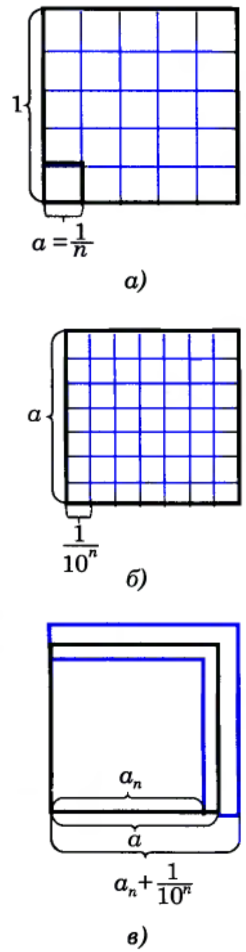


Рис. 180

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2\cdot\left(\frac{1}{10^n}\right)^2=\left(\frac{m}{10^n}\right)^2=\left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2=a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n \leqslant a \leqslant a_n+\frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n+\frac{1}{10^n}$ (рис. 180, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leqslant S \leqslant \left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

Площадь в нашем учебнике 8 класса

Для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Площадь фигуры является неотрицательным числом.

Свойство 2. Равные фигуры имеют равные площади.

Свойство 3. Если фигура Ф составлена из двух неперекрывающихся фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ (рис. 25.2), то площадь фигуры Ф равна сумме площадей фигур $Ф_1$ и $Ф_2$, т. е. $S(Ф) = S(Ф_1) + S(Ф_2)$.

Равновеликими фигурами называются фигуры, имеющие одинаковую площадь.

Простейшей фигурой, с точки зрения вычисления площади является прямоугольник (рис. 25.3). Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

Таким образом, площадь S прямоугольника, смежные стороны которого равны a, b, вычисляется по формуле

$$S = a \cdot b.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a вычисляется по формуле

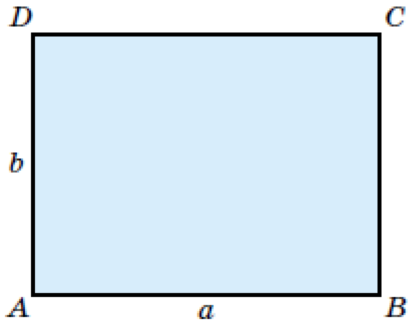


Рис. 25.3

Теорема Пифагора

Теорема. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах (рис. 26.1).

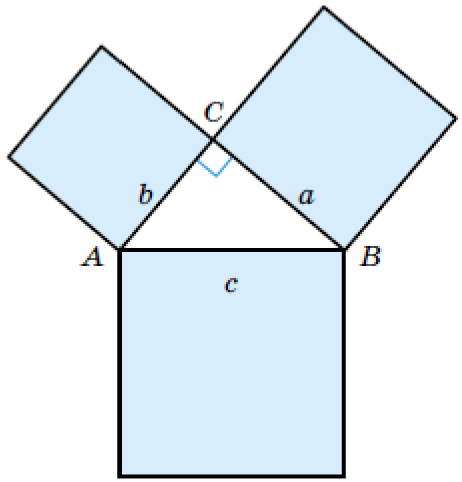


Рис. 26.1

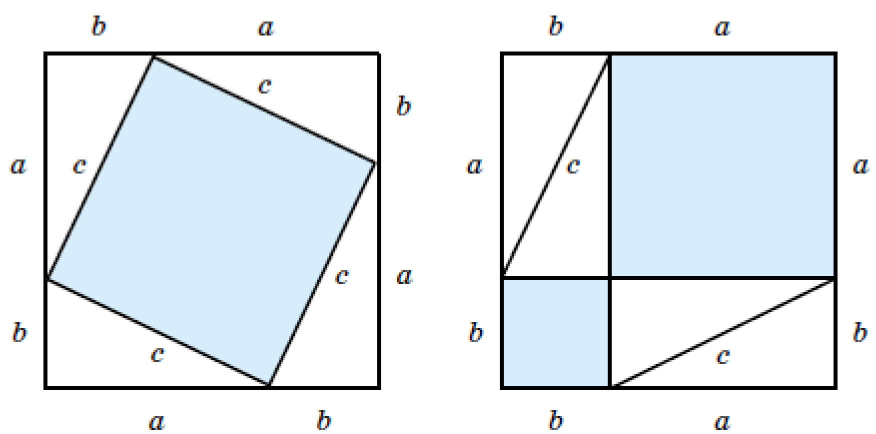


Рис. 26.2

14. Мальчик прошёл от дома по направлению на восток 400 м. Затем повернул на север и прошёл 300 м (рис. 26.5). На каком расстоянии от дома оказался мальчик?

15. Девочка прошла от дома по направлению на запад 600 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на

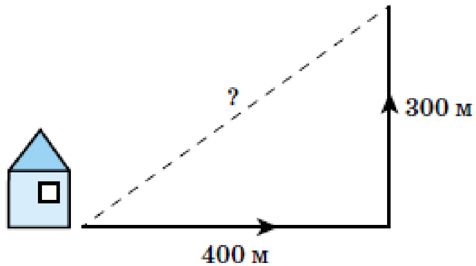


Рис. 26.5

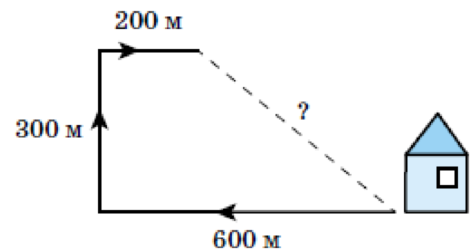


Рис. 26.6

восток и прошла ещё 200 м (рис. 26.6). На каком расстоянии от дома оказалась девочка?

16. Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 20 км/ч и 15 км/ч (рис. 26.7). Какое расстояние будет между ними через 3 ч?

17. Лестница длиной 13 м приставлена к стене так, что расстояние от её нижнего конца до стены равно 5 м (рис. 26.8). На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?

18. Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды (рис. 26.9). Найдите глубину озера в месте, где растёт камыш.

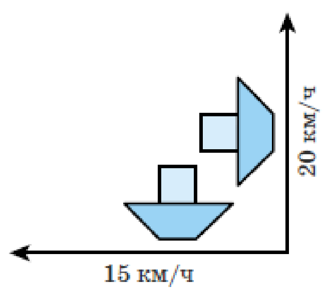


Рис. 26.7

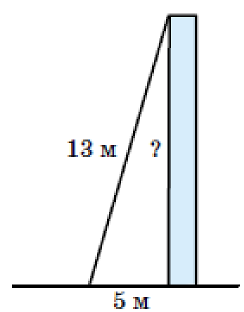


Рис. 26.8

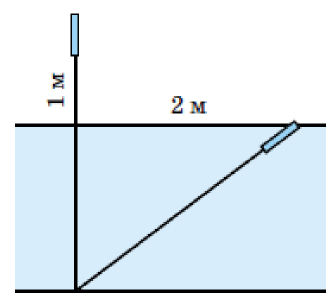


Рис. 26.9

Разрезания*

1. Параллелограмм (рис. 31.2) разрежьте на две части, из которых можно сложить прямоугольник.
2. Треугольник (рис. 31.3) разрежьте на две части, из которых можно сложить параллелограмм.
3. Трапецию (рис. 31.4) разрежьте на две части, из которых можно сложить треугольник.
4. Трапецию (рис. 31.5) разрежьте на три части, из которых можно сложить прямоугольник.
5. Через точку E проведите прямую, делящую квадрат $ABCD$ (рис. 31.6) на две равновеликие части.
6. Через точку E проведите прямую, делящую параллелограмм $ABCD$ (рис. 31.7) на две равновеликие части.

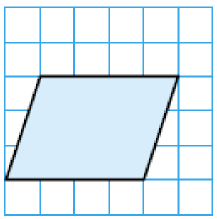


Рис. 31.2

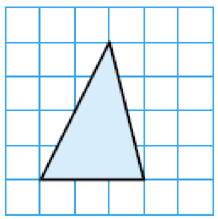


Рис. 31.3

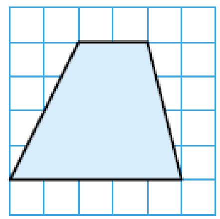


Рис. 31.4

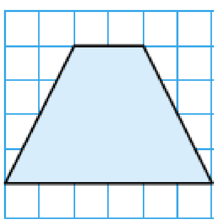


Рис. 31.5

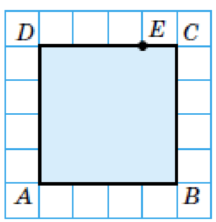


Рис. 31.6

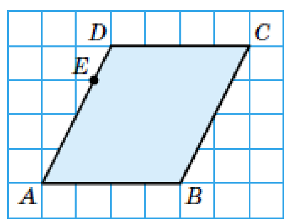


Рис. 31.7

8. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке 31.9, на четыре равные части.
9. Разрежьте правильный: а) шестиугольник; б) восьмиугольник на параллелограммы (рис. 31.10).

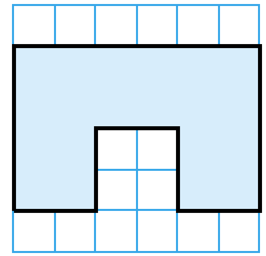


Рис. 31.9

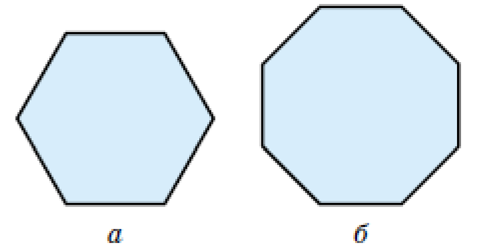


Рис. 31.10

Оглавление

5*. Золотое отношение

С древних времён люди занимались поисками гармонии и совершенства, по законам которых устроен мир.

Пифагор установил, что наиболее совершенным делением целого на две неравные части является такое деление, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. Такое деление называется ***золотым отношением***.

Многие скульпторы, архитекторы, художники использовали и используют золотое отношение в своих произведениях. Так, например, одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры — Парфенон в Афинах, содержит в себе золотые пропорции (рис. 5.2). В частности, отношение высоты BC здания к его длине AB равно φ.

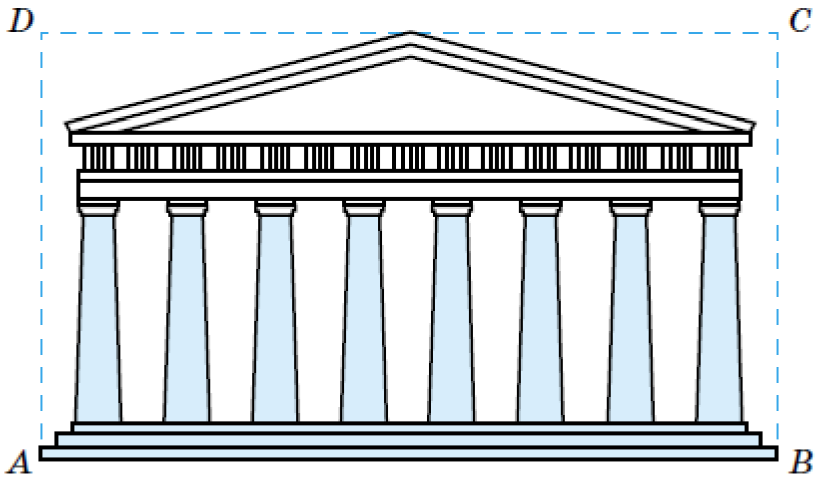
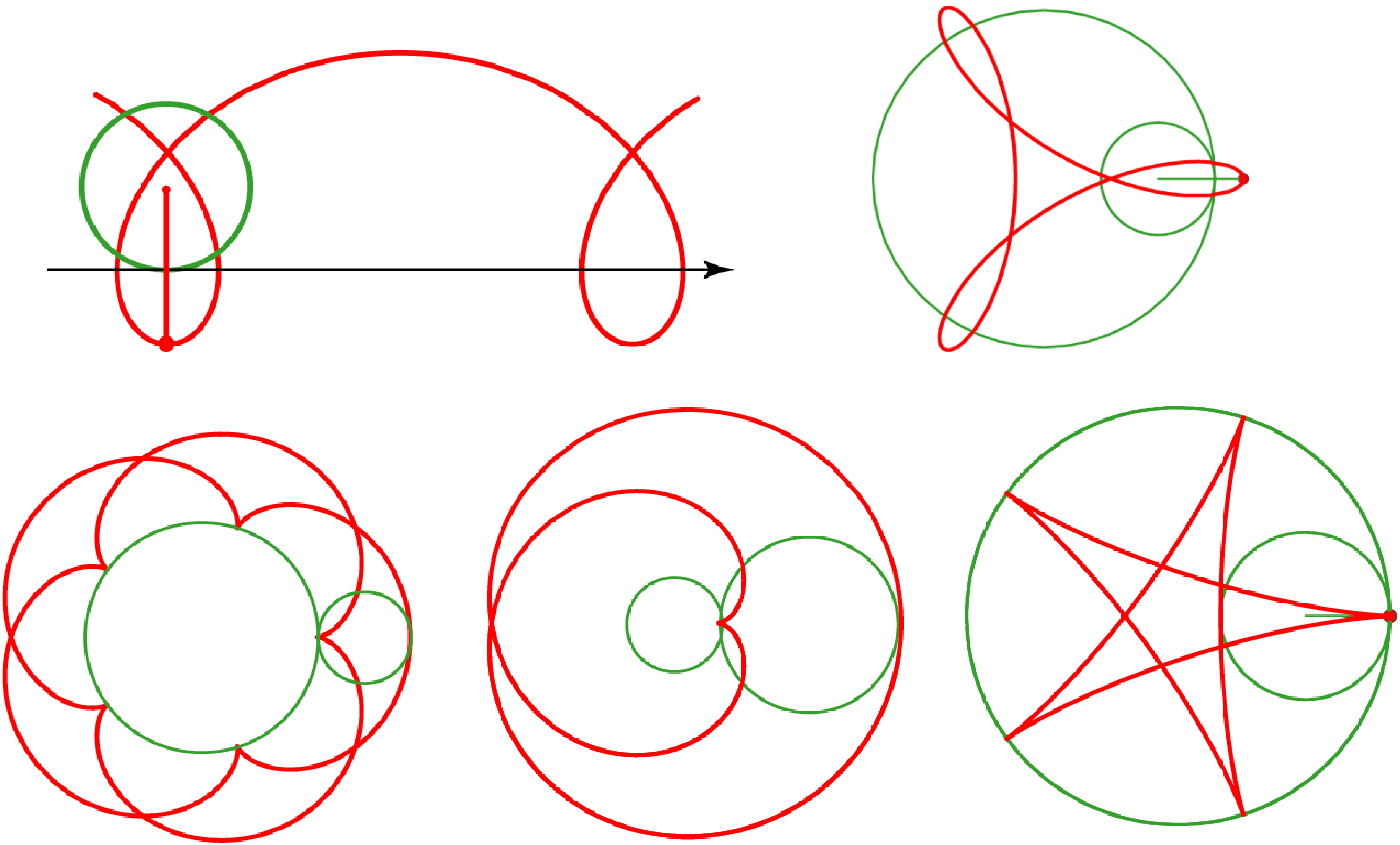


Рис. 5.2

Моделирования кривых.



10 класс

Результаты обучения в 10-м классе

После обучения геометрии в 10-м классе учащиеся должны научиться решать задачи на:

1) изображение многогранников, проведение дополнительных построений;

2) распознавание взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве;

3) построение сечений многогранников;

4) нахождение расстояний и углов в пространстве;

5) распознавание элементов симметрии многогранников;

6)* моделирование многогранников и проведение дополнительных построений с помощью компьютерной программы GeoGebra.

Изображение многогранников

7. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 2.6.

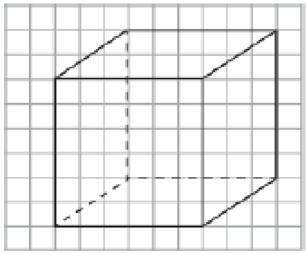


Рис. 2.6

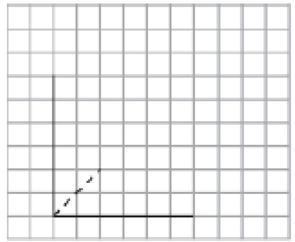


Рис. 2.7

8. На клетчатой бумаге изображены три ребра куба (рис. 2.7). Изобразите весь куб.

9. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 2.8.

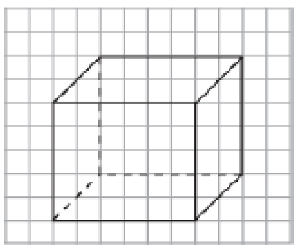


Рис. 2.8

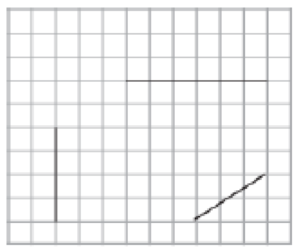


Рис. 2.9

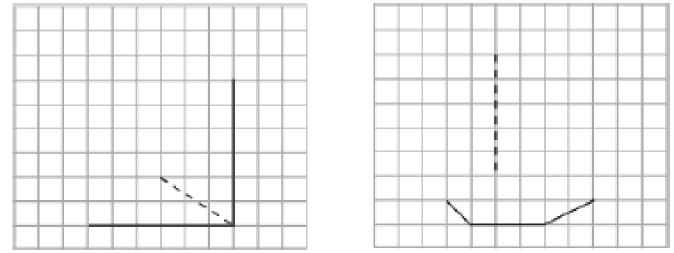
10. На клетчатой бумаге изображены три ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.9). Изобразите весь параллелепипед.

11. На клетчатой бумаге изобразите призмы, аналогичные данным на рисунке 2.10.

а) б)

Рис. 2.10

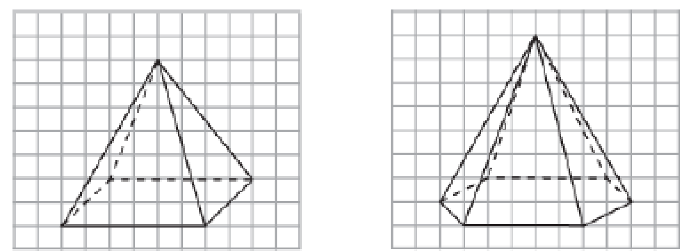
12. На клетчатой бумаге изображены рёбра: а) треугольной; б) шестиугольной призмы (рис. 2.11). Изобразите всю призму.



а) б)

Рис. 2.11

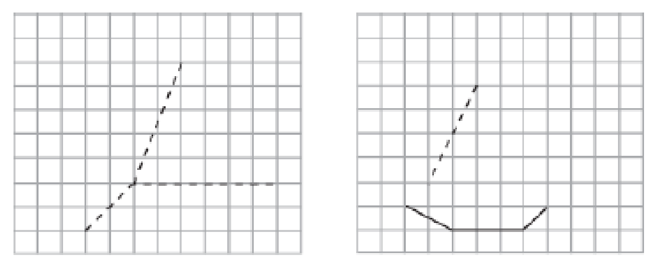
13. На клетчатой бумаге изобразите пирамиды, аналогичные данным на рисунке 2.12.



а) б)

Рис. 2.12

14. На клетчатой бумаге изображены рёбра: а) четырёхугольной; б) шестиугольной пирамиды (рис. 42.13). Изобразите всю пирамиду.



а) б)

Рис. 2.13

5. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр, аналогично данному на рисунке 4.8.

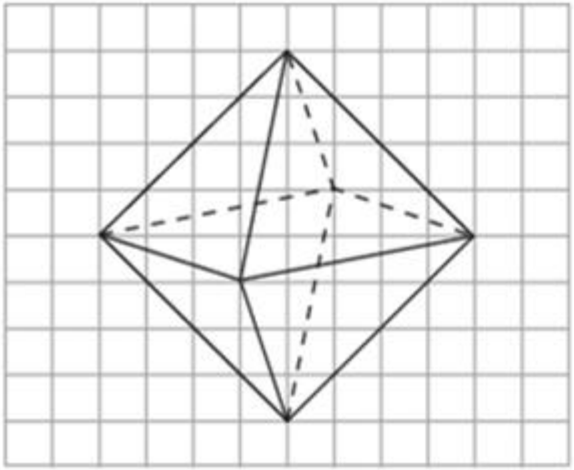


Рис. 4.8

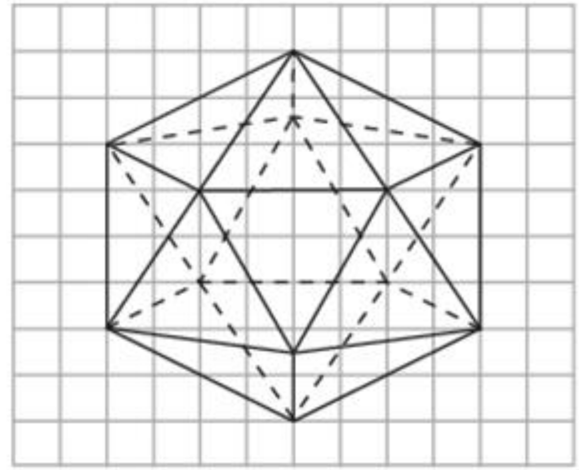


Рис. 4.9

6. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр, аналогично данному на рисунке 4.9.

7. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр, аналогично данному на рисунке 4.10.

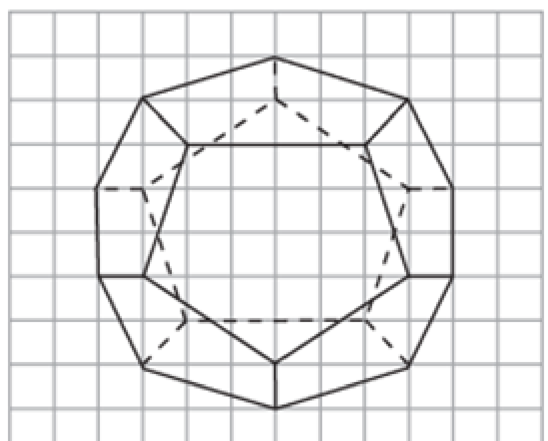


Рис. 4.10

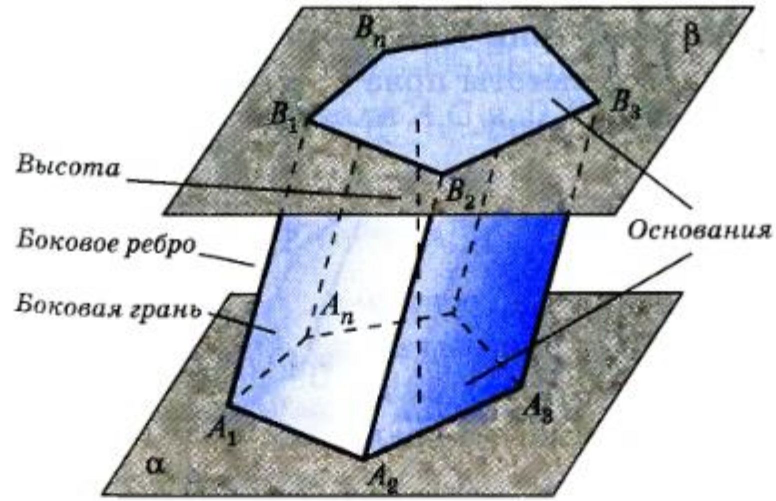
Определение призмы в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

120 Призма

Многогранник, называемый **призмой**, можно построить следующим образом. Рассмотрим **параллельные плоскости** α и β, т. е. такие плоскости, которые не имеют общих точек. В плоскости α возьмем какой-нибудь многоугольник $A_1A_2...A_n$, а в плоскости β — равный ему многоугольник $B_1B_2...B_n$, причем так, чтобы равные стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3,..., A_nA_1 и B_nB_1 этих многоугольников были попарно параллельны (рис. 341). Поясним, что понимается под параллельностью прямых в пространстве. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Соединим отрезками A_1B_1, A_2B_2,..., A_nB_n соответственные вершины равных многоугольников. В результате получим n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$,..., $A_nA_1B_1B_n$. В самом деле, например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ противоположные стороны A_1A_2 и B_1B_2 по построению равны и параллельны, поэтому этот четырехугольник — параллелограмм.

***n*-угольной призмой** называется многогранник $A_1A_2...A_nB_1B_1...B_n$, составленный из двух равных n-угольников $A_1A_2...A_n$



311

и $B_1B_2...B_n$ — **оснований** призмы и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$,..., $A_nA_1B_1B_n$ — **боковых граней** призмы. Отрезки A_1B_1,..., A_nB_n называются **боковыми ребрами** призмы. Все они равны и параллельны друг другу.

Определение призмы в нашем учебнике

Призма — многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых ***основаниями*** призмы, и параллелограммов, называемых ***боковыми гранями*** призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются ***боковыми рёбрами*** призмы (рис. 33.3).

Призмы бывают треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д., в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях — соответственно треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д.

Призма называется ***прямой***, если её боковыми гранями являются прямоугольники.

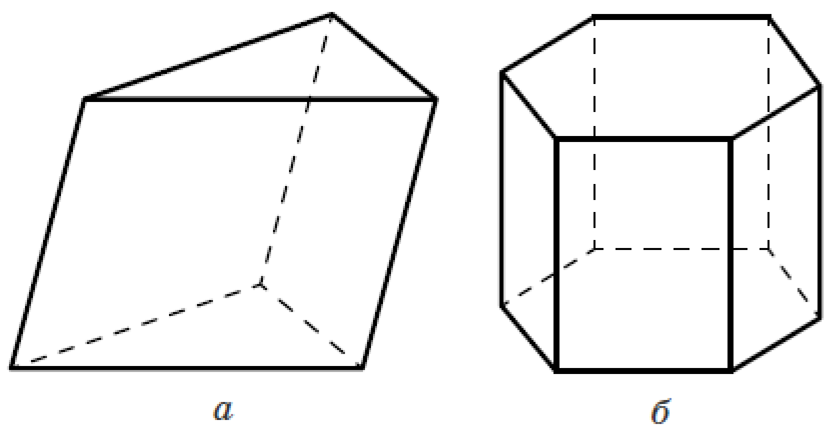


Рис. 33.3

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется ***правильной***. На рисунке 33.3, *б* изображена правильная шестиугольная призма.

Развёртки многогранников

6. Развёртки многогранников

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым рёбрам и развернуть её на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется **развёрткой** многогранника.

Например, на рисунке 6.1 изображена развёртка куба.

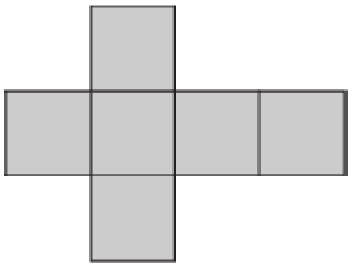


Рис. 6.1

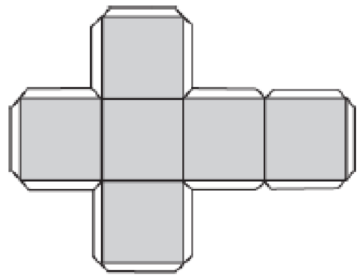
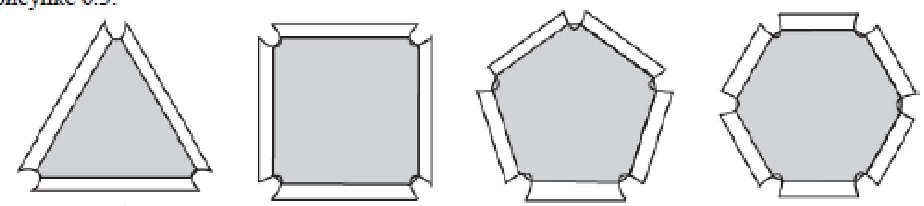


Рис. 6.2

Для того чтобы изготовить модель многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала, достаточно изготовить его развёртку и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки развёртку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 6.2 изображена развёртка куба с клапанами.

Модели многогранников можно изготавливать с помощью **геометрического конструктора**. Он состоит из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами, и резиновых колечек - основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, «уголки» многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 6.3.

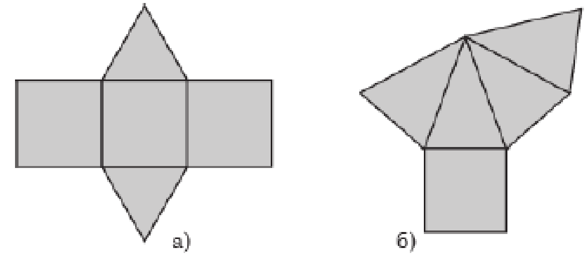


а) б) в) г)

Рис. 6.3

Задачи

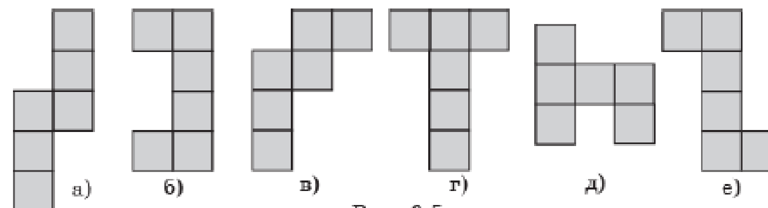
1. Развёртки каких многогранников изображены на рисунке 6.4?



а) б)

Рис. 6.4

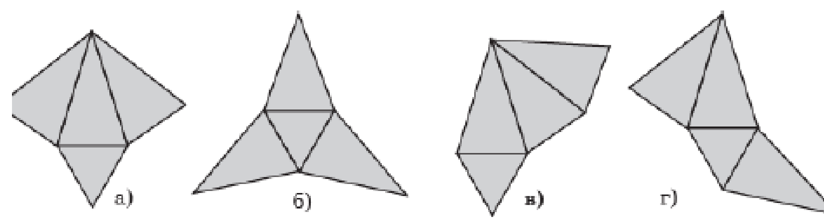
2. На рисунке 6.5 укажите развёртки куба.



а) б) в) г) д) е)

Рис. 6.5

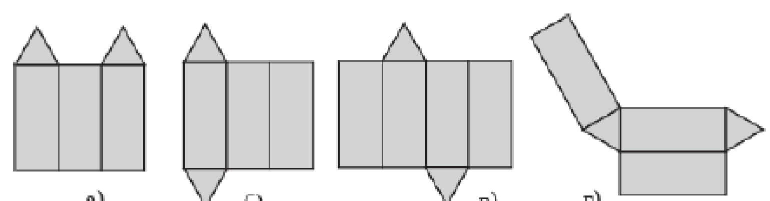
3. На рисунке 6.6 укажите развёртки треугольной пирамиды.



а) б) в) г)

Рис. 6.6

4. На рисунке 6.7 укажите развёртки треугольной призмы.



а) б) в) г)

Рис. 6.7

9. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.12?

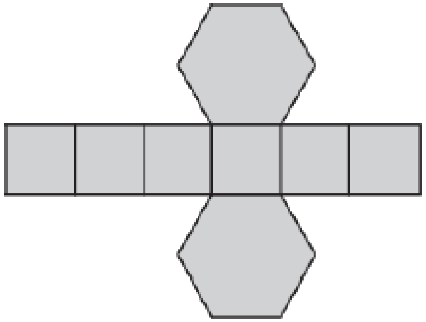


Рис. 6.12

10. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.13?

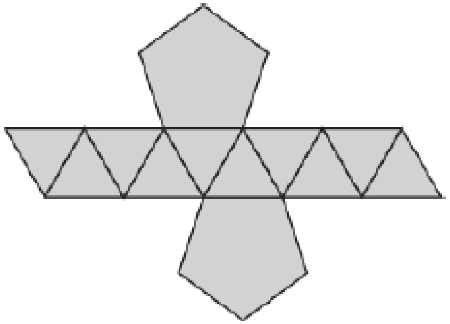


Рис. 6.13

11. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.14?

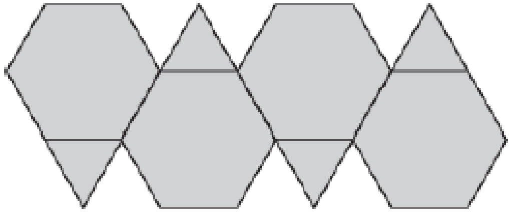


Рис. 6.14

12. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.15?

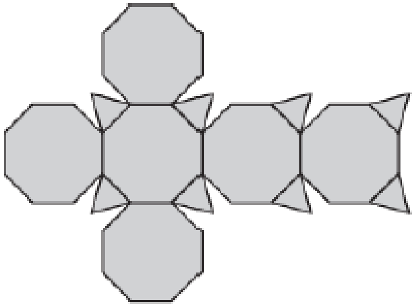


Рис. 6.15

13. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.16?

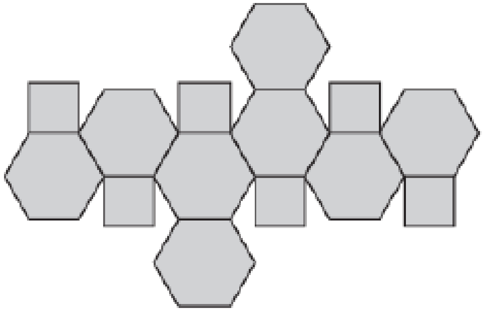


Рис. 6.16

14. Развёртка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке 6.17?

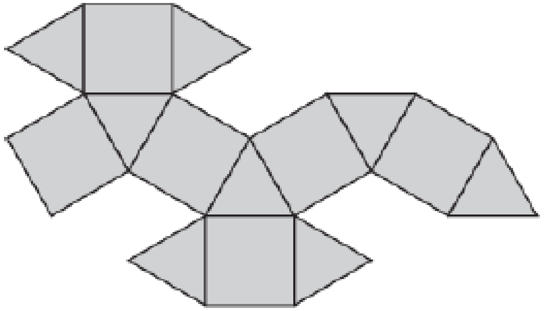
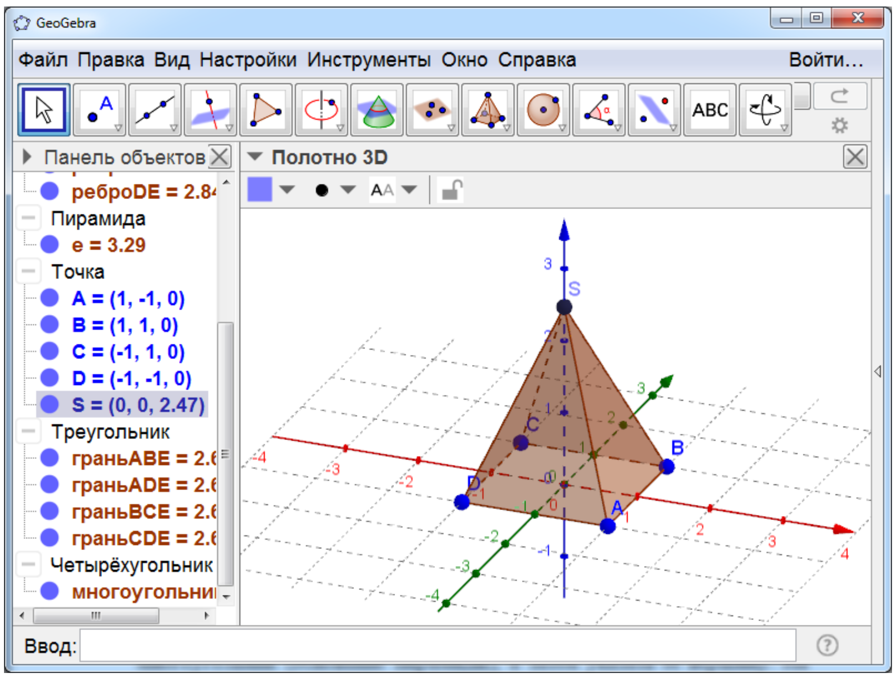


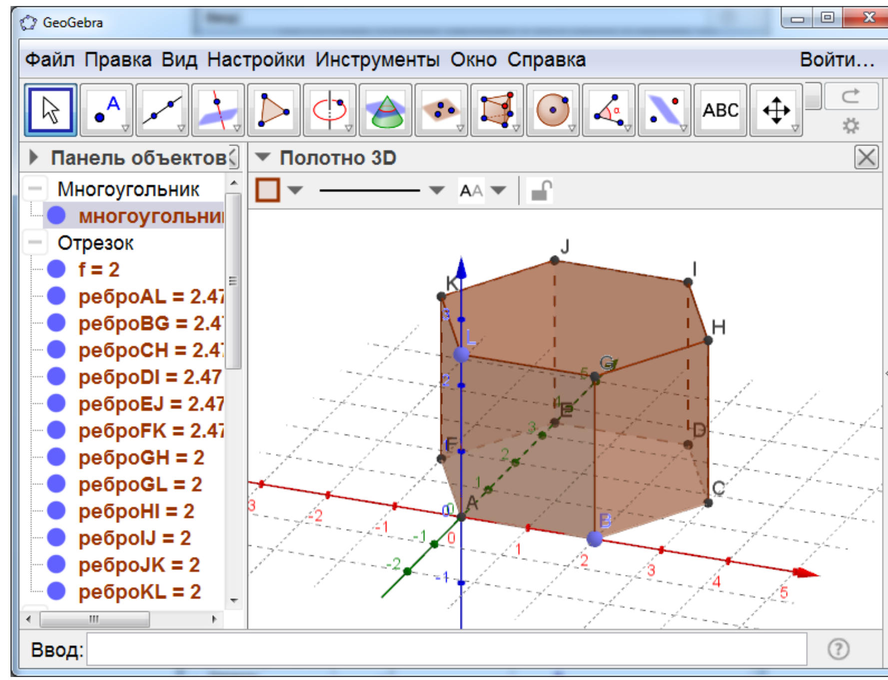
Рис. 6.17

Моделирование многогранников в программе GeoGebra

Инструмент «Пирамида» позволяет строить пирамиду в пространстве. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание пирамиды), а затем указать её вершину. На рисунке показана четырёхугольная пирамида.

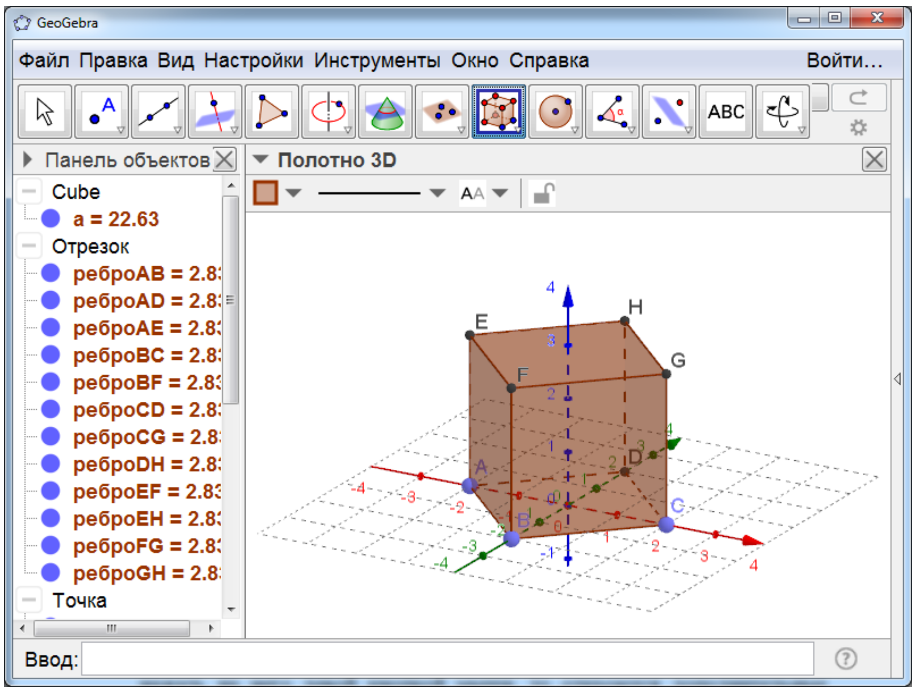
Инструмент «Призма» позволяет строить призму в пространстве. На рисунке показана правильная шестиугольная призма.

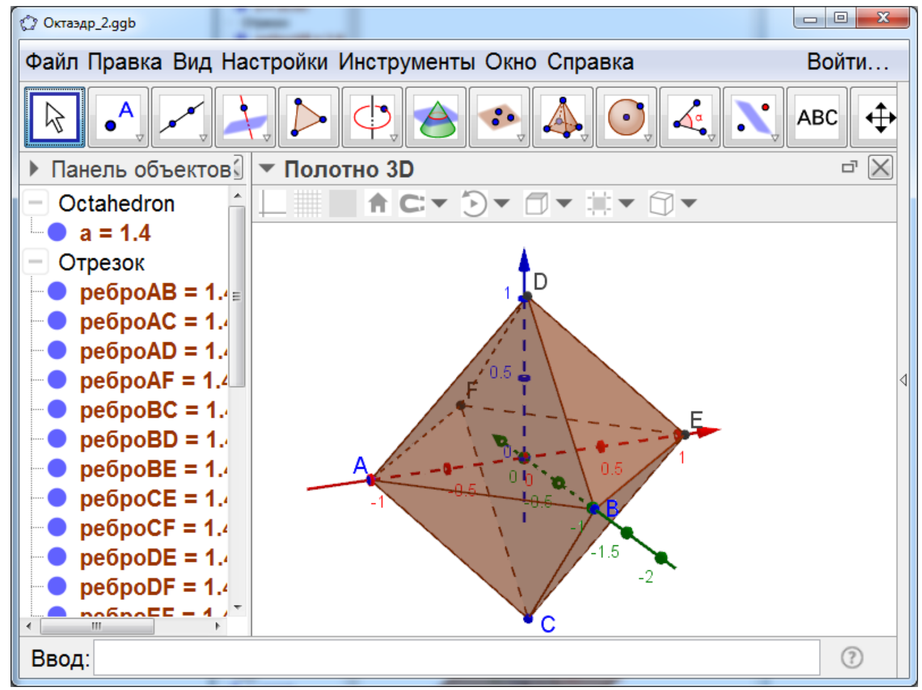




Инструмент «Куб» позволяет получать изображения куба. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины куба). На рисунке 1.22 показан пример такого куба.

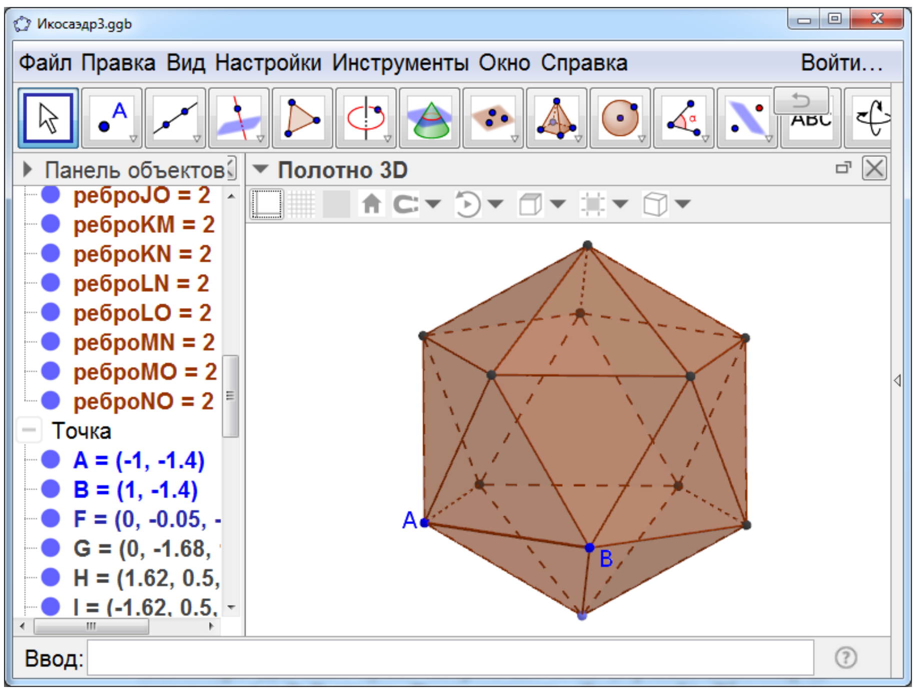
Инструмент «Октаэдр» позволяет получать изображения октаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины октаэдра), например, *A* и *B*. В строке «Ввод» написать «Октаэдр[A, B] и нажать «Enter». На рисунке 1.23 показан пример такого октаэдра.

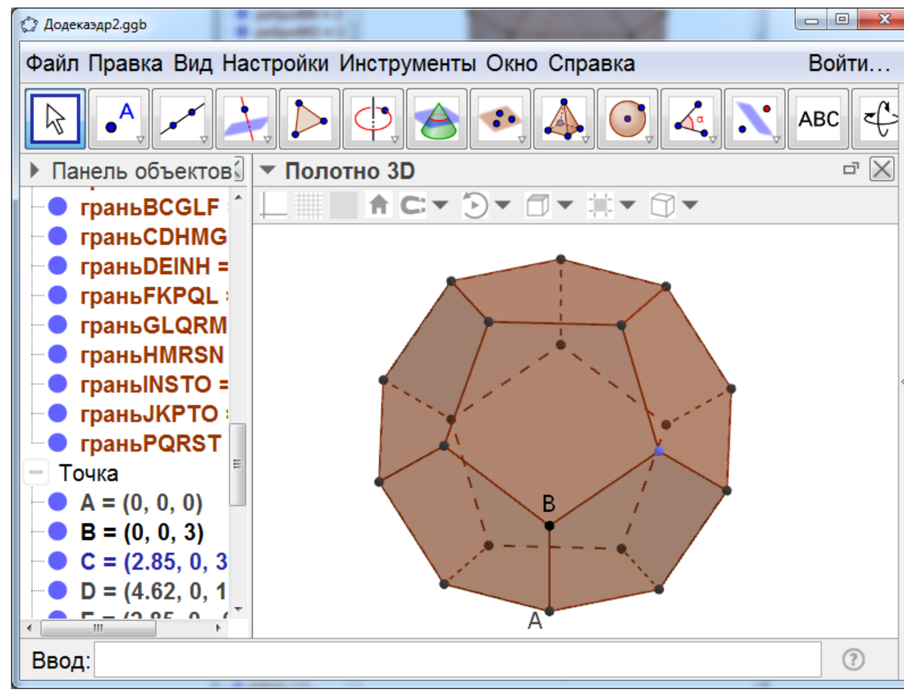




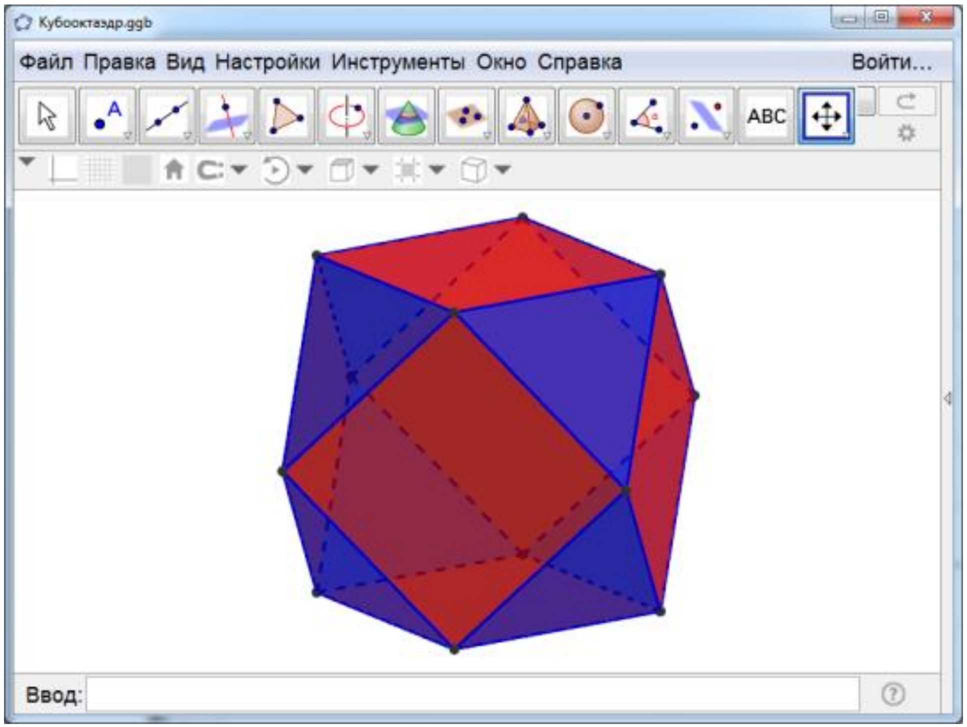
Инструмент «Икосаэдр» позволяет получать изображения икосаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины икосаэдра), например, *A* и *B*. В строке «Ввод» написать «Икосаэдр[A, B] и нажать «Enter». На рисунке 1.24 показан пример такого икосаэдра.

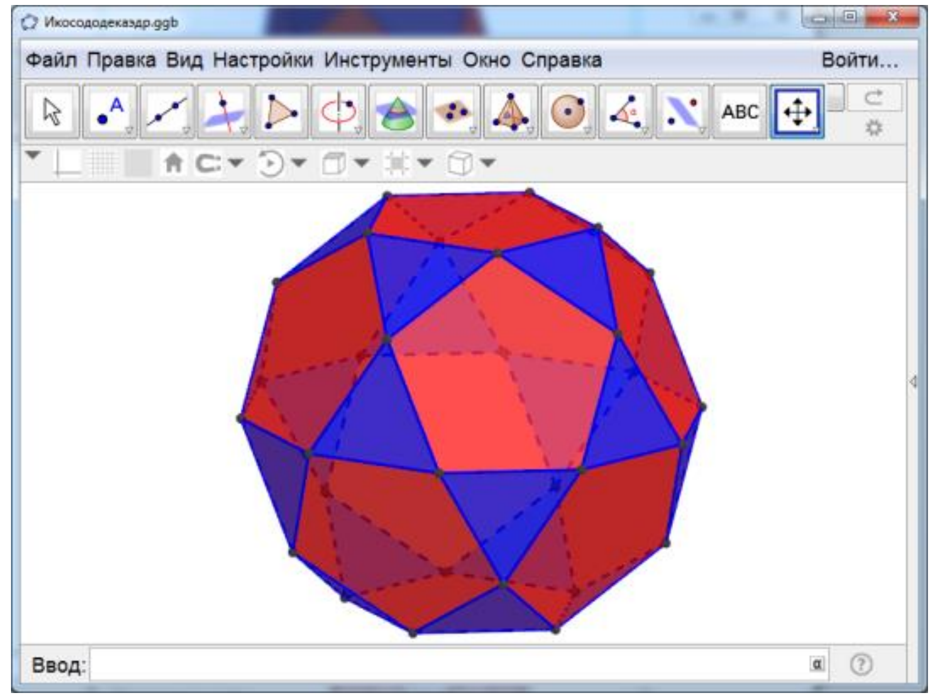
Инструмент «Додекаэдр» позволяет получать изображения додекаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины додекаэдра), например, *A* и *B*. В строке «Ввод» написать «Додекаэдр[A, B] и нажать «Enter». На рисунке 1.25 показан пример такого додекаэдра.



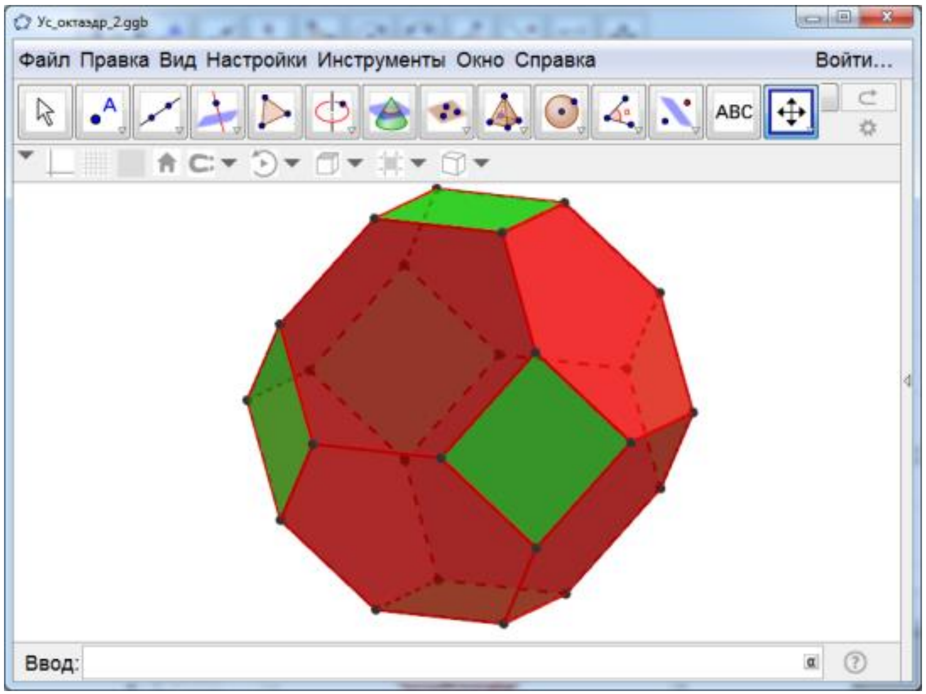


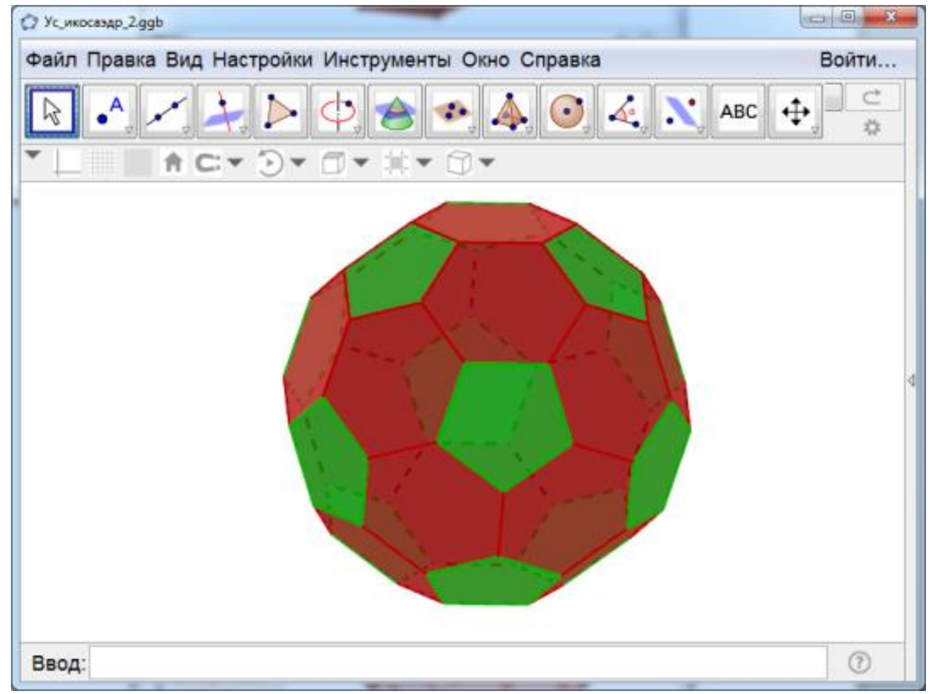
На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.



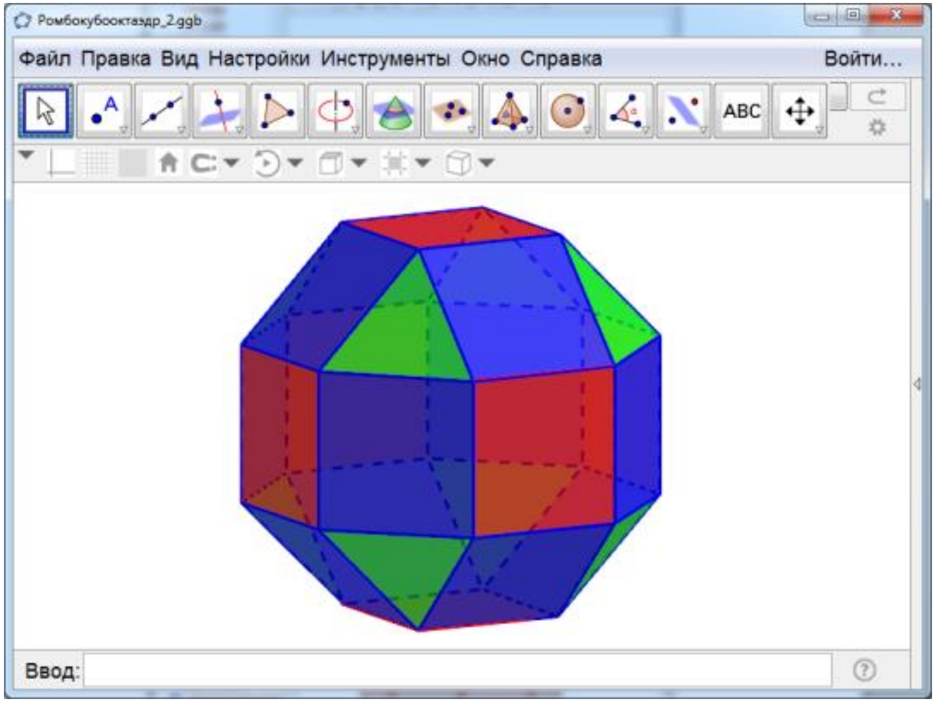


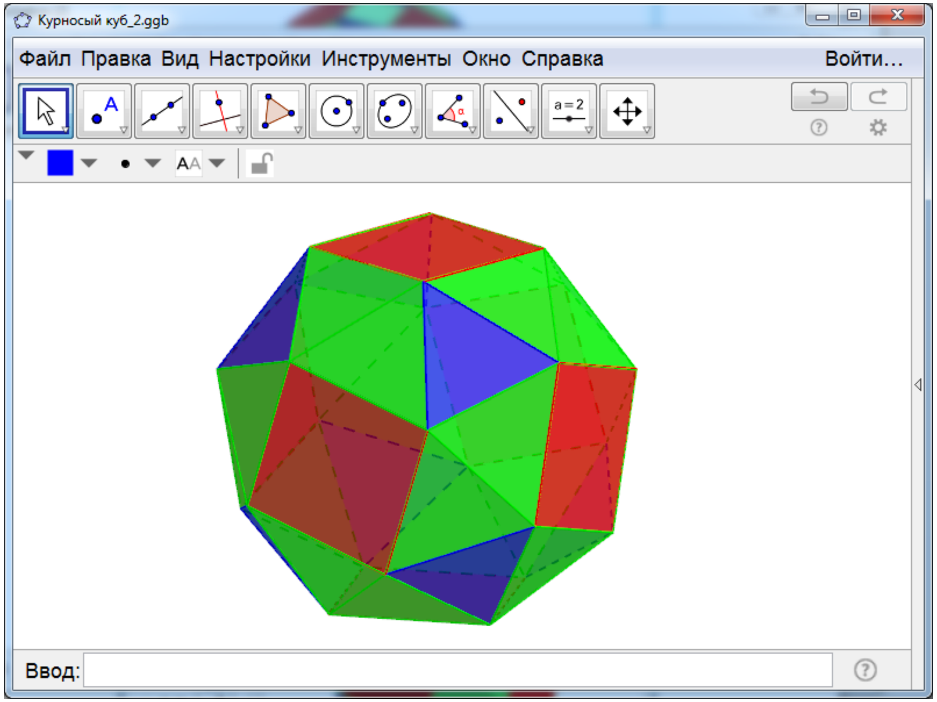
На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.



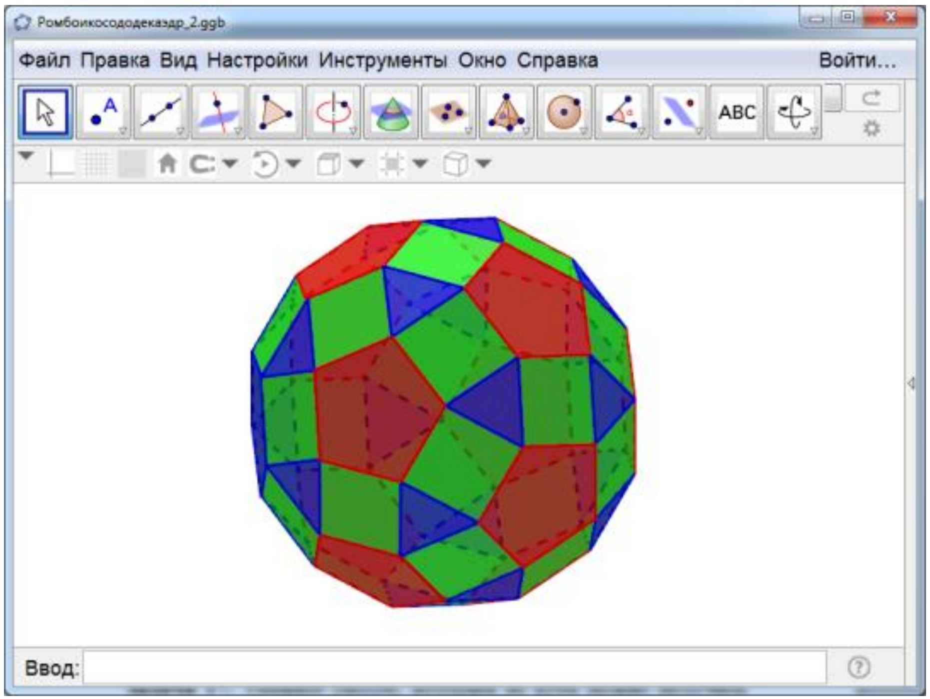


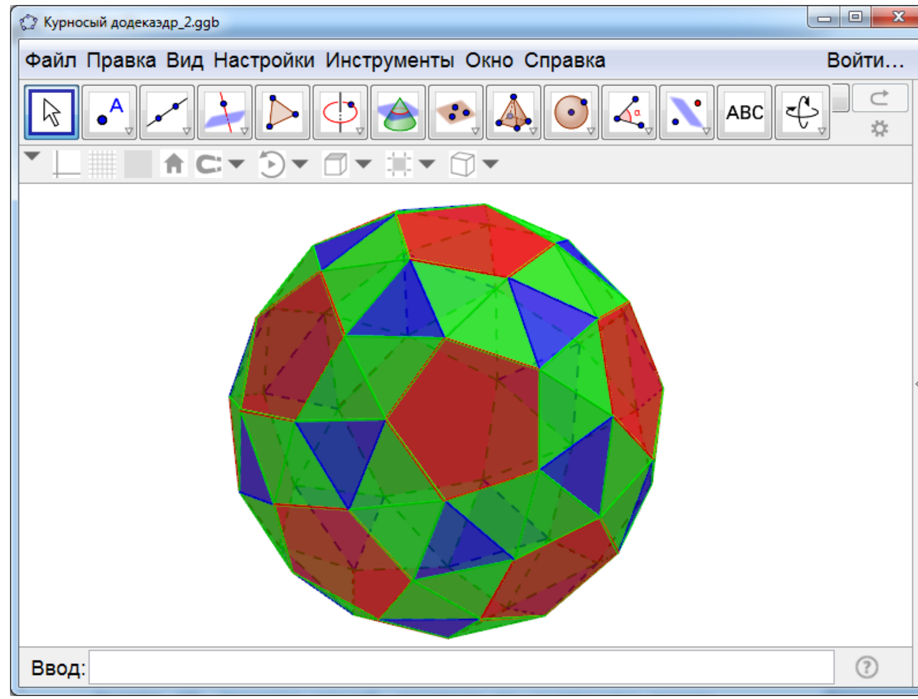
На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.



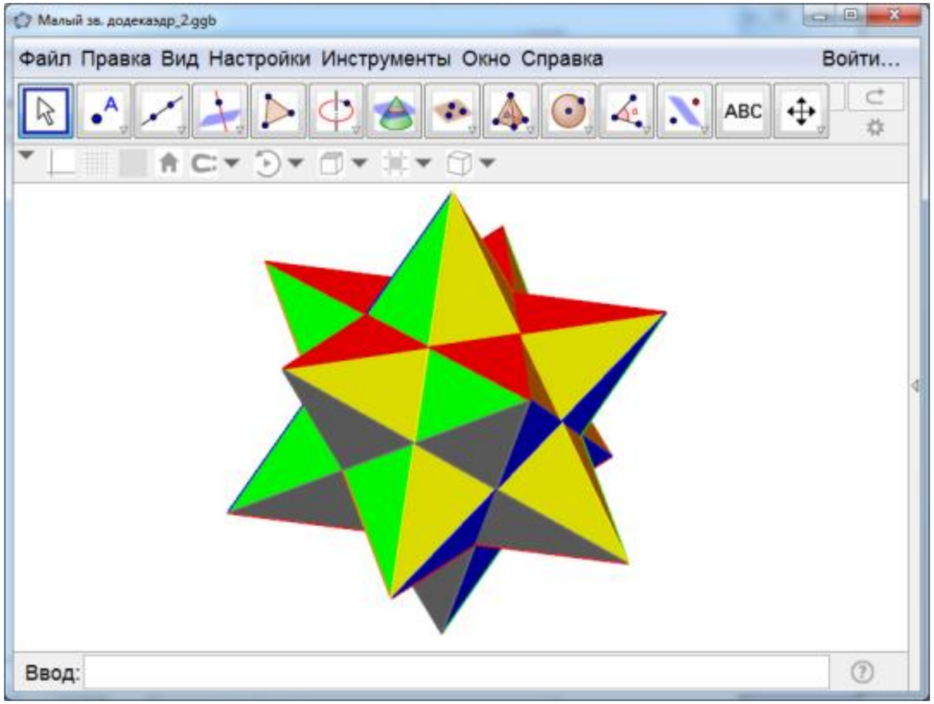


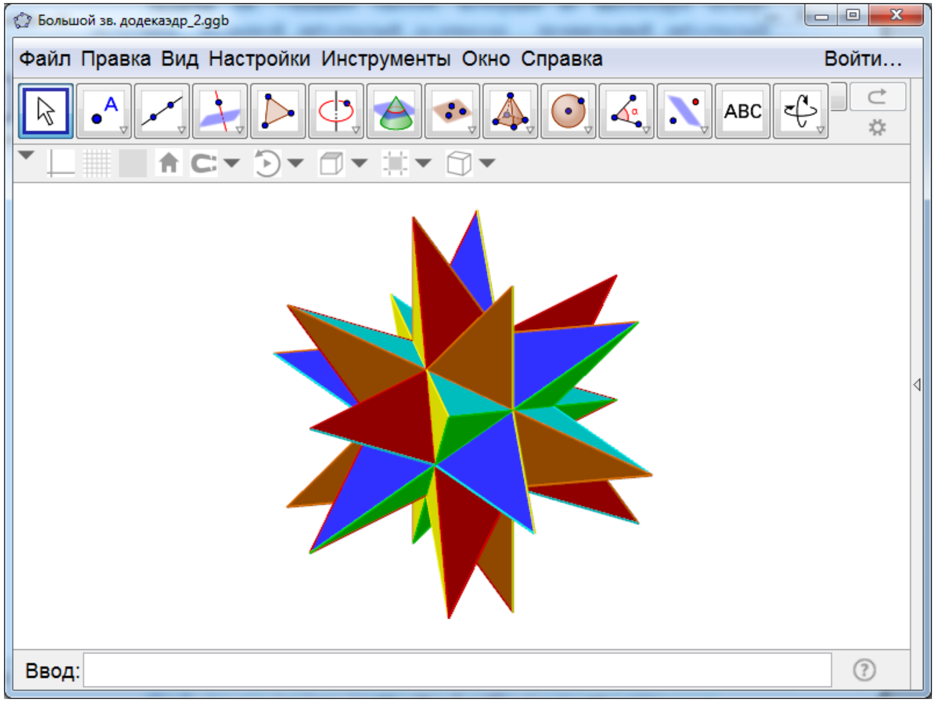
На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.



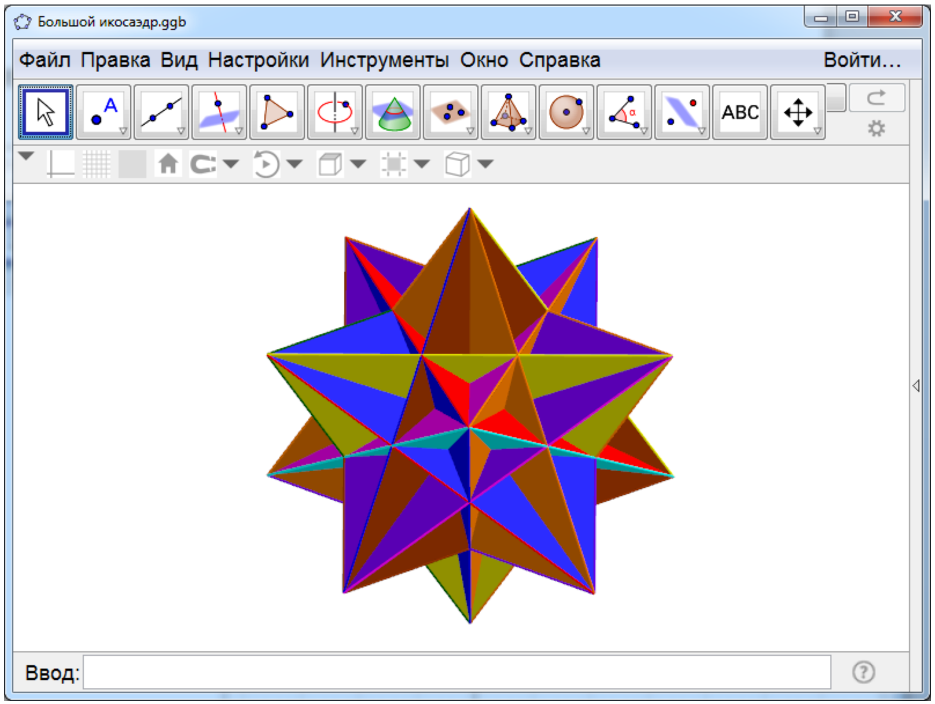


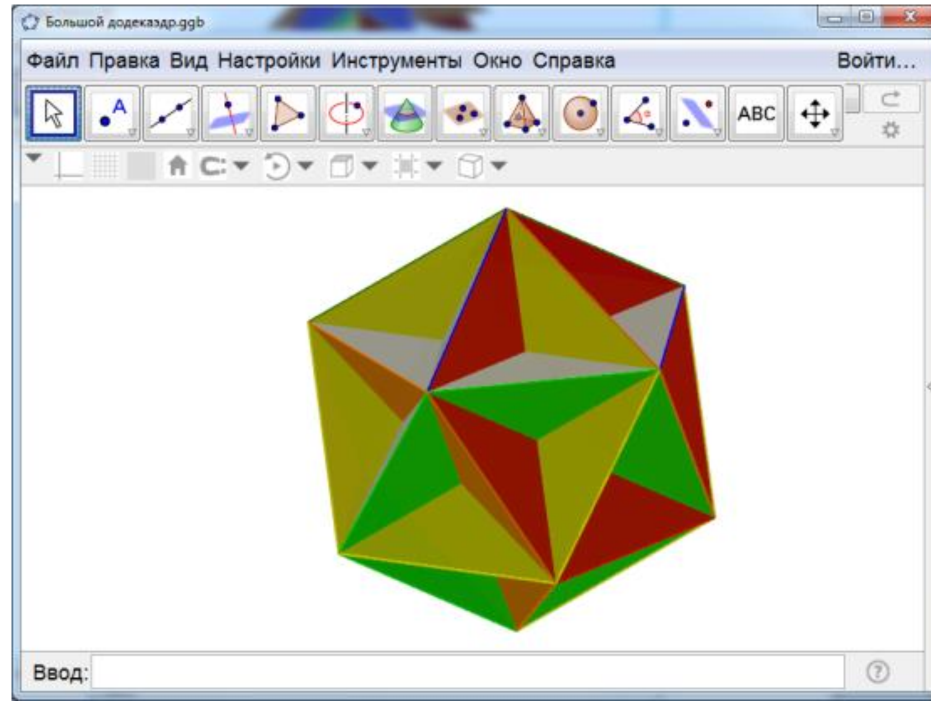
На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.





На рисунках показаны более сложные многогранники, полученные с помощью программы GeoGebra.





Взаимное расположение прямых в пространстве

4°. Как расположены в пространстве прямые a и b, проведённые в плоскостях α и β (рис. 7.7)?

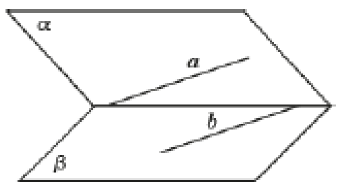


Рис. 7.7

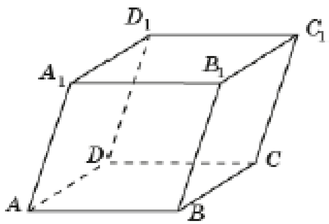


Рис. 7.8

5°. Пересекаются ли прямые, содержащие рёбра AB и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.8)? Будут ли эти прямые параллельны?

6. Запишите рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельные ребру: а) AA_1; б) BC (рис. 7.8).

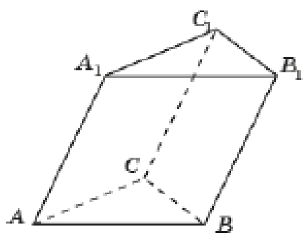


Рис. 7.9

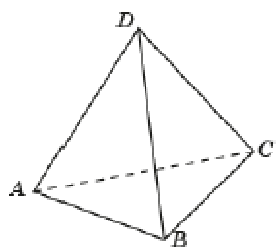


Рис. 7.10

7. Сколько имеется пар параллельных рёбер у параллелепипеда (рис. 7.8)?

8. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые BA_1 и CD_1 параллельны.

9. Запишите рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, скрещивающиеся с ребром AB.

10. Сколько имеется пар скрещивающихся рёбер у параллелепипеда?

11. Сколько имеется пар параллельных рёбер у треугольной призмы (рис. 7.9)?

12. Запишите рёбра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, скрещивающиеся с ребром AA_1.

13. Сколько имеется пар скрещивающихся рёбер у треугольной призмы?

14. Докажите, что рёбра AB и CD тетраэдра $ABCD$ скрещиваются (рис. 7.10).

15. Запишите рёбра, скрещивающиеся с ребром SA, правильной: а) четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 7.11); б) шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ (рис. 7.12).

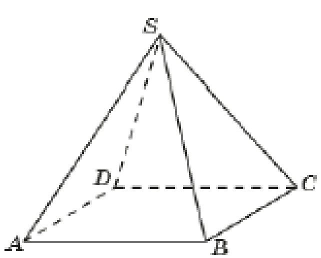


Рис. 7.11

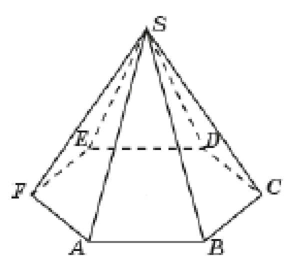


Рис. 7.12

16. Запишите рёбра шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, параллельные ребру: а) AB; б) AA_1 (рис. 7.13).

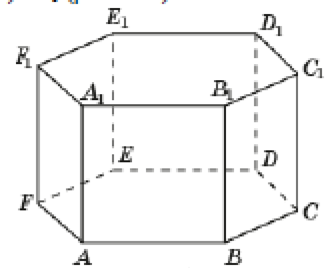


Рис. 7.13

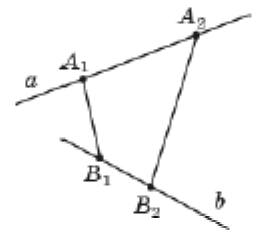


Рис. 7.14

17. Запишите рёбра шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, скрещивающиеся с ребром: а) AB; б) AA_1 (рис. 7.13).

18*. Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 7.13) параллельны прямые: а) AD и B_1C_1; б) AD и A_1D_1; в) AB_1 и ED_1.

19*. Точки A_1, A_2 и B_1, B_2 принадлежат скрещивающимся прямым соответственно a и b (рис. 7.14). Могут ли прямые A_1B_1 и A_2B_2 быть пересекающимися или параллельными?

20*. Каково взаимное расположение прямых DE и FG (рис. 7.15)?

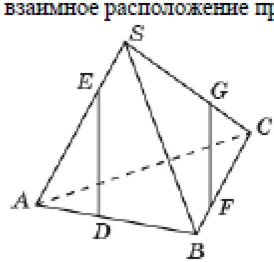


Рис. 7.15

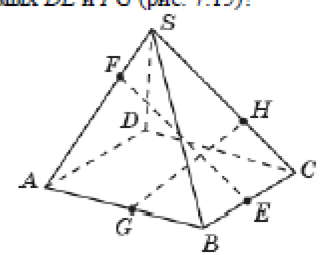


Рис. 7.16

21*. Пересекаются ли отрезки EF и GH (рис. 7.16)?

22*. Имеются ли параллельные рёбра у: а) октаэдра; б) икосаэдра; в) додекаэдра (рис. 7.17)? Если имеются, то сколько пар таких рёбер?

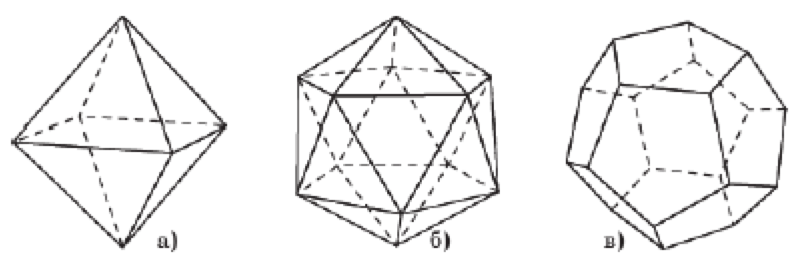
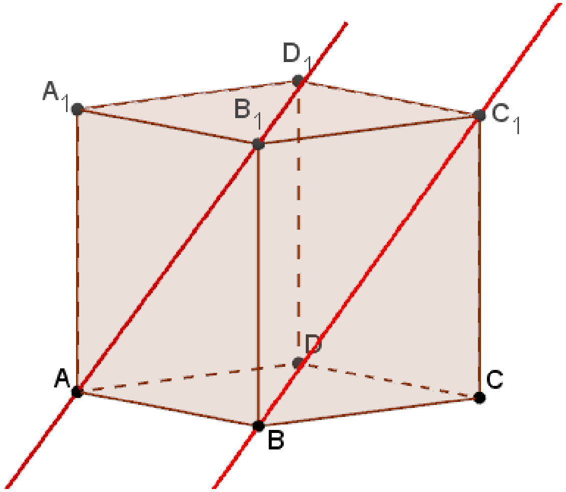
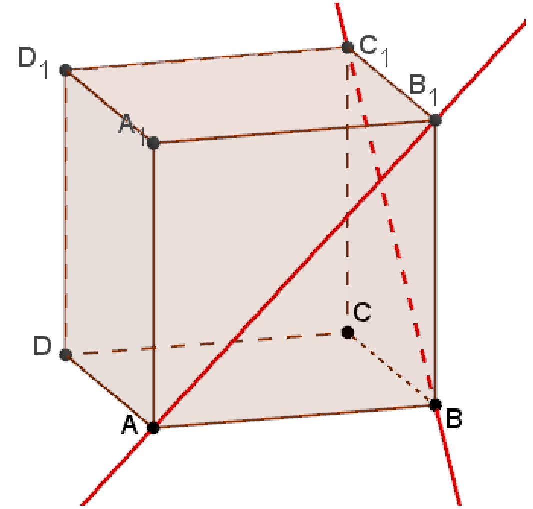


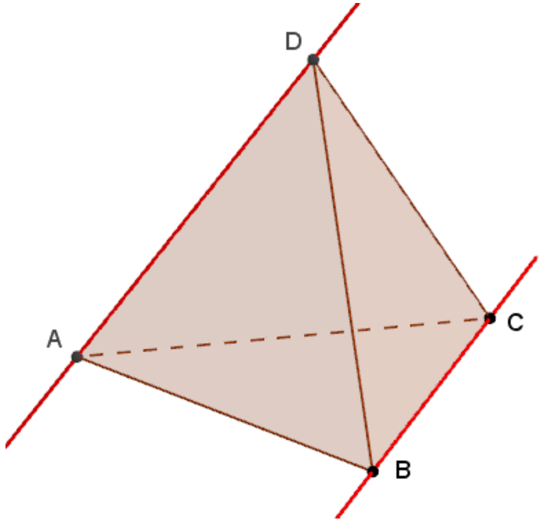
Рис. 7.17

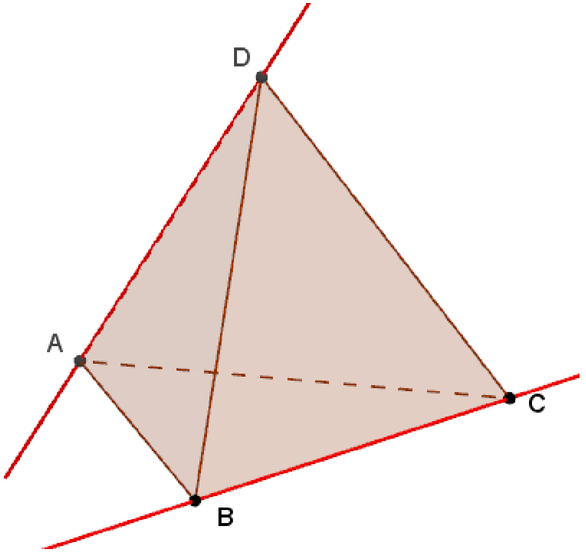
Как расположены в пространстве прямые, проходящие через вершины A и B_1, B и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?





Как расположены в пространстве прямые, проходящие через вершины A и D, B и C тетраэдра $ABCD$?





Построение сечений

14. Построение сечений куба

Начнём с построение сечения куба плоскостью, проходящей через три точки, принадлежащие рёбрам этого куба.

Рассмотрим некоторые возможные случаи расположения точек.

Пример 1. Точки *E*, *F*, *G* принадлежат рёбрам куба, выходящим из одной вершины (рис. 14.1). В этом случае для построения сечения, проходящего через эти точки, достаточно соединить данные точки отрезками, и невидимый отрезок сделать пунктирным. Полученный треугольник *EFG* (рис. 14.2) и будет искомым изображением сечения.

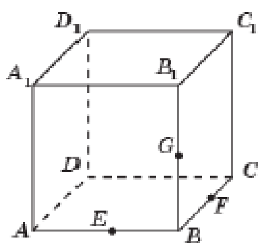


Рис. 14.1

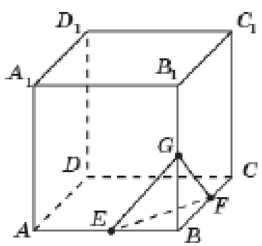


Рис. 14.2

Пример 2. Точки *E*, *F* принадлежат рёбрам куба, выходящим из одной вершины, а точка *G* принадлежит ребру, параллельному одному из этих рёбер (рис. 14.3). В этом случае для построения сечения, проходящего через эти точки, проведём прямую *FG* и найдём точку *P* её пересечения с прямой BB_1. Проведём прямую *EP* и найдём точку *H* её пересечения с ребром A_1B_1. Соединим отрезками точки *E* и *F*, *G* и *H*. Полученный четырёхугольник *EFGH* (рис. 14.4) и будет искомым изображением сечения.

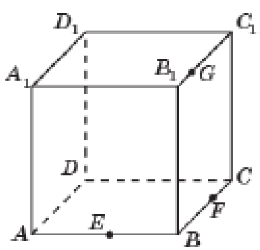


Рис. 14.3

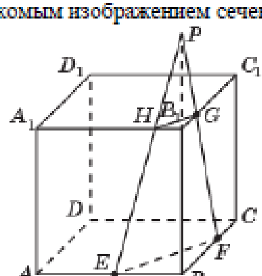


Рис. 14.4

Пример 3. Точки *E*, *F* принадлежат рёбрам куба, выходящим из одной вершины, а точка *G* принадлежит ребру, соседнему с одним из этих рёбер (рис. 14.5). В этом случае для построения сечения, проходящего через эти точки, проведём прямую *EF* и найдём точки *P*, *Q* её пересечения соответственно с прямыми *AD* и *CD*. Проведём прямую *QG* и найдём точку *H* её пересечения с ребром DD_1. Проведём прямую *PH* и найдём точку *I* её пересечения с ребром AA_1. Соединим отрезками точки *F* и *G*, *E* и *I*. Полученный пятиугольник *EFGHI* (рис. 14.6) и будет искомым изображением сечения.

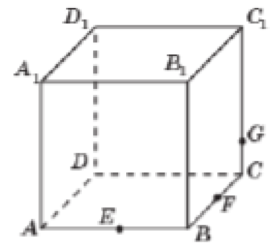


Рис. 14.5

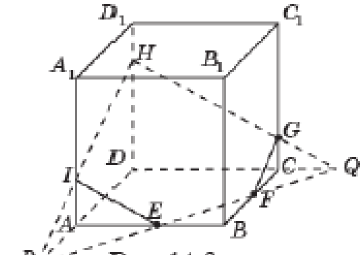


Рис. 14.6

Для построения более сложных сечений используют **метод следов,** с помощью которого находят точку пересечения прямой и плоскости. А именно, пусть прямая *c* проходит через точки *A*, *B* и *A'*, *B'* – соответственно параллельные проекции этих точек на плоскость π. Тогда точкой пересечения прямой *c* с плоскостью π будет точка пересечения прямой *c* с прямой *c'*, проходящей через точки *A'*, *B'* (рис. 14.7).

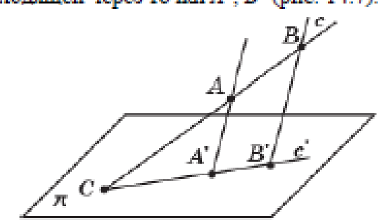


Рис. 14.7

Пример 4. Используя метод следов, построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки *E*, *F*, *G*, принадлежащие попарно скрещивающимся рёбрам этого куба (рис. 14.8).

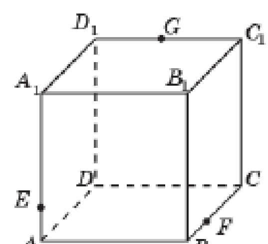


Рис. 14.8

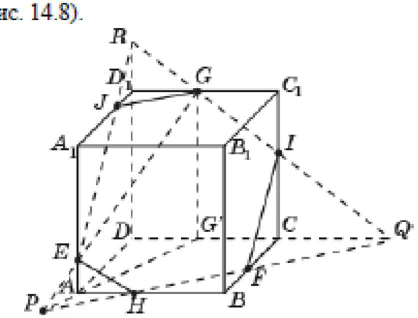


Рис. 14.9

Найдём пересечение прямой *GE*, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью *ABC*. Для этого построим параллельную проекцию *G'* точки *G* на эту плоскость в направлении прямой A_1A (рис. 14.9). Точка *P* пересечения прямых *GE* и *G'A* будет искомой точкой. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости *ABC*.

Проведём прямую *PF* и найдём точки *H* и *Q* её пересечения соответственно с ребром *AB* и прямой *DC*. Проведём прямую *QG* и найдём точки *I* и *R* её пересечения соответственно с ребром CC_1 и прямой DD_1. Проведём прямую *ER* и найдём точку *J* её

Построение сечений

пересечения с ребром A_1D_1. Соединим точки F и I, G и J, E и H отрезками. Многоугольник $EHFIGJ$ и будет искомым изображением сечения куба заданной плоскостью.

Рассмотрим примеры построения сечения куба плоскостью, проходящей через две точки и параллельной некоторой прямой.

Пример 5. Плоскость проходит через точки E, F и параллельна прямой BC_1 (рис. 14.10).

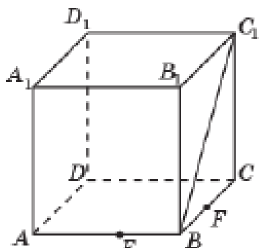


Рис. 14.10

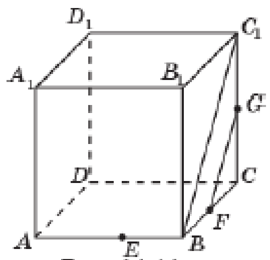


Рис. 14.11

Для построения сечения через точку F проведём прямую, параллельную прямой BC_1, и найдём точку G её пересечения с ребром CC_1 (рис. 14.11). После этого построение сечения сводится к построению сечения плоскостью, проходящей через три точки E, F, G.

Пример 6. Плоскость проходит через точки E, F и параллельна прямой BD_1 (рис. 14.12).

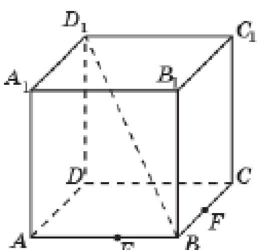


Рис. 14.12

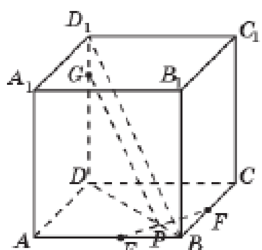


Рис. 14.13

Для построения сечения проведём отрезки EF и BD. Обозначим P их точку пересечения. Через точку P проведём прямую, параллельную прямой BD_1, и найдём точку G её пересечения с ребром DD_1 (рис. 14.13). После этого построение сечения сводится к построению сечения плоскостью, проходящей через три точки E, F, G.

Вопрос

В чём заключается метод следов?

Задачи

1. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и A_1D_1. Определите его вид.

2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1. Определите его вид.

3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины рёбер AB и AD. Определите его вид.

4. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.14).

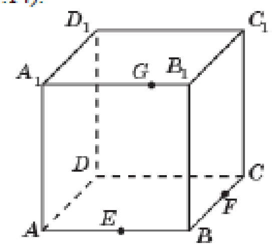


Рис. 14.14

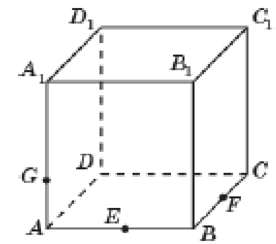


Рис. 14.15

5. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.15).

6*. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.16).

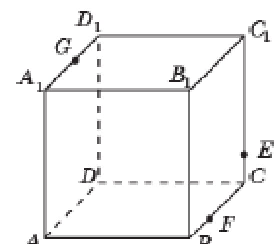


Рис. 14.16

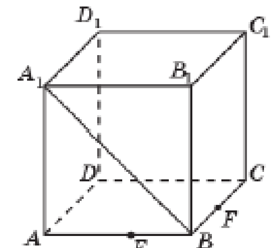


Рис. 14.17

7. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F и параллельной прямой BA_1 (рис. 14.17).

8. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой BD_1 и проходящей через: а) точки E, F (рис. 14.18); б) прямую AB_1.

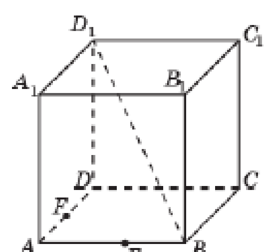


Рис. 14.18

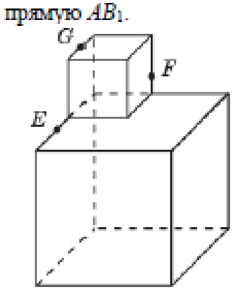


Рис. 14.19

9*. Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны. Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через точки E, F, G (рис. 14.19).

Симметрия

Задачи

1°. Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур в пространстве.

2°. Всегда ли центр симметрии фигуры принадлежит этой фигуре? Приведите примеры.

3°. Может ли фигура иметь более одного центра симметрии? Приведите примеры.

4°. Укажите центр симметрии фигуры, состоящей из двух: а) пересекающихся прямых; б) параллельных прямых.

5°. Укажите центры симметрии фигуры, состоящей из: а) двух пересекающихся плоскостей; б) двух параллельных плоскостей.

6. Имеет ли центр симметрии: а) правильный тетраэдр; б) октаэдр; в) икосаэдр; г) додекаэдр? (Рис. 25.4.)

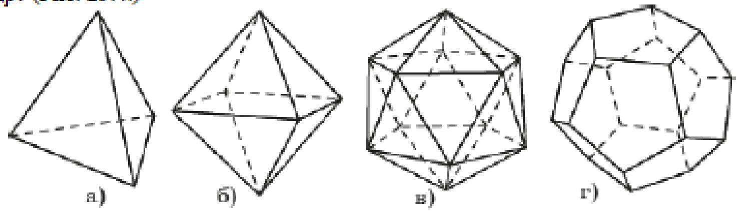


Рис. 25.4

7. Имеет ли центр симметрии: а) параллелепипед (рис. 25.5); б) правильная треугольная призма (ис. 25.6)?

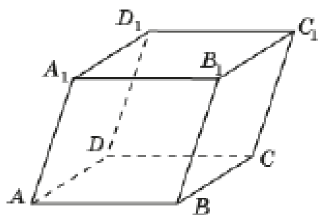


Рис. 25.5

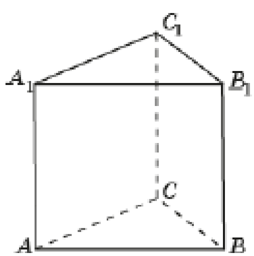


Рис. 25.6

8. Имеет ли центр симметрии: а) правильная шестиугольная призма (рис. 25.7); б) правильная шестиугольная пирамида (рис. 25.8)?

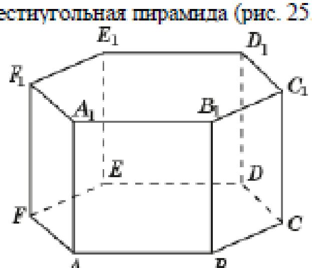


Рис. 25.7

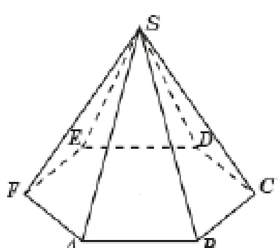


Рис. 25.8

9*. Имеет ли центр симметрии: а) правильная n-угольная призма; б) правильная n-угольная пирамида?

10*. Докажите, что центрально-симметричный многогранник имеет чётное число вершин, рёбер и граней.

11*. На рисунке 25.9 изображён тетраэдр. Изобразите центрально-симметричный ему тетраэдр с центром O.

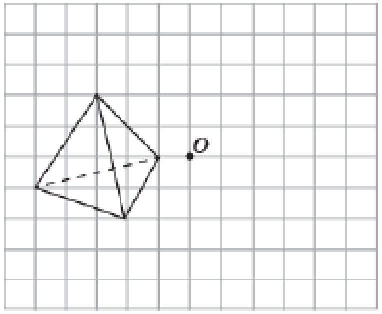


Рис. 25.9

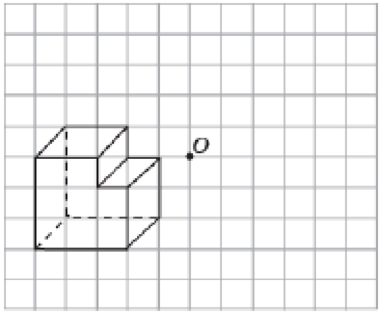


Рис. 25.10

12*. На рисунке 25.10 изображён многогранник. Изобразите центрально-симметричный ему многогранник с центром O.

13*. Имеет ли центр симметрии: а) усеченный тетраэдр; б) усеченный куб; в) усеченный октаэдр; г) усеченный икосаэдр; д) усеченный додекаэдр (рис. 25.11)?

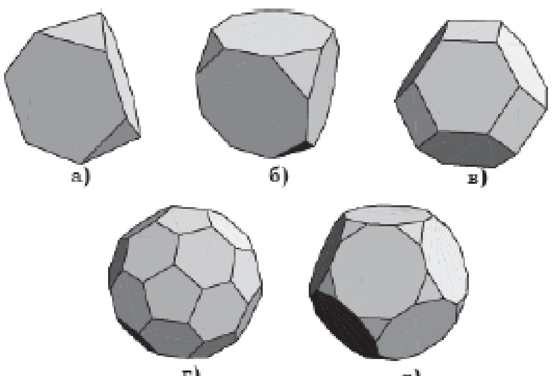


Рис. 25.11

14*. Имеет ли центр симметрии: а) кубооктаэдр; б) икосододекаэдр; в) усеченный кубооктаэдр; г) усеченный икосододекаэдр (рис. 25.12)?

11 класс

Неправильные изображения сферы в учебнике геометрии Л.С. Атанасяна и др.

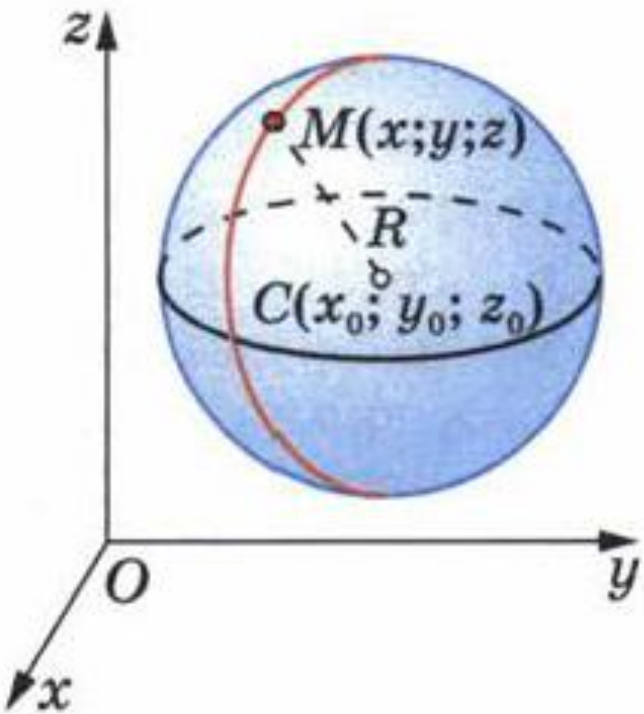


Рис. 159

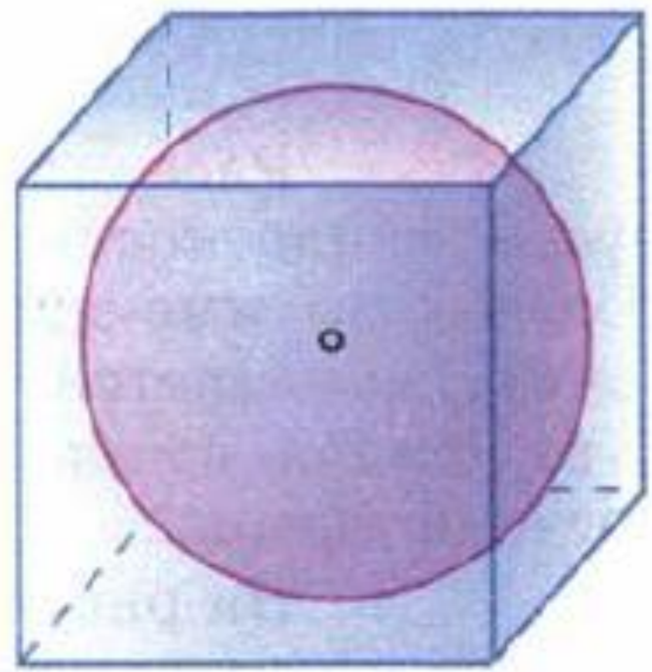


Рис. 163

Изображение комбинаций многогранников и круглых тел в наших учебниках

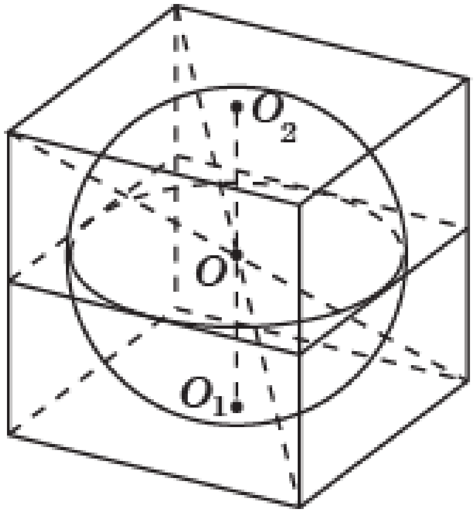


Рис. 36.2

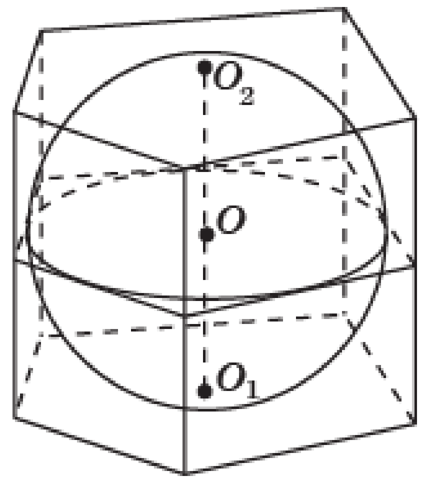


Рис. 36.1

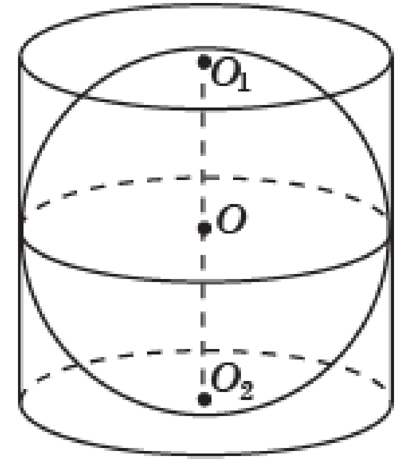


Рис. 37.2

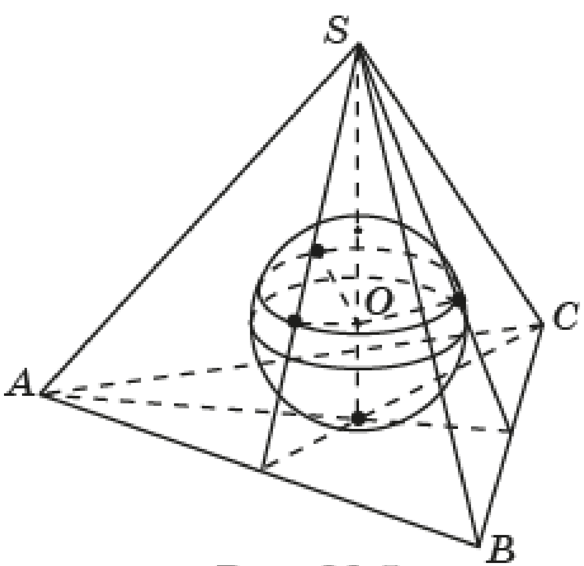


Рис. 36.5

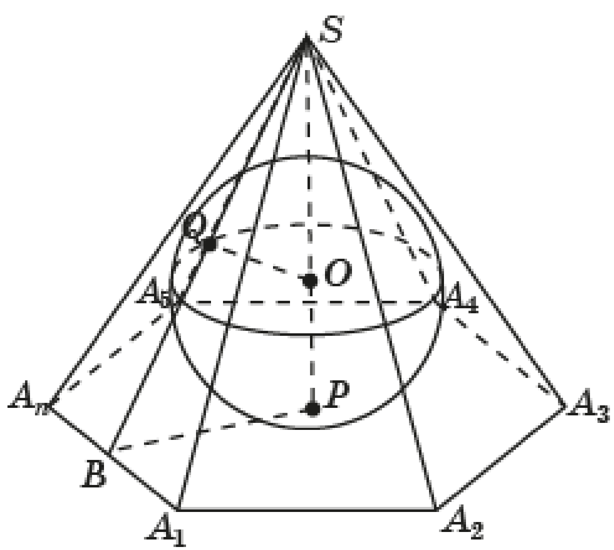


Рис. 36.6

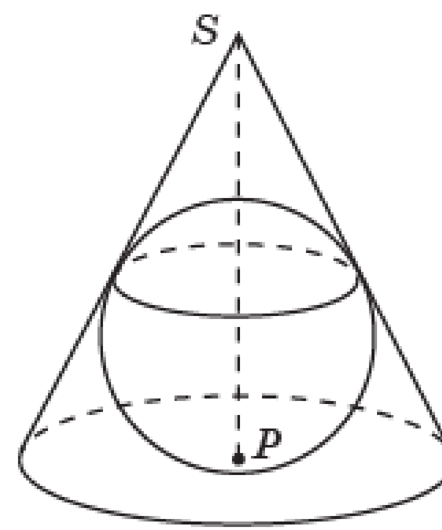
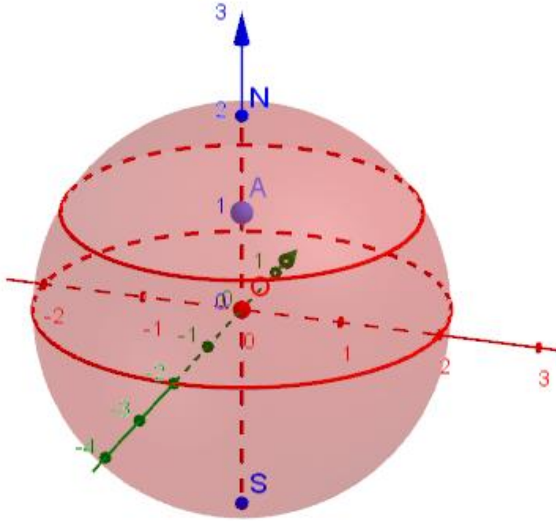
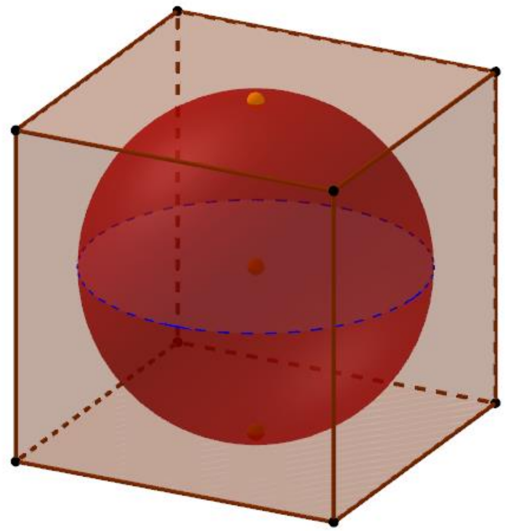
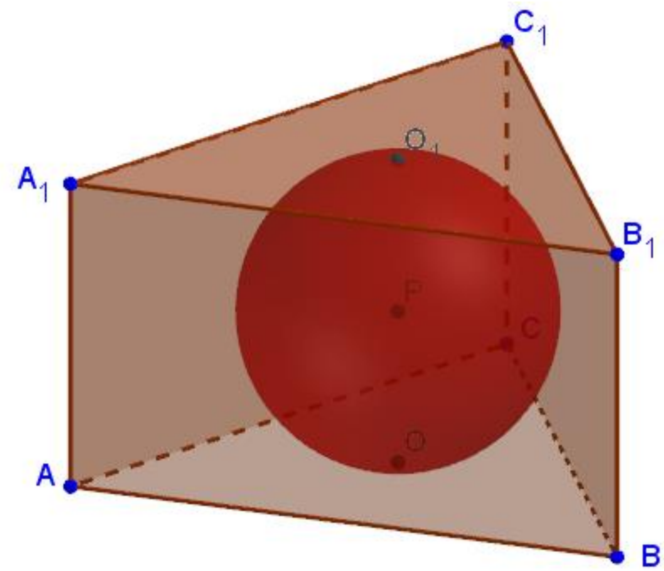


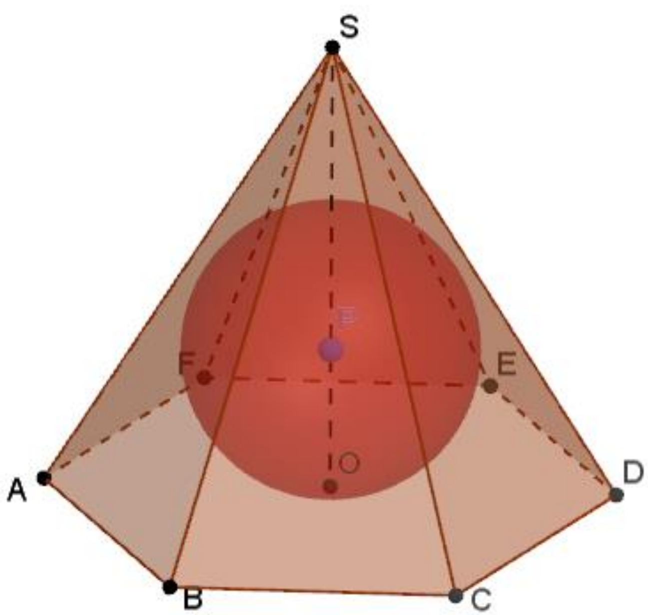
Рис. 38.1

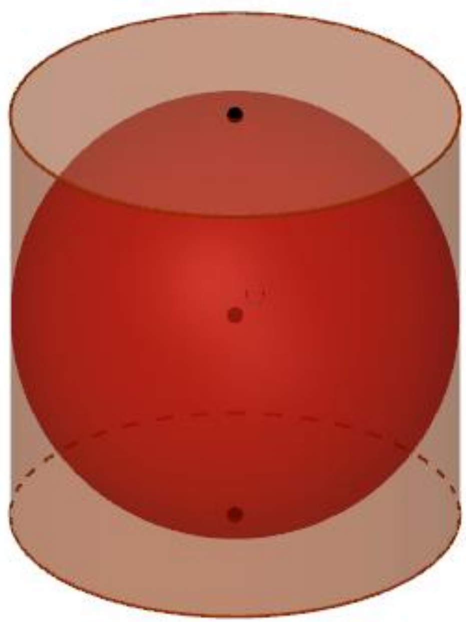
Изображения сферы в программе GeoGebra

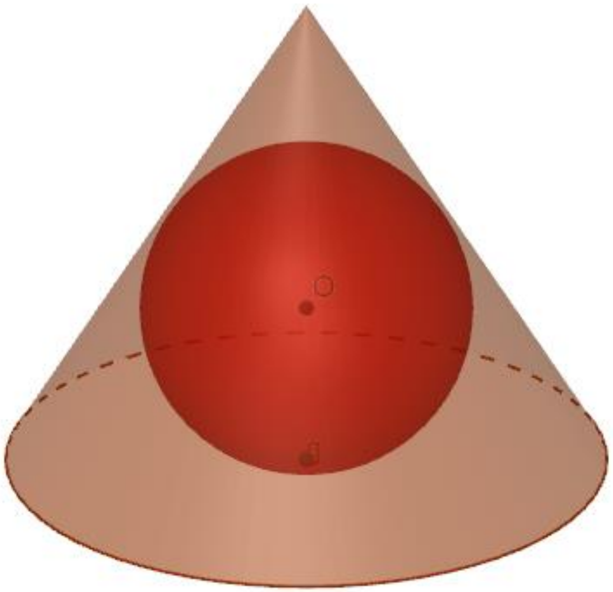












Объёмы в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

75 Объем прямоугольного параллелепипеда

Теорема

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объем буквой V, и докажем, что $V = abc$.

Могут представиться два случая.

1) Измерения a, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что $n \geqslant 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьется на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$. Так как объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (см. п. 74), то объем всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Итак, $V = abc$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-й. Очевидно, $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим

$$a_n b_n c_n \leqslant abc \leqslant a'_n b'_n c'_n, \text{ где } b'_n = b_n + \frac{1}{10^n},\ c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

По доказанному в первом случае левая часть (1) представляет собой объем V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть — объем V'_n прямоугольного параллелепипеда P'_n с измерениями a'_n, b'_n, c'_n. Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P'_n (рис. 176), то объем V параллелепипеда P заключен между $V_n = a_n b_n c_n$ и $V_n' = a'_n b'_n c'_n$, т. е.

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n. \quad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$. Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать. △

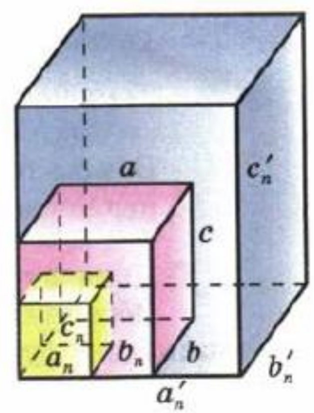


Рис. 176

Теорема

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму P_n (рис. 181). Площадь S_n основания этой призмы выражается формулой

$$S_n = nr\sin\frac{180^\circ}{n} r\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Наряду с призмой P_n рассмотрим призму Q_n, описанную около цилиндра P (рис. 182). Площадь ее основания равна

$$nr\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} r = \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}}.$$

Поскольку призма P_n содержится в цилиндре P, а цилиндр P содержится в призме Q_n, то объем V цилиндра P удовлетворяет неравенствам

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2\frac{180^\circ}{n}} \cdot h. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Так как при $n \to \infty$ $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$, а $S_n \to \pi r^2$, то правая и левая части неравенств (2) стремятся к величине $\pi r^2 h$. Следовательно,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (3)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (3) получим

$$V = S \cdot h.$$

Теорема доказана. △

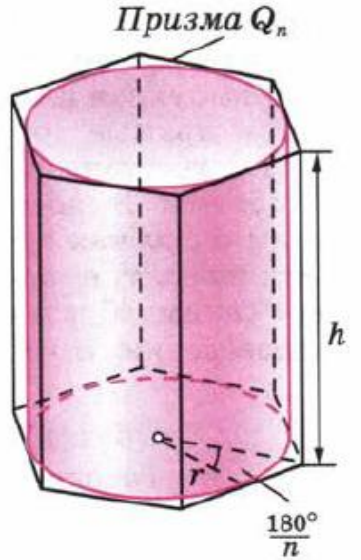


Рис. 182

79 Объем наклонной призмы

Теорема

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

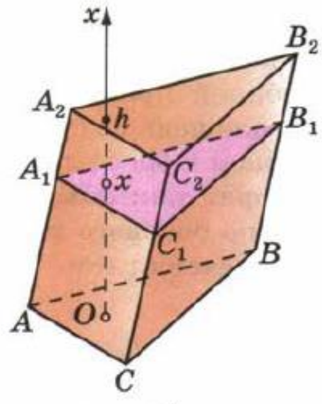
▼ **Доказательство**

Докажем сначала теорему для треугольной призмы, а затем — для произвольной призмы.

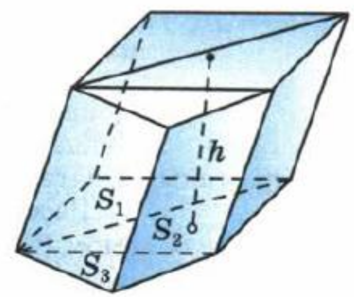
1. Рассмотрим треугольную призму с объемом V, площадью основания S и высотой h. Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям (рис. 185, *а*). Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь получившегося сечения.

Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC (основание призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм (отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны), поэтому $A_1B_1 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1 = BC$ и $A_1C_1 = AC$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трем сторонам. Следовательно, $S(x) = S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$ и $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$



а)



$V = (S_1 + S_2 + S_3)h = Sh$

б)

Рис. 185

80 Объем пирамиды

Теорема

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

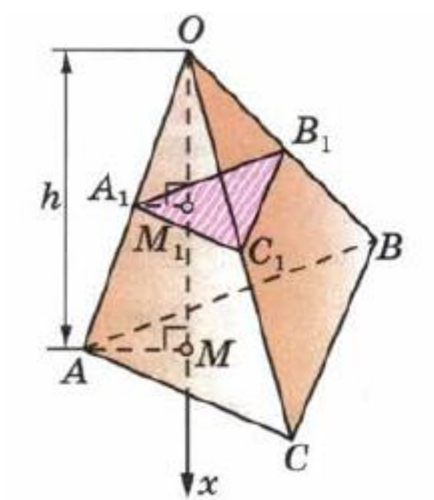
Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объемом V, площадью основания S и высотой h. Проведем ось Ox (рис. 186, a, где OM — высота пирамиды) и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через x абсциссу точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$ и $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$. Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S\cdot h.$$



81 Объем конуса

Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим конус с объемом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введем ось Ox так, как показано на рисунке 187 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 61). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — абсцисса точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

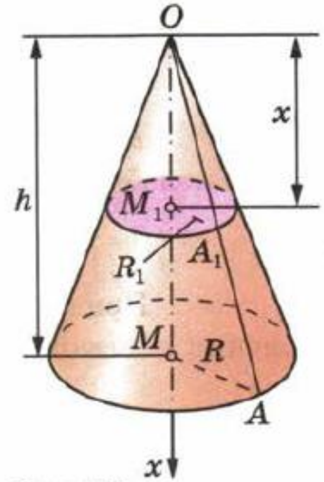


Рис. 187

откуда $R_1 = \frac{R}{h}x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2} x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V = \frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

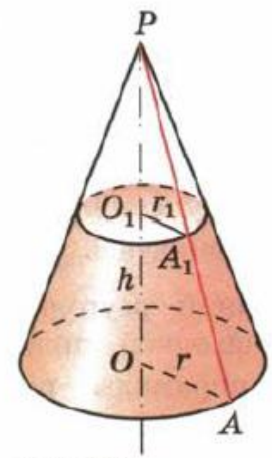


Рис. 188

82 Объем шара

Теорема

Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 192). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — абсцисса точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \qquad (1)$$

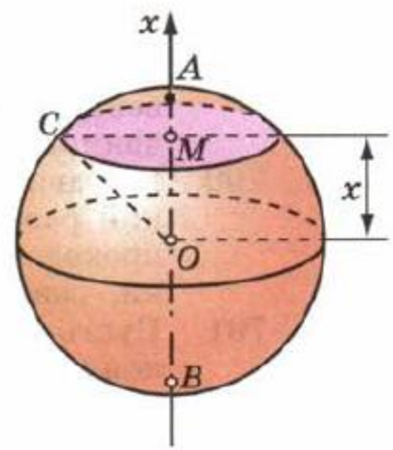


Рис. 192

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

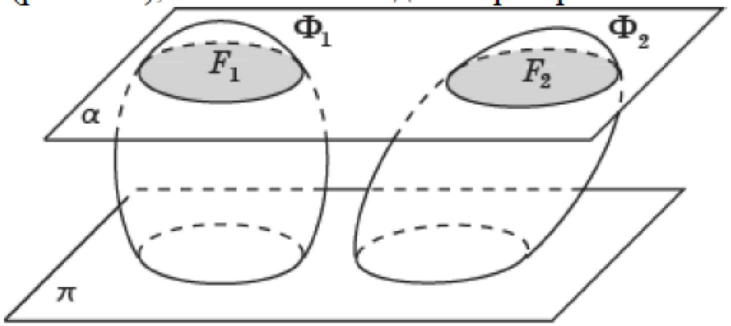
Теорема доказана.

Объёмы в нашем учебнике геометрии

40. Принцип Кавальери. Объём призмы и цилиндра

Для вычисления объёмов пространственных фигур мы будем использовать метод, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598 – 1647) и названный впоследствии принципом Кавальери. Он заключается в следующем.

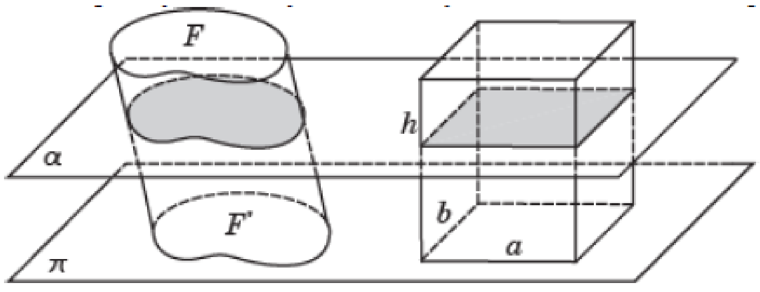
Принцип Кавальери. Если при пересечении двух пространственных фигур плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры одинаковой площади (рис. 40.1), то объёмы исходных пространственных фигур равны.



Теорема. Объём обобщённого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т. е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания, h – высота обобщённого цилиндра.



Следствие 1. Объём V кругового цилиндра, радиус основания которого равен R, а высота равна h, выражается формулой

$$V = \pi R^2 \cdot h.$$

Следствие 2. Объем V наклонного параллелепипеда равен произведению площади S грани параллелепипеда на высоту h, проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h.$$

Объём треугольной пирамиды в нашем учебнике

Теорема. Объём треугольной пирамиды равен одной третьей произведения площади её основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим треугольную пирамиду A_1ABC. Достроим её до треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 41.3).

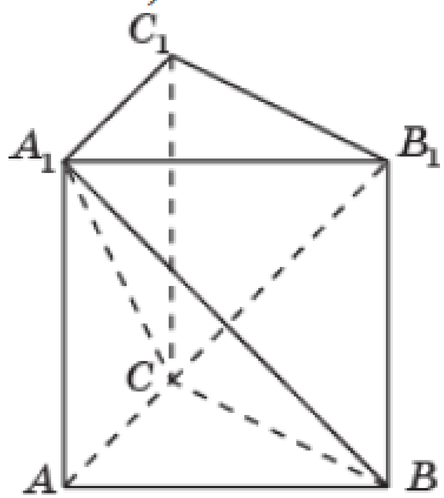


Рис. 41.3

Эта призма составлена из трёх пирамид A_1ABC, A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$. Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания CBB_1 и CB_1C_1. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объёмы. Пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$ имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объёмы. Таким образом, объёмы всех трёх пирамид равны. Учитывая, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объёма V треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S - площадь основания пирамиды, h - её высота. ■

Объём обобщенного конуса в наших учебниках

Теорема. Объём обобщённого конуса равен одной третьей произведения площади его основания на высоту.

Доказательство. Для данного обобщённого конуса рассмотрим треугольную пирамиду с такой же площадью основания и такой же высотой (рис. 41.2). Тогда, по доказанной ранее теореме, их объёмы равны и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S - площадь основания обобщённого конуса, h - его высота. ■

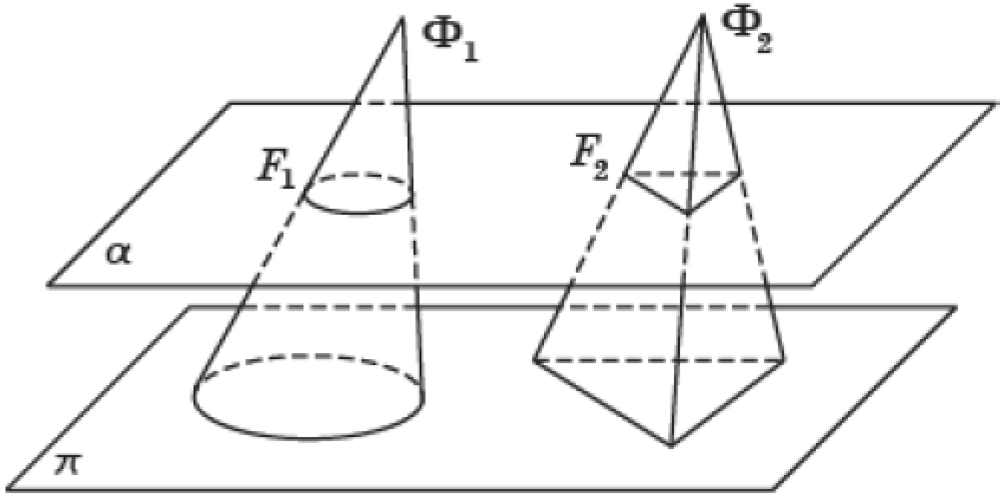


Рис. 41.2

42. Объём шара и его частей

Применим принцип Кавальери для нахождения формулы объёма шара.

Теорема. Объём шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Доказательство. Рассмотрим полушар радиуса R, основание которого расположено в плоскости π. Возьмём цилиндр, основание которого - круг радиуса R, расположенный в той же плоскости π, и высота которого равна R (рис. 42.1).

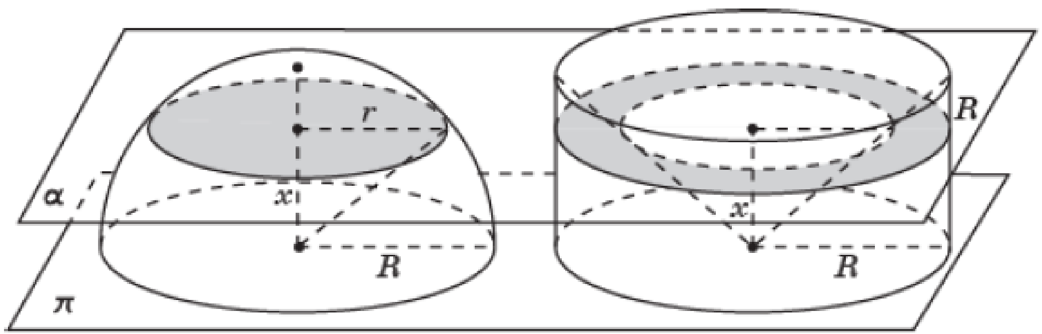


Рис. 42.1

В цилиндр впишем конус, основанием которого является верхнее основание цилиндра, а вершиной - центр нижнего основания цилиндра. Докажем, что данный полушар и фигура Ф, состоящая из точек цилиндра, не попавших внутрь конуса, имеют равные объёмы.

Проведём плоскость α, параллельную плоскости π, на расстоянии x от неё, $0 < x < R$. В сечении полушара этой плоскостью получим круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ и площади $\pi(R^2 - x^2)$. В сечении фигуры Ф получается кольцо, радиус внутреннего круга в котором равен x, а внешнего - R. Площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ и, следовательно, равна площади сечения полушара. Из принципа Кавальери следует, что полушар и фигура Ф имеют равные объёмы. Следовательно, объём V полушара равен разности объёмов цилиндра и конуса, т. е.

$$V = V_ц - V_к = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объём шара вдвое больше объёма полушара с тем же радиусом, следовательно, выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$