М11-05

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 2 | 0 | 23 |



Задача 11.1

Предположим, что среди наших n целых чисел хотя бы 9 положительных. Тогда произведение двух наибольших чисел это есть произведение $a \times b$ двух пол-х чисел ($a>0$ и $b>0$). Но $a \cdot b = 77$. т.к. a и b - натур. а $77 = 7 \cdot 11$ то считая $a \geq b$ имеем $a=77$ $b=1$ или $a=11$ $b=7$. Но тогда пол-х чисел не больше чем $b+1$ (если взять $1, 2, \dots b$, а их ровно $b+1$, если же сущ. x (среди наших n чисел) такое что ~~$x \in (b;a)$~~ $x > b$ и $x \neq a$ то произведение 2 наиб-х будет $x \cdot a > a \cdot b = 77$) но т.к. $b=7$ или $b=1$ то пол-х не больше чем $7+1=8$, противоречие с предп-м о том что их $9 \to$ пол-х $\leq 8$. Аналогично рассуждая о кол-ве отриц-х чисел получим что их не больше 8. Тогда всего чисел не больше $8+8+1 = 17$ (т.к. ещё может быть 0).

Приведём пример подтв-й что n может быть $=17$. Возьмём числа $-11, -7, -6, -5, \dots -1, 0, 1, \dots 6, 7, 11$. (т.е. $-11$, $+11$ и все целые числа $\in [-7; 7]$) Тогда п-е двух наим-х равно $-7 \cdot (-11) = 77$, а двух наиб-х $11 \cdot 7 = 77$, при этом чисел было $2 + (7-(-7)+1) = 17$. Поэтому данный пример удов-т условию, что завершает решение.

Ответ: наиб-е $n = 17$.

Задача N 11.2

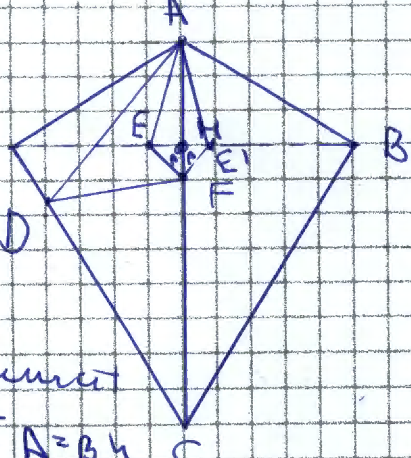
Предположим, что числа принадл-го A и прин-го B

кол-во различных
не найдётся, тогда ~~среди~~ чисел леж-х в A или леж-х в B равно $2n$ ~~различных~~ (т.к. в A $n$ разл-х, в B – $n$ различных и нет ни одного леж-го в A и в B)
~~но тогда сложить числа $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ (где $a_i$ – это~~
Пусть тогда числа леж-е в A это $a_1, a_2, \dots a_n$, а леж-е в B это $b_1, b_2, \dots b_n$. Тогда из условия $a_1+a_2+\dots+a_n=n^2$ и $b_1+b_2+\dots+b_n=n^2 \Rightarrow a_1+a_2+\dots+a_n+b_1+b_2+\dots+b_n=2n^2$ но $\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{j=1}^{n} b_j \geq 1+2+3+\dots+2n$ (т.к. малое из всех чисел $\geq 1$, второе $\geq 2$, ... самое большое $\geq 2n$ (ибо опять же все $2n$ чисел различны) но $1+2+3+\dots+2n=\frac{2n(2n+1)}{2}=2n^2+n \leq \sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{j=1}^{n} b_j=2n^2$.

Противоречие ибо $2n^2+n>2n^2$ (а не $\leq$) $\rightarrow$ предположение неверно а значит найдётся число леж-е и в A и в B. ч.т.д.

Задача N11.3

Пусть $\angle BAD=\angle CAE=\alpha$, а $\angle AFE=\angle CFD=\beta$.




Отметим точку $B'$ симметричную B отн. AC, раз $BH \perp AC$, то $B, H, B'$ на одн. прямой. Отметим $E'$ – точку симметр-ю ~~AC отн.~~ E отн. AC. Очевидно раз D, E, H лежат на одной прямой, то и точки $D, E, H, E', B'$ лежат на одной прямой. Тогда раз $\angle EFA=\beta$ и $\angle CFD=\beta$, то $\angle DFE=180^\circ-\angle AFE-\angle CFD=180-2\beta$. Раз $\angle AFE'=\angle AEF=\beta$ (т.к. △-и $\triangle AEF$ и $AE'F$ симметричны отн. прямой AC) то $\angle DFE'=$
$=\angle DFE+\angle EFA+\angle AFE'=180-2\beta+\beta+\beta=180^\circ$.

М11-05



Это обозначает что точки $D, F, E'$ лежат на одной прямой. Раз $\angle CAE' = \angle CAE$ (свойство симметрии отн. прямой $AC$), то $\angle DAE' = \angle DAC + \angle CAE' = \angle DAC + \angle A =$
$= \angle DAC + \angle BAD = \angle BAC$. Получили равенство: $\underline{\angle DAE' = \angle BAC}$. Раз $BH$ - высота в $\triangle ABC$ то

$\angle ABH = 180^\circ - \angle BAC - \angle BHA = 180^\circ - \angle BAC - 90^\circ = 90^\circ - \angle BAC$.
Но $\angle ABC = 90^\circ = \angle ABH + \angle CBH$ откуда $\angle CBH = 90^\circ - \angle ABH =$
$= 90^\circ - 90^\circ + \angle BAC \rightarrow \underline{\angle CBH = \angle BAC}$ но $\angle CBH = \angle DBE'$,

получили что $\angle DBE' = \angle DAE' = \angle BAC$, а значит точки $A, B, D, E'$ лежат на одной окр-и. Тогда и $\angle ABE' =$
$= \angle ADE'$ (т.к. $B$ и $D$ в одной полупл-и отн. $AC \Rightarrow$ отн. $AE'$, и как следствие оп-ся на одну дугу).
Тогда $\angle ADE' = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABE'$ но тогда в $\triangle DAE'$ имеем $\angle DAE' = \angle BAC$ и $\angle ADE' = 90 - \angle BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DE'A = 180^\circ - \angle DAE' - \angle ADE' = 180^\circ - 90^\circ + \angle BAC - \angle BAC =$
$\underline{= 90^\circ}$. Получили $\underline{\angle DE'A = 90^\circ}$. Раз точки $D, F, E'$ лежат на одной прямой (это док-ся ранее) то $\angle FE'A = \angle DE'A$. Из симметрии отн. прямой $AC$ $\angle AEF = \angle AE'F = \angle DE'A = 90^\circ \rightarrow \underline{\angle AEF = 90^\circ}$

ч.т.д.

## Задача 11.4.

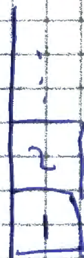
Предположим противное: каждое из чисел $p+1$, $2p+1$, ..., $\frac{p-1}{2} \cdot p+1$ представляется в виде: $p+1 = a_1 b_1$, где $a_1, b_1 > 1$, $2p+1 = a_2 \cdot b_2$ где $a_2, b_2 > 2$, ...
$\frac{p-1}{2} \cdot p + 1 = a_{\frac{p-1}{2}} \cdot b_{\frac{p-1}{2}}$ где $a_{\frac{p-1}{2}}, b_{\frac{p-1}{2}} > \frac{p-1}{2}$. Тогда
Заметим что $a_i \neq b_j$ при $i, j$ - целых $\in [1; \frac{p-1}{2}]$, $i \neq j$
$a_i \neq a_j$

действительно рассмотрим разность $a_i \cdot b_i - a_j b_j$ если
$a_i = b_j$ то $a_i \cdot b_i - a_j \cdot b_j = a_j (b_i - a_j) = (i-j) \cdot p$ но
тогда $a_j (b_i - a_j) \vdots p \Rightarrow (b_i - a_j) \vdots p \Rightarrow = 0$ и $a_i b_i = a_j b_j \Rightarrow$
$\Rightarrow i - j \vdots ((b_i - a_j) = 0$ т.к. если $b_i - a_j \neq 0$ то $i - j \vdots a_j$
(т.к.

Задача №11.5

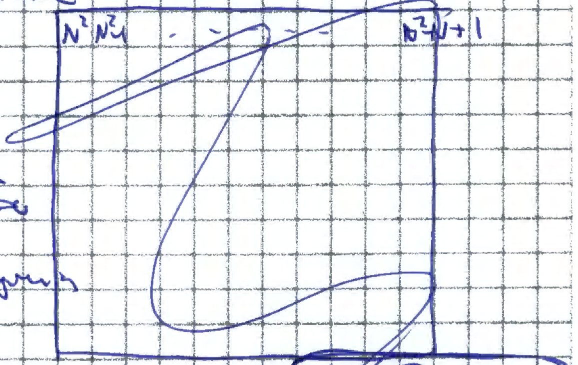
~~Докажем лемму~~: Пусть $S$ – искомая разность. ~~Тогда если~~ (т.е. разность между $\Sigma$ ~~к~~ больших и $\Sigma$ мал.) тогда если для расстановки $R$ чисел на доске $S = a$, то поменяв в $R$ 2 столбика (или строки) местами ~~R~~ у пол-й раст-ки $R'$ $S = a$. Действ-о ~~каждой~~ ~~стр. и ст~~ наборы чисел в кажд. строке и кажд. столбце не поменялись, поэтому $S = a$.

~~Рассмотрим~~ Тогда не умаляя общности будем считать что 1 – в левой нижней клетке. Тогда



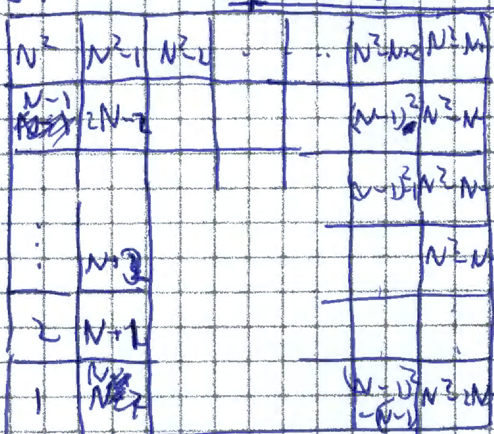



Рассмотрим ~~в~~ клетку где стоит 2. Ряд 2 не может быть большей в своей строке, а если из её столбца убрать 2 то Σ меньших не ~~..~~ уменьш-ся, Σ больших не изменится ⇒ Σ не умен-ся можно считать что 2 и 1 в одном столбце или строчке (число 2 поменяем с числом в первом столбце и том же ряду что 2).




Аналогично если 2 в одной строке (1) то поменяем 2 с числом под 1, сумма не уменьшится. ~~Ан~~ Аналогичными операциями вверх и столбцу 1 ay и.в. клетки (см далее)

Пример: рассм-м расстановку чисел как на рис справа. Тогда




$\Sigma$ больших $= (N^2-2N+2)\cdot N + 0 + 1 + \ldots + N-1 = \frac{N(N-1)}{2} + N(N^2-2N+2)$

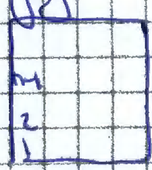
$\Sigma$ меньших есть $\Sigma$ чисел в нижнем ряду т.е. $1 + N + N+(N-1) + \ldots$

$= N + (N-1)(N-1) + (N-1)(N-2) + \ldots + (N-1)\cdot 2 + (N-1) = N + (N-1)\left(\frac{N(N-1)}{2}\right) = N + \frac{(N-1)^2\cdot N}{2}$.

Тогда искомая разность $S = \frac{N(N-1)}{2} + N(N^2-2N+2) - N - \frac{N(N-1)^2}{2}$.

$\boxed{\text{Далее}}$

Тогда меняем раст-у и ~~уменьшим~~ увеличим S на ряду как на рис справа. Рассмотрим на n, и аналогично 1 повторим рассуждения для чисел $n, n+1, \ldots, 2(n-1)$



11-05

М11-21

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 33 |



Задача 11.6

Допишем на доску произведение $(x+1)\cdot(x^2+1)=$
$=x^3+x^2+x+1=p(x)$. А затем из нап-й $p(x)$ вычтем $x^2+1$, получим $p(x)-x^2-1=x^3+x^2+x+1-x^2-1=x^3+x=f(x)$
у полученной функции $f(x)=x^3+x$ при $x>0$ (т.е. при пол-х $x$) ~~$f(x)=x^3+x$~~ $x^3>0$, $x>0$, $f(x)>0 \Leftrightarrow$
(т.е. принимает пол-е и неотриц. значения)
а при $x<0$ $x^3<0$, $x<0 \to f(x)<0$ (т.е при отриц. знач-х аргум прини отриц. знач-е $\to$ не полож-е.)
Тогда полученная функция удовлетворяет условию задачи, что и требовалось.

Задача 11.7

Ответ: Да, можно.

Приведём алгоритм покраски нат-х чисел в чёрный и белый цвета. ~~Для этого покажем по индукции по n, что все числа от 1 до $2^n$ можно покрасить. База: n=1 покрасим 1 в белый, 2 в чёрный цвета. Переход~~ Скажем сразу, что при $a\geq 1$ и $b\geq 1$, $a,b\in\mathbb{N}$
$a+b=2^n$ тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ одной чётности (ибо $2^n$ - чётное при $n\neq 0$, а ~~при~~ $a+b\geq 2 \to n\neq 0$). ~~Если~~ Для $a$ и $b$ - нечётных покрасим все числа от 1 до $2^n$ дающие ост. 1 при делении на 4 в белый, а дающие 3 при делении на 4 в чёрный, тогда раз $a+b\geq 3$ и $a+b=2^n$ то $2^n \vdots 4$ (т.к. $n\geq 2$), при $n<2$ $a+b>2^n$) то $(a+b)\vdots 4$ и тогда либо $a\equiv 1$ и $b\equiv 3$ и они разноцветны, либо $a\equiv 3$ и $b\equiv 1$ и они опять же разноцветны.

М 11-21

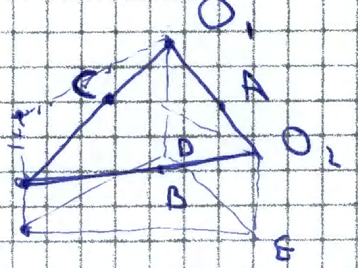


Для $a$ и $b$ - ~~не~~ чётных покажем утв-е по индукции. Покажем алгоритм покраски удовлетв-й условию для $a, b < 2^n$ и $a, b$ - чётных. База $n=1$ ~~очевидна~~ ~~на~~ ~~т.к.~~ ~~$a, b < 2$~~ ~~и~~ ~~чётных~~ ~~не~~ ~~существует~~, а очевидна.
Пусть покрасили все чётные числа от 2 до $2^k$, покажем раск-ку для всех чётных от 2 до $2^{k+1}$. Для этого возьмём и покрасим все чётные от 2 до $2^k$ так, чтобы ~~покраска~~ для всяких нат-х $i$ и $j$ $i \neq j$, $i, j \in [2; 2^{k})$, $i, j$ - чётные, $i+j \neq 2^n$ где $n$ - нат-е. Это мы можем сделать по предп-ю индукции. Далее для всякого чётного $m \in (2^k; 2^{k+1})$ рассмотрим чётное $x \in [2; 2^{k+1})$ и $x \neq m$. Тогда $2^k + 2 \leq m + x < 2^{k+1} \cdot 2 = 2^{k+2}$. Тогда $2^k < m + x < 2^{k+2}$ если $m + x = 2^{k+1}$ то раз $m \geq 2^k$ то $x \leq 2^k$ причём $x \neq m \Rightarrow m > 2^k$, $x < 2^k$.
Покрасим $m$ в цвет прот-й $x$. Тогда сделаем такую операцию для всех $m$ не покрашенных, если остались не пок-е чёт числа $\in [2; 2^{k+1})$ покрасим произвольно. Тогда для любой пары $a, b \in [2; 2^k)$ условие вып-о по предп-ю, для любой пары $a, b$ где $a \in [2^k; 2^{k+1})$ ~~а~~ ~~$b$~~ ~~произвольное~~ а $b \in [2; 2^{k+1})$ условие выполнено. Значит условие стал что сумма любых двух одноцветных ≠ степени 2 выполнено (т.к. ~~в~~ ~~а~~ к для любых нат-х $a, b$ $a+b = 2^n$ тогда и только тогда когда $a, b$ - разные). Поэтому такая раскраска удовлетв. условию, что и требовалось.

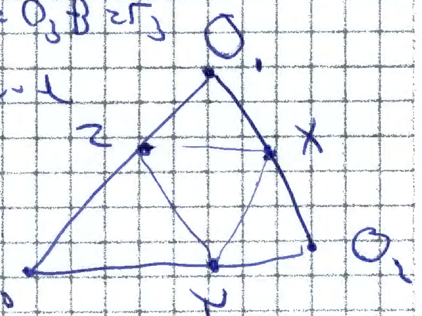
Задача 11.9.

Пусть центры сфер ~~соотв-о~~ $O_1$, $O_2$, $O_3$ $S_1, S_2, S_3$ соотв-о точки $O_1, O_2, O_3$

Тогда пусть т-и касания $S_1$ с $\alpha = D$, $S_2$ с $\alpha = E$, а $S_3$ с $\alpha = F$, и $S_1$ с $S_2$ кас-ся в $A$, $S_2$ с $S_3$ в $B$, $S_1$ с $S_3$ в $C$. Тогда заметим, что раз $A$ – точка кас-я $S_1$ и $S_2$ (причём внешнего касания) то $A$ лежит на $O_1O_2$ причём $O_1A = r_1$, $O_2A = r_2$




где $r_1$, $r_2$, $r_3$ – соотв. радиусы сфер $S_1, S_2, S_3$. Тогда аналог-о записав для точек $B$ и $C$ получим $O_1A = O_1C = r_1$, $O_2A = O_2B = r_2$, $O_3C = O_3B = r_3$. ~~Тогда~~ Докажем что $A, B, C$ – точки кас-я впис в $O_1O_2O_3$ окр-и. Для этого предп-м противное, пусть и-ок-ть впис в $O_1O_2O_3$ кас-ся $O_1O_2$ в $X$, $O_2O_3$ в $Y$, $O_3O_1$ в $Z$. и $O_3Z = O_3Y = c$, $O_2Y = O_2X = b$, $O_1X = O_1Z = a$ тогда имеем систему уравнений




$$\begin{cases} O_1X + XO_2 = a + b = O_1O_2 = r_1 + r_2, \\ O_2Y + O_3Y = b + c = O_2O_3 = r_2 + r_3, \\ O_3Z + O_1Z = a + c = O_1O_3 = r_1 + r_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = r_1 + r_2, \\ b + c = r_2 + r_3, \\ c + a = r_3 + r_1. \end{cases}$$

Вычитая из 3его 2ое получим $a - b = r_1 - r_2$ складывая с первым получим $2a = 2r_1 \to a = r_1 \to Z = C$ из первого $b = r_2 \to B = Y$. $\to X = A$

Тогда опис-е вокруг $ABC$ ок-ть есть впис-е в $O_1O_2O_3$ ок-ть, пусть её радиус есть $X$.

Тогда как известно ~~$X \cdot p_{ABC} = S$~~ $X \cdot p_{O_1O_2O_3} = S_{O_1O_2O_3}$ но т.к. $p_{O_1O_2O_3} = r_1 + r_2 + r_3$ и $S_{O_1O_2O_3} = \sqrt{p_{O_1}\cdot(p - O_1O_2)(p - O_2O_3)(p - O_1O_3)}$

то $X = \sqrt{\dfrac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$. Теперь найдём у-радиус описанной возле DEF окр-и. Для этого найдём стороны DE, EF, FD. Искать будем пользуясь тем что $O_1D \perp (DEF) \to O_1D \perp DF$ и свойством перпен-ами и т. Пифагора. Так получим $DE=\sqrt{O_1O_2^2-(|O_1D-O_2E|)^2}$, $EF=\sqrt{O_2O_3^2-(|O_2E-O_3F|)^2}$, $FD=\sqrt{O_3O_1^2-(|O_1D-O_3F|)^2}$ или же подставив

$DE=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$, $EF=2\sqrt{r_2r_3}$, $FD=2\sqrt{r_1r_3}$. Запишем теорему кос-в для DE получим $4r_1r_2=4r_2r_3+4r_3r_1-2\cdot\cos EFD\cdot 4r_3\cdot\sqrt{r_1r_2}$

$$\cos EFD=\frac{r_3(r_2+r_1)-r_1r_2}{2r_3\cdot\sqrt{r_1r_2}} \to \sin EFD=\sqrt{1-\cos^2 EFD}$$

т.к. $\sin\geq 0$ ибо $\angle EFD\leq 180$.

Тогда

$$\sin EFD=\sqrt{\frac{4r_3^2\cdot r_1r_2-r_3^2(r_2+r_1)^2-(r_1r_2)^2+2r_1r_2r_3(r_2+r_1)}{4r_3^2\cdot r_1r_2}}$$

Тогда из т. синусов для $\triangle EFD$: $y=\frac{DE}{2\cdot\sin\angle EFD}=$

$$=\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{2\cdot\sin\angle EFD}=\frac{2r_3\cdot r_1r_2}{\sqrt{-r_3^2(r_2-r_1)^2-(r_1r_2)^2+2r_1r_2r_3(r_2+r_1)}}$$

Д-е нер-ва $y>x$ получим равносильное ему

$$\frac{2\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{-r_3^2(r_2-r_1)^2-(r_1r_2)^2+(r_1r_2r_3)(r_2+r_1)}} > \frac{1}{\sqrt{r_1+r_2+r_3}}$$

$\Leftrightarrow$

$$4(r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)) > r_1r_2r_3(r_2+r_1)-r_3^2(r_2-r_1)^2-(r_1r_2)^2$$

$\Leftrightarrow$

$$3r_1r_2r_3(r_1+r_2)+4r_1r_2r_3^2+r_3^2(r_2-r_1)^2+(r_1r_2)^2>0$$

М11-21



последнее нер-во очевидно верно ибо $\Sigma$ 4 пол-х чисел $>0$ (они $\neq 0$ ~~только если~~ т.к. $r_1, r_2, r_3$ - различ-ные серед-$\Rightarrow >0$). Но тогда верно и нер-во $y>x$, и это и требовалось. ч.т.д.

Задача 11.8

~~Рассмотрим $(\sin x + \cos y)^2$ + это квадрат и $(\sin y + \cos x)^2$ оба этих числа - квадраты рац. чисел $\Rightarrow$ они рац-ны и их сумма тоже $\Rightarrow$ $\sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2(\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 2 + 2 \cdot \sin(x+y)$ - рац. число но тогда $\boxed{\sin(x+y) - \text{рац. число}}$~~

~~Пусть теперь $\sin x + \cos y = \frac{a}{b}$ - рац. е и $\frac{a}{b} > 0$ и $\sin y + \cos x = \frac{c}{d}$ - рац. е и $\frac{c}{d} \geq 0$ Тогда число $\sin x \cdot \frac{a}{b} + \cos x \cdot \frac{c}{d} = \sin x (\sin x + \cos y) + \cos x(\sin y + \cos x) =$~~

~~$= \sin^2 x + \sin x \cdot \cos y + \cos^2 x + \cos x \cdot \sin y = 1 + \sin(x+y)$ - рац-е число, причём $|\sin(x+y)| \leq 1 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 1 + \sin(x+y) \geq 0$. Покажем, что $\sin(x+y)$ - рац-е~~

Пусть $\sin x + \cos y = \frac{a}{b}$ ~~$\geq 0$~~ - рац-е $\geq 0$, ~~скинем $a, b$ - нат-е~~ и $\sin y + \cos x = \frac{c}{d}$ - ~~такие $c, d$ - нат-е~~ рац-е $> 0$ Тогда число $A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2$ - рац-е (как сумма кв-в двух рац-х чисел. Но заметим что $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos y + 2\sin y \cdot \cos x) = A$. Раз $A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2$ и $\left(\frac{a}{b}\right) > 0$, $\left(\frac{c}{d}\right) > 0$ то $A > 0$. Получим что $A = 2 + 2(\sin x \cos y + \sin y \cdot \cos x$

пользуемся $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

Тогда ~~$\frac{A-2}{2}$ - рац $A>0$ то~~ ~~Тогда~~ ~~$\sin x \cdot \cos y$~~

М11-21



т.е. в л.ч. равенства стоит рац-е число

Тогда $\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{A-2}{2}$ ~~т.е. рац. число~~

притом $2(\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) + 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y > -1$.

Теперь рассмотрим число $\sin x(\sin x + \cos y) +$

$+ \cos x(\sin y + \cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y =$

$= 1 + \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ рац $\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y > -1$

то и рац-е. то число

$\sin x(\sin x + \cos y) + \cos x(\cos x + \sin y) = (\sin x)\frac{a}{b} + (\cos x)\frac{c}{d}$ -

- рац-е число и $> 0$, но тогда ~~и число~~ если

~~$bd\left((\sin x)\frac{a}{b} + (\cos x)\frac{c}{d}\right)$ - рац-е $> 0$ и кратно~~

~~$\sin x$ ad~~ $ad \cdot \sin x + bc \cdot \cos x$

$(\sin x)\frac{a}{b} + (\cos x)\frac{c}{d} = \frac{S}{k}$ где ~~х/у нат-е~~ то $S$, $k$ - нат-е

~~у/х~~ то $kbd\left((\sin(x))\frac{a}{b} + (\cos(x))\frac{c}{d}\right) = Sbd$ - нат-е

и получим $kda \cdot \sin x + cbk \cdot \cos x = Sbd$

но взяв $m = kda$, и $n = cbk$ мы получим

искомые вида $m, n$ - нат-е, а $m \cdot \sin x + n \cdot \cos x =$

$= Sbd$ т.е. нат-е. ч.т.д.

Задача 11.10 $k \geq 5$

Лемма: пусть $k$ из названных Петей чисел

$x_1, x_2, \ldots x_k$, ~~таковы, что существ~~ Катя видя и сост-в

~~$ax^2+bx$~~ получили на них числа $y_1, y_2, \ldots y_k$

(т.е. после того как Петя назв-т $x_i$ ему Вася ст-т $y_i$)

таковы, что ~~ax~~ сущ-т числа $a$, $b$, $c$ такие что ~~$ax_i^2+bx_i+c$~~ $ax_i^2+bx_i+c$ при $i\in\{1,2,\dots,k\}$ то либо $f(x)=ax_i^2+bx_i+c$ либо $g(x)=ax_i^2+bx_i+c$. (далее $ax^2+bx+c=p(x)$).

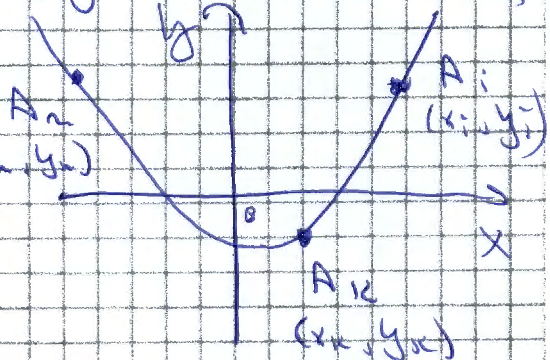
Действительно пусть утв-е леммы не верно, тогда в точках $x_1, x_2, \dots x_k$ вып-о одно из равенств $p(x)=f(x)$ либо $p(x)=g(x)$, но если $f(x)=\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3$, и $g(x)=\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3$, то $p(x)=f(x) \Leftrightarrow (a-\alpha_1)x^2+(b-\alpha_2)x+c-\alpha_3$ — если не тожд-й 0 (т.е. $p(x)$ и $f(x)$ не совп-т а это так из предп-я) то как уравнение степени не большей 2 имеет не более 2 решений.

Аналогично $(a-\beta_1)x^2+(b-\beta_2)x+(c-\beta_3)=0$ не более 2 решений если $g(x)$ и $p(x)$ не совп-т. Тогда различных чисел среди $x_1, x_2, \dots x_k$ не больше 4 $\to k\le 4$, а это не так ибо $k>5$, прот-е $\to$ лемма доказана.

Тогда если Петя назовёт 9 чисел по принципу Дирихле $\geq 5$ из них будут подстав-ы Васей в одно из $f(x)$ и $g(x)$ (пусть не умаляя общности в $f(x)$) тогда перебирая все 5-ки точек какие 5 из них будут удовл-ть $ax^2+bx+c$ (либо в смысл-е у-е они и были подставлены) и значит по лемме вост-в $p(x)=ax^2+bx+c$ Петя добьётся желаемого. Получим $n\le 9$.

Теперь покажем, почему при $n\le 8$ Петя добьётся цели не гарантированно.

Для этого приведём стратегию за Васю не позволяющую Пете добиться своего. ~~Пусть Вася каждым своим ходом~~ Изобразим пары ход Пети – ход Васи на графике по OX – числа названные Петей $x_1, x_2, \dots, x_n$, а по Oy соотв-е числа Васи т.е. $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогда пусть каждым ходом ~~в~~ Вася выбирает такую ~~точку~~ (точки при своей абсциссе $x_j$ свою орд. $y_j$) такую что $(x_j; y_j) = A_j$ не лежит ни на одной прямой образованной точками $(x_i; y_i) = A_i$, $(x_m; y_m) = A_m$, где $i, m \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ и $i \ne m$. Тогда через любую ~~пару~~ тройку точек $A_i, A_k, A_m$, $m \ne i$, $i \ne k$, $m \ne k$, $i, k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ можно провести график функции $ax^2 + bx + c$, при том единственный, что следует из системы ур-й $\begin{cases} a x_i^2 + b x_i + c = y_i, \\ a x_m^2 + b x_m + c = y_m, \\ a x_k^2 + b x_k + c = y_k. \end{cases}$




Тогда пусть точек 6, причём точки ~~$A_1$~~ $A_1, A_2, A_3, A_4$ лежат на одной параболе ~~$A_5$~~ $z(x) = \gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3$ и $A_5, A_6$ не лежат на гр-ке ф-ии $z(x)$.

Причём для опр-и системы (будем считать, что $x_i \ne x_j$ т.к. нет смысла 2 раз задавать 1 и то же) $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, и $x_5 \le x_6$.

Тогда Вася мог загадать либо $z(x)$ и прямую проходящую через $A_5 A_6$, либо 2 пар-ы: $f_1(x)$ и $g_1(x)$ такие, что $A_1, A_2, A_5 \in f_1(x)$ и $A_3, A_4, A_6 \in g_1(x)$.

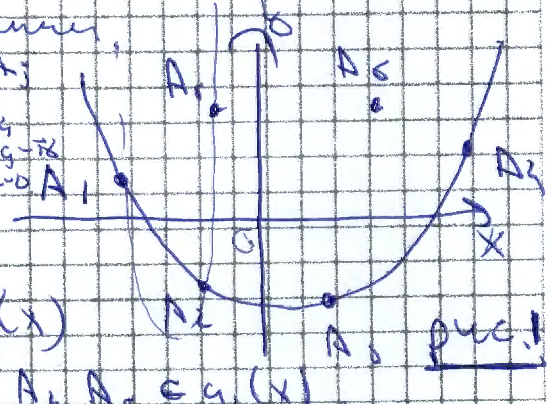



рис.1

Тогда 6 точек не хватит ~~и~~ $\to$ не хватит и 5 точек
$5 \le 6 \to \underline{n \ge 7}$

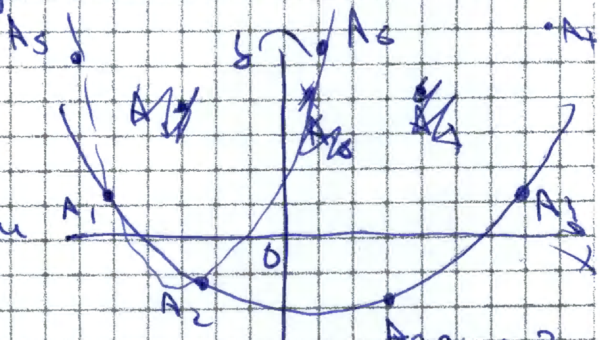


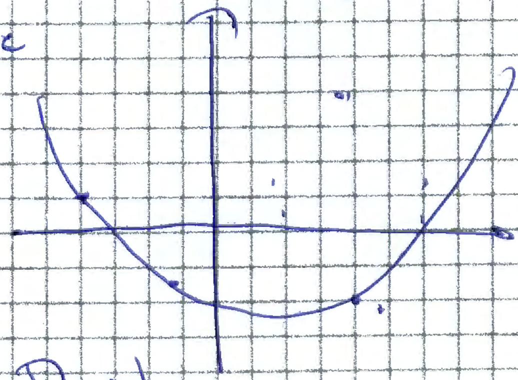

рис. 2

Пусть теперь $n=7$.
т.е. На графике рис 1 добавим 1 точку $A_7$ и получим рис. 2
Опять же $A_1, A_2, A_3, A_4$ лежат на $z(x)$, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$.
Тогда ~~пусть~~ пусть когда отмечали $x_5$ мы подобрали $A_6$ так что бы $A_6$ лежала на параболе соед-й точки $A_1, A_2, A_5$ (просто зададим эту пар-у как $L(x)$ и сообщим $L(x_6)$) тогда пусть парабола через $A_6, A_3, A_4$ есть $\Gamma(x)$ (тут, отметив $A_5$ так чтобы $A_6(x_6, L(x_6))$ могло выполниться условие о том что ~~все~~ все точки обязаны различны, поэтому далее параболы - это прямые или график квад т-ч)
Тогда если что раз $A_5 \in z(x)$, и $z(x) \cap L(x)$ в $A_1$ и $A_2$ то $A_6 \notin z(x)$. Теперь когда сообщат $x_7$ мы ответим $\Gamma(x_7)$, опять же раз $\Gamma(x) \cap z(x)$ в $A_3$ и $A_4$ ~~и $A_6 \notin z(x)$~~ то и $A_7 \notin z(x)$. Тогда Петя не может однозначно восст-ть $f(x)$ или $g(x)$, т.к. могли быть пары ~~$z(x)$~~ $\Gamma(x)$ и $L(x)$ либо $z(x)$ и парабола (или прямая) через $A_5, A_6, A_7$. Поэтому $n \ge 8$.
Теперь приведём пример стратегии для Пети позв-й ему добиться желаемого при $n=8$. Для этого скажем сразу что если 5 из 8 точек лежат на графике одной функции $ax^2+bx+c$, то по лемме Петя добьётся своего, поэтому ровно 4 точки лежат

М11-21



~~Пусть~~ на графике одной функции, а другие и на другой, причём пересечение (т.е. общ. точки у них не может быть тогда давайте будем играть за Петю выбирать в эту точку так, чтобы ~~либо~~ у двух из предл-ных ф-ий нашлось пересечение т.е. из 7 точек отмеченных (из принципа Д-а) 4 лежат на одной параболе, причём таких четвёрок не больше чем 2 точки



?

±