1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	3	24

М11-04

№11.1

Произведение двух чисел a и b равно $77 = 7\cdot 11$, тогда пара a; b может быть: $\{1;77\}$; $\{7;11\}$; $\{-1;-77\}$; $\{-7;-11\}$

Рассмотрим числа на доске больше 0. Пусть их хотя бы 9. Тогда есть хотя бы 2 числа, больших 7 (значит оба наибольших больше 7), но пары с двумя числами, большими 7 нет, значит положительных чисел не больше 8. Аналогично с отрицательными: пусть их $\geq 9 \Rightarrow$ найдутся $a_i; a_j < -7 \Rightarrow$ два наименьших меньше -7, но такой пары нет. $\Rightarrow$ отриц. ≤ 8. Всего чисел $\leq \underbrace{8+8+1}_{\text{пол. отр. 0}} = 17$

Пример: $-11; -7; -6; -5; -4; \ldots; 5; 6; 7; 11$.
($-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$)

$$(-11)\cdot(-7) = (7)\cdot(11) = 77.$$

№11.2

Пусть не найдется. Тогда $A \cup B$ — множество из $2n$ различных натуральных. Но сумма $2n$ различных натур. не меньше суммы первых $2n$ натуральных. $1+2+..+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2+n > n^2+n^2$ (сумма чисел в $A\cup B$ равна сумме чисел в A + сумма чисел в B). Противоречие. Значит найдется 2 равных числа.

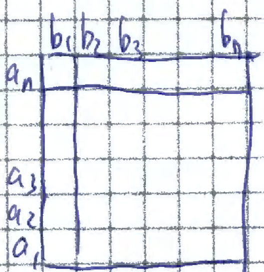
№11.5

Рассмотрим расстановку с наименьшей разностью. Отметим все маленькие числа. ~~Пусть~~ Заметим, что мы можем переставлять строки и столбцы не меняя ~~сумму~~ набор больших и малых чисел (с точностью до перестановки). Рассмотрим 2 строки, в которых есть маленькие числа. Пусть это строка s и t, причем наибольшее из этих чисел b находится в строке s. Переставим строки и столбцы следующим образом:

s	b · ·	
t		· ·

точками отмечены малые числа.
[не влияет на ход решения!]

Поменяем местами все пары чисел x и y такие, что x и y в одном столбце; x – малое число в строке s. Тогда все малые числа окажутся в строке t (мы переставляли 2 числа в столбце → малое число не менялось, только перемещалось), наибольшее в строке s не уменьшилось (b – наиб. число в строках!), в строке t наибольшее число не увеличилось (мы в нее ставили меньшие числа). Значит разность между большими и малыми числами не увеличилась. Количество строк с малыми числами уменьшилось. Количество столбцов с большими числами не увеличилось (пусть увеличилось, тогда большое число в строке t изменило столбец (в строке s большое не менялось), но тогда большое в строке t уменьшило значение $\Rightarrow$ разность между большими и малыми уменьшилась, а мы брали наименьшую) Проведя эту операцию конечное число раз (количество стр. с мал. ч. ум.) мы перенесли все малые в одну строку. аналогично перенесем большие в один столбец. Получаем следующее: V

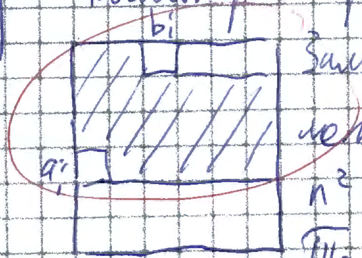


$a_1 > a_2 > \ldots > a_n = b_1 > b_2 > \ldots > b_n$

дальше ошибка в оценке

a – наибольшие числа; b – наименьшие.

посмотрим разницу между a_i и b_i:



Заметим, что числа в заштрихованной области лежат на интервале $a_i; b_i$, а их количество – $n^2-(i-1)n-(n-i)-2 = n^2-in+i-2$

Тогда $a_i - b_i \ge n^2 - in + i - 1$

Тогда $\sum_1^n a - \sum_1^n b \ge \sum_{i=1}^{n} (n^2 - in - i - 1) = n^3 - \frac{n(n+1)}{2}n + \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^3-n}{2}$

Пример:

1	2	3	4		n
n+1	n+2	n+3	n+4		2n
2n+1	2n+2				3n
3n+1	3n+2				
(n-1)n+1					n^2

(Числа, расставленные по порядку.)

Тогда большие – $n; 2n; \ldots; n^2$

Маленькие – $1; 2; \ldots; n$

$\sum a - \sum b = n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3-n}{2}$

(в i строке j столбце $(i-1)n+j$; $j \in [1;n] \Rightarrow$ все числа различны)

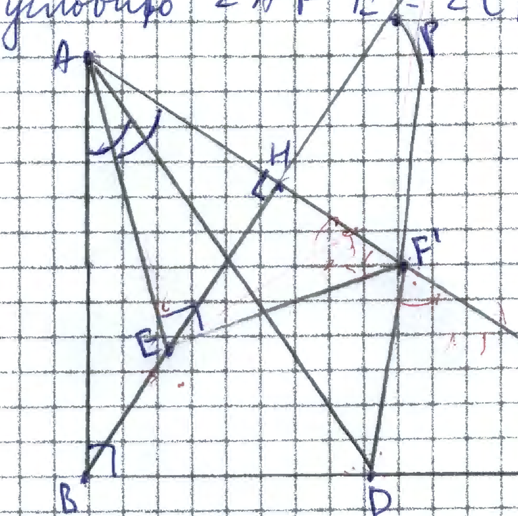
Ответ: $\frac{n^3-n}{2}$ –

№11.3

Заметим, что точки A B C E однозначно задают расположение точек F и D, так как D – пересечение прямой, симметричной AE относительно биссектрисы $\angle BAC$ и прямой BC $\Rightarrow$ она единств.

М11-04

~~если~~ Точки F лежит на отрезке AC, при ее движении в направлении от A к C угол AFE уменьшается, а угол DFC увеличивается ⇒ равенство достигается в одной точке. Тогда если мы докажем, что точка F' на AC с углом $AEF' = 90°$ удовлетворяет условию $\angle AF'E = \angle CF'D$, то угол $\angle AEF = 90°$, что и требовалось.



Точка P — пересечение BE и DF'.

A — центр поворотной гомотетии, переводящей $\vec{BE}$ в $\vec{DF'}$ (так как $\triangle ABD \approx \triangle AEF'$ по двум углам), тогда по теореме о расположении центра поворотной гомотетии A — вторая точка пересечения окружностей EF'P и PBD.

Тогда $\angle DF'C = \angle PF'A = \angle AEP =$ (из вписан.) $= 90° - \angle EAF' = \angle EF'A$, что и требовалось.

(Иначе говоря угол между векторами BE и DF' = углу поворотной гомотетии, переводящей $\triangle AEB$ в $\triangle AF'D$ и равен ~~угл~~ $\angle BPD$. То есть $\angle BPD = \angle BAD = \angle EAF'$ ⇒ четырехугольник AEF'P — вписанный)

№11.4

М11-46

№11.6

Шаг 1) запишем многочлен $(x+1)\cdot(x^2+1)=$
$=x^3+x^2+x+1$

Шаг 2) запишем многочлен $(x^3+x^2+x+1)-(x^2+1)=x^3+x$

Заметим, что при $x>0$ $x^3+x>0$, а при $x<0$ $x^3+x<0 \Rightarrow$ эта функция подходит.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	1	7	7	29

№11.7

Да, можно. Для каждого натурального числа рассмотрим степень вхождения 2. Заметим, что если степень вхождения двойки в x и y различна, то $x+y=2^a x'+2^b y'=\cancel{2}=2^a(x'+2^{b-a}y')$, но $x'+2^{b-a}y'$ –
x', y' - нечетные
не ум. общн. $a<b$

нечетное число $\Rightarrow x+y$ - не степень двойки.

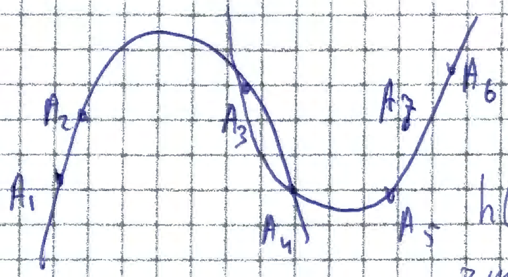
Разобьем все числа на группы, в каждой группе степень вхождения 2 одинакова. Тогда числа из разных групп (в разных - различна) ~~могут иметь один и тот~~ в сумме не дадут степень двойки $\Rightarrow$ можно красить каждую группу отдельно. Рассмотрим группу со степенью вхождения $2-k$. Рассмотрим все числа, входящие в эту группу по модулю 2^{k+1}. Все модули – нечетные из определения группы. Тогда числа, меньшие 2^k раскрасим в черный цвет, а большие – в белый. Тогда 2 одноцветных числа:
2 белых – сумма по модулю больше 0 но меньше $2^{k+1} \Rightarrow$ сумма делится на 2^k, но не делится на 2^{k+1} (и сумма больше 2^k) $\Rightarrow$ сумма не степень двойки. 2 черных – сумма по модулю больше 2^{k+1}, но меньше $2^{k+1}\cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ сумма не сравнима с 0 по модулю $2^{k+1} \Rightarrow$ сумма не степень двойки. Итого: в каждой группе сумма одноцветных не дает степень двойки, в разных группах сумма не дает степень двойки тогда сумма одноцветных не дают ст. дв. – что и требовалось

№11.10

Приведем случай, когда Вася не может узнать многочлен за 7 ходов. Пусть Петя при получении числа $t_i=t_j$ (t_i на i вопросе) выдает значение от одной и той же функции. Тогда за 7 ходов Вася получил не более 7 точек, причем ~~все~~ все абсциссы точек различны. Первые 4 точки лежат на одной параболе ($f(x)$). Пятая точка не лежит

м11-46

на этой параболе (Петя сказал $g(t_5)$, причем ~~Вася не мог знать точки пересечения функции~~ ~~$\Rightarrow$ может быть так, что он не угадал~~ ~~функции не имели точки пересечения~~ $\Rightarrow$ $f(t_5) \neq g(t_5)$) прошу читать!



Затем Петя построил параболу $h(x)$, проходящую через $A_3; A_4; A_5$, и на следующий вопрос Васи оказалось, что $g(t_6)$ лежит на $h(x)$. (Петя может менять $f(x)$ и $g(x)$ так, чтобы они проходили через уже названные точки) (Мы строим контрпример для 7, поэтому так можно)

Затем он говорит $g(t_7)$, не равное $f(t_7)$ и $h(t_7)$. (Изначально задана $f(x)$, $g(x)$ меняется так, чтобы проходить через точки $A_5 A_6 A_7$). Теперь, за 7 ходов Вася получил $A_1 \dots A_7$ (если он получил меньше точек ~~и~~ и смог угадать функцию, то он задает любые запросы, получает 7 точек и все еще может отгадать функцию). Но заметим, что он не может утверждать, что одна из исходных функций была $f(x)$ или $g(x)$, так как отличная (непересекающаяся с ней) пара функций $h(x)$ и парабола, проходящая через $A_1 A_2 A_7$. Следовательно Вася не может однозначно определить одну из функций $\Rightarrow n > 7$.

Покажем стратегию для $n = 8$. Заметим, что 2 параболы имеют не более 2 т. пер. $\Rightarrow$ если нашлась парабола, на которой лежит 5 ~~точек~~ известных – Вася победил (пусть эта парабола $h(x)$. Тогда на ней может лежать не более 4 точек ($f(x)$ и $g(x)$ суммарно $\leq$ 4 пересечения)).

Первые 7 вопросов Вася задаст случайно (несовп. абсциссы, например $t_i = i$, $i \in [1; 7]$). Если Вася еще не нашел параболы, на которой 5 точек, то он смотрит (проводит) всевозможные несовпадающие параболы, ~~проход~~ задающиеся всевозможными тройками (из $A_1 \dots A_7$). Их конечное число $\Rightarrow$ найдется t_8 такой, что на прямой $x = t_8$ нет точек пересечения этих парабол. Пусть A_8 не ~~по~~ создала параболу с 5 точками (иначе победа).

Тогда если она попала на пересечение прямой $x=t_8$ и одной из возможных парабол, то на этой параболе ($h(x)$) теперь 4 точки. Пусть не ум. общн. ~~на~~ эти точки $A_5 A_6 A_7 A_8$. Тогда точки $A_1A_2A_3A_4$ лежат на одной параболе, и эти 2 четверки задают $f(x)$ и $g(x)$ (иначе 8 точек лежат на $f(x)$ и $g(x)$, на каждой не более 4 $\Rightarrow$ на каждой по 4. но если $A_8 \in g(x)$ и $g(x) \ne h(x)$, то на $g(x)$ не более 3 точек (по выбору t_8)), иначе бы $g(x)$ проходила через 3 из $A_1, \dots A_7$ и пересекалась с $h(x)$ на $x=t_8$.

Тогда Вася знает обе функции (в том числе одну из них).

Если точка A_8 не попала ни на одну из парабол, то на $g(x) \ni A_8$ не более 3 точек $\Rightarrow$ на $f(x)$ хотя бы 5 (но этот случай уже рассмотрен).

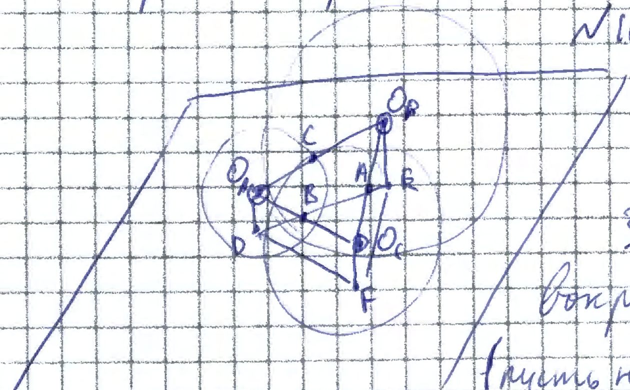
Доказана оценка и приведен пример на 8. Ответ: $n=8$.

В решении считал очевидным, что 3 точки задают параболу. Существование: $(x_1;y_1);(x_2;y_2);(x_3;y_3) \to f(x)=y_1+(x-x_1)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+(x-x_1)(x-x_2)\cdot\frac{y_3-\left(y_1+(x_3-x_1)\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

Единственность: две параболы (различных) — не более 2 т. пер. $\Rightarrow$ 3 точки принадлежат ровно 1 параболе.

+

№11.9



Радиусы сфер ω_A ω_B и ω_C — $a; b; c$.

центры — O_A O_B O_C

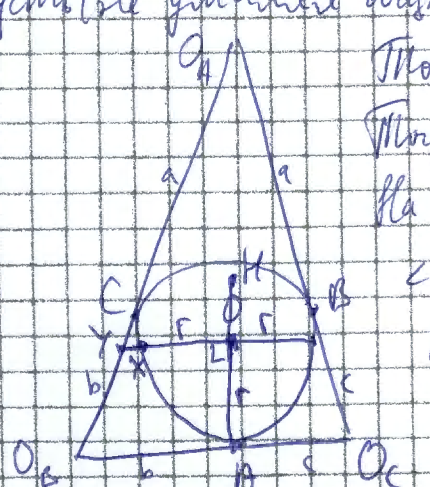
Заметим, что окружность, описанная вокруг ABC совпадает с вписанной $\triangle O_AO_BO_C$

(пусть нет; $A'B'C'$ — точки касания, $a'; b'; c'$ — $O_AC' = O_AB'$; ...

тогда $a+b+c = a'+b'+c' = p$; $a+b = a'+b' = O_AO_B \Rightarrow C'=C$, ...)

$c=c'$, $b=b'$, $a=a'$

Пусть (не умаляя общности) $\angle O_AO_BO_C \le 90°$; $\angle O_BO_CO_A \le 90°$



Тогда $O_BA \ge YO \ge XO \Rightarrow b \ge r$ аналогично $c \ge r$

Тогда $\angle O_BOA \ge 45°$; анал. $\angle O_COA \ge 45 \Rightarrow \angle O_BOO_A \ge 90°$

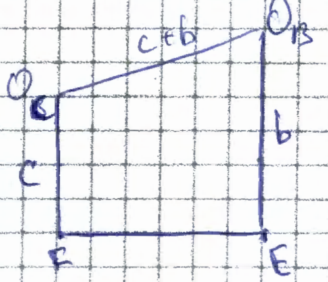
На прямой OA отм. H такую, что $\angle O_BHO_C = 90°$.

$\angle O_BOO_A \ge 90° \Rightarrow AH \ge OA = r$ (радиус описанной ABC)

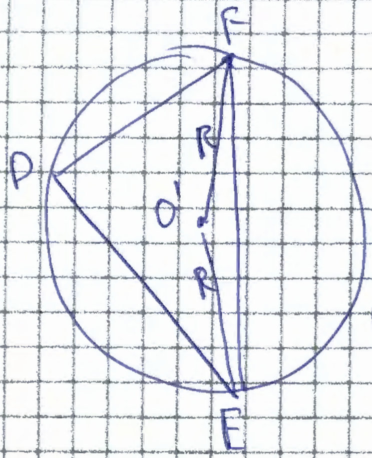
HA — высота в прям. тр. $O_BHO_C \Rightarrow AH = \sqrt{bc}$

тогда $2\sqrt{bc} = 2AH \ge 2OA = 2r = d$ (диаметр вписан[ной] $\triangle O_AO_BO_C$

(O — центр вписанной, OX — радиус перп. OA; Y — т. пер. O_AO_B и OX).



$EF = 2\sqrt{O_cO_B^2 - (O_cF - O_BE)^2} =$
$= 2\sqrt{(c+b)^2 - (c-b)^2} = 2\sqrt{bc}$



$\cancel{A}\ 2R \geq EF$

$R \geq \frac{EF}{2} = \sqrt{bc} \geq r$, причем равенство достигается только при $\angle O_A O_B O_C = \angle O_A O_C O_B = 90^\circ$, но это невозможно. Тогда $R > r$, что и требовалось.

№11.8

① $\sin x + \cos y \in \mathbb{Q}_+$

② $\sin y + \cos x \in \mathbb{Q}_+$

①^2+②^2: $\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_{1} + 2(\sin x \cos y + \sin y \cos x) \in \mathbb{Q}_+$

③ $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \in \mathbb{Q}_+$

Если показать, что найдутся такие $m, n \in \mathbb{Q}_+$, что $m \sin x + n \cos x \in \mathbb{Q}_+$, то приведя m, n и $m \sin x + n \cos x$ к общему знаменателю получим то, что требуется в задаче, т.е. необходимо найти $m, n \in \mathbb{Q}_+$.

$\sin x + \cos y = a$
$\sin y + \cos x = b$
$\sin x + \cos x = (a+b) - (\sin y + \cos y)$

①·② + ③: $\sin x \cos x + \sin x \sin y + \sin x \cos y + \cos y \sin y + \cos y \cos x + \sin y \cos x \in \mathbb{Q}$

$\sin x (\sin y + \cos y) + \cos x (\sin y + \cos y) + \sin x \cos x + \sin y \cos y =$
$= (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y) + \sin x \cos x + \sin y \cos y \in \mathbb{Q}$

$(a+b)(\sin y + \cos y) - 1 + 2 \sin y \cos y + \sin x \cos x + \sin y \cos y \in \mathbb{Q}$

А дальше?