№ 1.

	1	2	3	4	5	
21	7	7	7	0	0	Терехова
21	7	7	7	0	0	[illegible]

Ответ: 1567.

Проверка: $1+5+6+7 = 19$

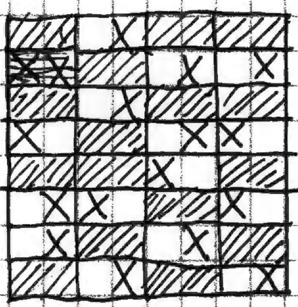
$19 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 3990$

Пояснения:

Заметим, что $3990 = 19 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$

тогда 19 - сумма цифр ~~чисел~~, т.к. если сумма цифр $\geq 19 \cdot 2 > 18 \cdot 2 = 9 \cdot 4$, то цифр больше, чем 4 $\Rightarrow$ в произведении цифр должны входить множ. 2, 3, 5, 7, цифры 6, 5, 7, 1 - подходят.

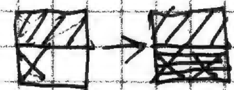
№ 3.



Ответ: у Димы (у второго игрока)

Стратегия: Разобьём доску на 16 квадратов 2×2.

~~Если Коля сходит в какой-то квадрат, где еще нет крестика~~



1) Пусть Коля сходил в какой-то квадрат, тогда Дима поставит доминошку в тот же квадрат, он может это сделать, т.к. после хода Коли в нём осталось ~~хотя бы~~ 3 клетки.

2) Пусть Коля сходил в квадрат, где уже есть крестик, тогда он поставил его в соседнюю клетку с первым крестиком в этом квадрате, т.к. в нём стоит доминошка (из п. 1)), значит образовался прямоугольник 1×2, в котором два крестика $\Rightarrow$ Дима закроет его.

3) Значит на каждый ход Коли Дима может ответить, а т.к. кол-во клеток конечно Дима победит.

№ 2.

~~Рассмотрим мно~~

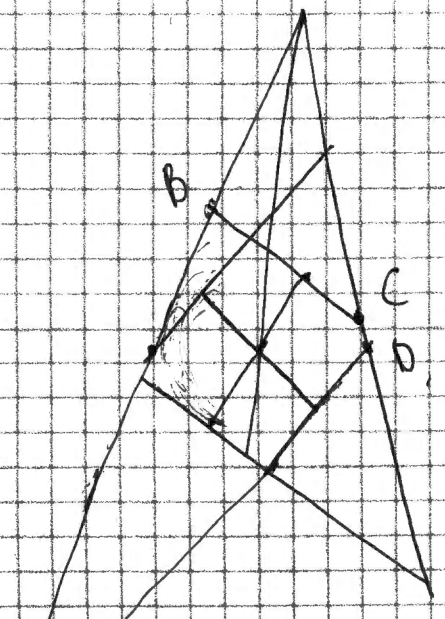
Предположим, что все числа из A и из B различны, тогда рассмотрим множество $A \cup B$, в нём $2n$ различных нат. чисел, сумма которых равна $n^2+n^2=2n^2$. ~~Дал~~

Рассмотрим $\min$ сумму ~~2n~~ данных чисел, т.е. ~~т~~ сумму $2n$ минимальных различных нат. чисел, т.е. сумму первых $2n$ натуральных чисел, т.е. $1, 2, \ldots, 2n$, она равна $\frac{(2n+1)2n}{2}=2n^2+n \geq$ $\geq 2n^2$.

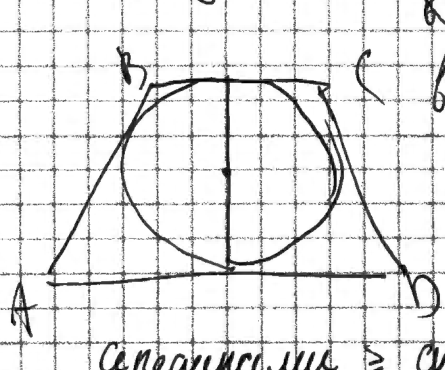
Противоречие, значит в A и в B есть совпадающие числа.

ч.т.д.

№ 5.



Случай, когда $AD \parallel BC$ — ~~очевиден~~ т.к. диаметр окружности превращается в высоту м/у AD и BC, а ср. л. — в наклонную $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ отрезок м/у серединами $\geq$ диаметра.

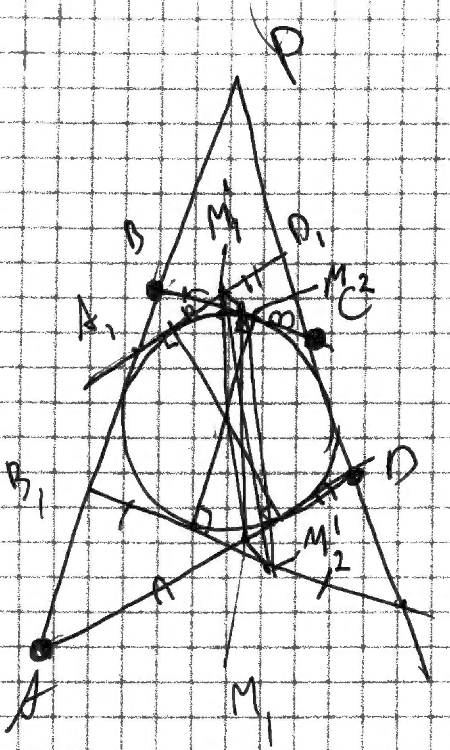


→

M_1 – середина AD

M_2 – середина BC M_1' – середина A_1D_1

M_2' – середина B_1C_1



~~От~~ проведем касательные $B_1C_1 \parallel BC$ к ω и $A_1D_1 \parallel AD$ к ω, тогда диаметр ω – высота м/у A_1D_1 и AD и м/у BC и B_1C_1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ диаметр $\omega \le M_1'M_1$, $M_2'M_2$.

Заметим, что при некоторой гомотетии в P, BD_1CA_1 – перейдет в AB_1DC_1, т.е.

$M_1'M_2 \parallel M_1M_2'$ $\Rightarrow$ $M_1M_2 \ge$

$\ge$ м/у min $(M_1M_1'\,;\ M_2M_2')$ (диагональ трапеции) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~M_1M_1'~~ $M_1M_2 \ge$ высота м/у A_1D_1 и AD, т.е.

$\ge$ диаметра.

ч.т.д.

11/10-18

Девятков
Петр.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	4	0	0	18
7	7	4	0	0	18

№1.

1) умножим $\cos x$ и $\cos x$, получим $\cos^2 x$.

2) сложим $\cos^2 x$ и $\cos x$ получим $\cos^2 x + \cos x$.

3) $\cos \pi = -1 \Rightarrow \cos^2 \pi + \cos \pi = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$.

Ответ: Да, можно ($\cos^2 x + \cos x$).

№2. сер. пер. – серединный перпендикуляр

Обозначим вершины прямоугольника как показано на рис. 1

пусть O – центр окр-ти описанной около $A'A''B'B''C'C''D'D''$

тогда ~~он~~ O – ~~центр~~ точка пересечения сер. перов к $A''B'$, $B''C'$, $C''D'$, $D''A'$ (т.к. O равноуд. от $A', A'', B', B'', C', C'', D', D''$)

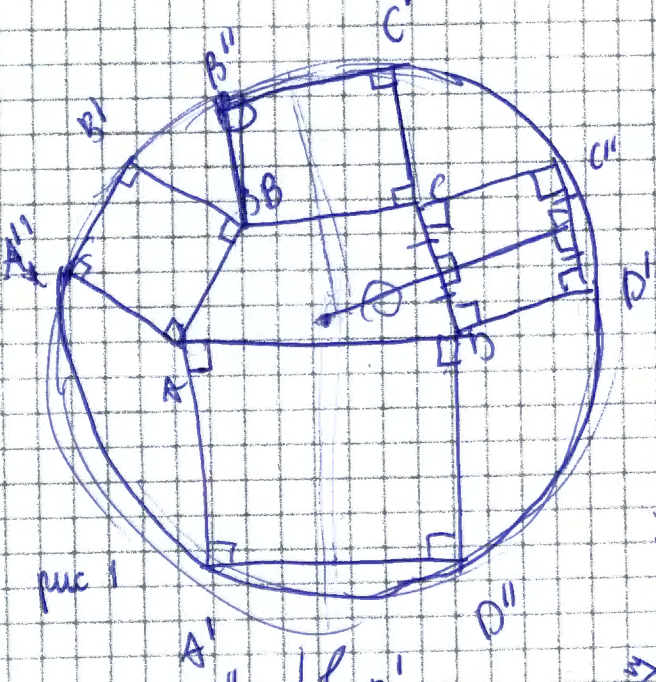


рис 1

Рассмотрим $A''B'BA$ (рис 2)

ℓ – сер. пер. к $A''B'$, т.к. $A''B' \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell \perp AB \Rightarrow \ell \parallel A''A \parallel B'B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме Фалеса $\ell \cap AB$ в середине (т.к. $A''B'$ пересек в середине),

т.е. ℓ – сер. пер. к AB.

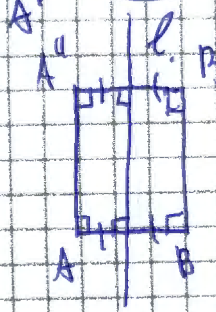


рис 2

Аналогично для других прямоугольников $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O – точка пересечения сер. перов к AB, BC, CD, $DA \Rightarrow$

$\Rightarrow$ O – равноудалена от A, B, C, D $\Rightarrow$ O – центр окр-ти описанной около $ABCD \Rightarrow$ $ABCD$ – вписанный.

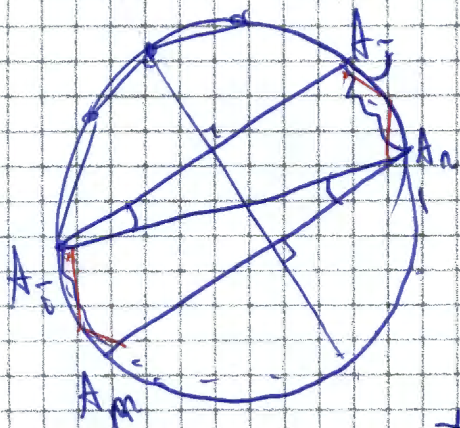
ч.т.д.

М10-18

~~Доб~~ 8

Лемма: Если в правильном n-угольнике $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$, $A_i A_j \parallel A_m A_n$, ~~то~~ ~~$d(A_i, A_m) = d(A_j, A_n)$~~ причем A_i и A_m лежат в одной полуплоскости относительно диаметра окр-ти, описанной около n-угольника, перпендикулярного $A_i A_j$, то $d(A_i, A_m) = d(A_j, A_n)$, (где $d(A_x, A_y)$ – ~~тот~~ минимальное кол-во вершин м/у A_x и A_y.

Док-~~ство~~во: проведем $A_i A_n$, заметим, что $\angle A_j A_i A_n = \angle A_i A_n A_m$ (т.к. $A_i A_j \parallel A_n A_m$) $\Rightarrow$ дуга $\overset{\frown}{A_j A_n} = \overset{\frown}{A_i A_m}$ (т.к. правильный многоугольник вписан). Значит дуга $\overset{\frown}{A_j A_n}$ включает в себя дуг типа $\overset{\frown}{A_x A_{x+1}}$ столько же сколько дуга $\overset{\frown}{A_i A_m}$, т.к. ~~равны~~ каждую дугу типа $\overset{\frown}{A_x A_{x+1}}$ стягивает хорда (сторона n-угольника) типа $A_x A_{x+1}$ $\Rightarrow$ м/у (A_i и A_m) и (A_j и A_n) одинаковое кол-во сторон $\Rightarrow$ вершин тоже. лемма доказана



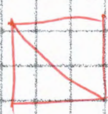
Пусть нашелся хороший многоугольник.

1) если ~~об~~ паралл. сторон образованы диагоналями, тогда ~~пусть то~~ по предположению леммы между вершинами этих диагоналей d равные, т.е. в этом многоугольнике $2d+4$ вершин $\Rightarrow$ $2d+4$ сторон (чет) противоречие.

Нет

2) пусть параллельна сторона и диагональ, аналогично пункту 1)

3) если параллельны две стороны => изначальный
n-угольник имеет чётное кол-во вершин.
следствие из леммы.
но т.к. кол-во вершин у каждого
многоугольника разбиения - нечётно =>



Неб а во всём многоугольнике нечётное кол-во
вершин
противоречие.

M10-18

№3

Пусть это возможно, тогда.

наши $3n$ подряд идущих числа —
$t+1, t+2, t+3, \ldots, t+3n$.

У нас есть ax^2+bx+c у которого оба корня целые $\Rightarrow$ их сумма и произведение тоже целое.

x_1 и x_2 — корни.

по т-ме Виета $\left.\begin{matrix} x_1+x_2=\frac{-b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow a|b$ и $a|c$, $\Rightarrow$ $\min(b,c)\geq 2a$,

$\max(b,c)\geq 3a$.

пусть $a\geq t+n+1 \Rightarrow 3a \geq 3t+3n+3 > t+3n. \Rightarrow$
$\Rightarrow a_i \in \{t+1, t+2, \ldots t+n\}$, заметим, что этих чисел в точности $n \Rightarrow a_i$ принимает все значения от $t+1$ до $t+n$, н.у.о. $a_k = t+k$. ~~Если b_k и c_k~~

тогда $\max(b_n; c_n) \geq 3a_n = 3t+3n \geq 3n \Rightarrow$
$t=0$, тогда наши числа $1, 2, \ldots, 3n$,
$a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Докажем по индукции для $n\geq 2$

База: $n=2$
числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$

Заметим, что $a_n=2 \Rightarrow \{b_n; c_n\}=\{4, 6\}$

тогда $a_1=1$ имеем трёхчлен
x^2+3x+5 или x^2+5x+3
$D=9-20<0$ $D=25-12=13 \Rightarrow$ корни - нецелые

Пусть для всех $n\geq k$ верно.