№10-36

Σ	1	2	3	4	5	
21	7	7	7	0	0	Назаева
21	7	7	7	0	0	Девятков

№1

$\boxed{1567}$ – подходит.

$(1+5+6+7)\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 1 = 19\cdot 7\cdot 30 = 133\cdot 30 = 3990$

№2

Допустим такого числа не найдется, тогда, т.к. A и B – состоят из n различных натуральных чисел и не пересекаются, то суммарно в этих 2-х множествах 2n различных натур-ых чисел.

Тогда их минимально возможная сумма – это сумма первых 2n натуральных чисел:

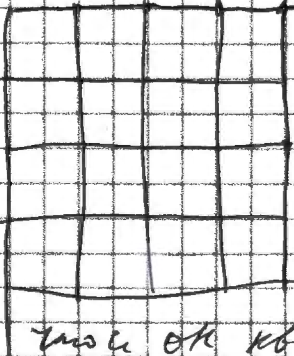
$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2+n > 2n^2$$

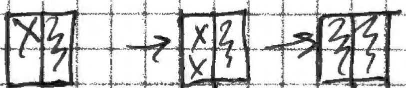
А по условию сумма в $A = n^2$ = сумме $B \Rightarrow$ сумма A и B – это $2n^2$.

Но мы поняли что минимально возможная сумма – это $2n^2+n > 2n^2 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ предположение было неверным.

Значит общее число в A и B точно было. ЧТД

№3

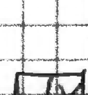




Разобьем доску на 16 частей (как на рисунке)

Тактика для Димы:

1) когда Коля сходит, Дима ходит в том-же что и он квадрат 2×2.

Мы можем так сделать потому что ситуация  (и подобные) быть не может т.к. Коля ставит по одному крестику за ход и когда он в предыдущий раз ставил крестик в этом квадратике 2×2, то Дима следуя тактике должен был сходить туда значит получалась такая ситуация  (или подобная) и что с ней Диме делать нарисовано сверху.

(По сути мы разбили нашу игру на 16 „независимых" в каждой из которых умеем побеждать)

М10-36

Значит мы всегда сможем сходить после Коли ⇒ не не проиграем ⇒ выиграем

Ответ: Дима имеет выигрышную стратегию

№4

Допустим, что найдется такое P, что: ~~не существует y~~

$P \cdot 1 + 1 = (2+a_1)(2+b_1)$ $\quad a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots a_{\frac{P-1}{2}}, b_{\frac{P-1}{2}} \geq 0, \in \mathbb{Z}$

$2P + 1 = (3+a_2)(3+b_2)$

$\boxed{y < \frac{P}{2} \Updownarrow y \leq \frac{P-1}{2}}$ т.к. $P > 3 > 2$

...

$P\left(\frac{P-1}{2}\right)+1 = \left(\frac{P+1}{2} + a_{\frac{P-1}{2}}\right)\left(\frac{P+1}{2} + b_{\frac{P-1}{2}}\right)$

т.к. P — простое больше $2 \Rightarrow \not\vdots 2 \Rightarrow P-1 \vdots 2$

⇓

$2P + 1 = P+1+P = (2+a_1)(2+b_1) + P = (3+a_2)(3+b_2)$

$3P+1 = (3+a_2)(3+b_2) + P = (4+a_3)(4+b_3)$

...

$P\left(\frac{P-1}{2}\right)+1 = \left(\frac{P+1}{2} + a_{\frac{P-3}{2}}\right)\left(\frac{P-1}{2} + b_{\frac{P-3}{2}}\right) + P = \left(\frac{P+1}{2} + a_{\frac{P-1}{2}}\right)\left(\frac{P+1}{2} + b_{\frac{P-1}{2}}\right)$

Т.к. P — простое, то nP и $(n+1)P$ — по модулю любого числа (кроме P) будут давать разный остаток.

Заметим также, что эти остатки будут составлять сумму (Что за сумма?)

конкретной длины (т.к. НОД(P, x), где $x \in N$, $x < P-1$, то это длина равна x)

~~В случае с простыми цифрами числами эта длина равна самому~~ числу

Таким образом каждое второе кратно 2-м, 3-е кратно 3-м, 4-е 4-ем и т.д. Но в 3-ти от P эти ~~суммы~~ суммы могут быть сдвинуты из-за чего и найдется такое число $y < \frac{P-1}{2}$ для которого нет такого p-я.

ЧТД

6	7	8	9	10	Σ
7	7	~~5~~	0	0	~~19~~
7	7	5	0	0	19

Девятков

№ 6

$\cos x$

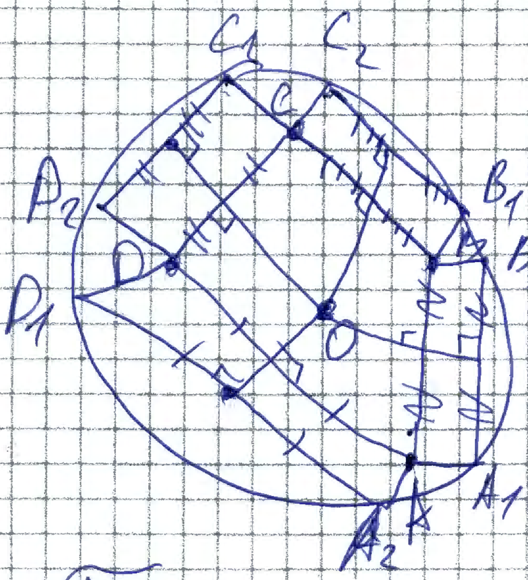
Домножаем:

$\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \cos x$

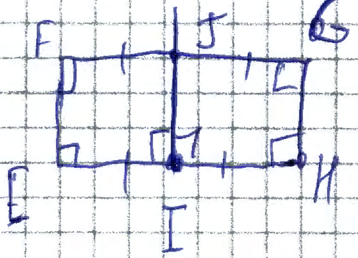
При $x = \pi$: $\cos^2(\pi) + \cos \pi = 1 - 1 = 0$

№ 7

$\boxed{\text{* - сер-пер - это серединный перпендикуляр}}$



Докажем, что сер-пер к одной стороне прямоугольника является тоже сер-пером к противоположной его стороне:



$IJGH$ - тоже прямоугольник, как и $EFJI$ $\Rightarrow EI = IH = JG = FJ$; $\angle FJI = \angle IJG = 90°$ $\Rightarrow$ IJ — сер-пер к FG.

Теперь вспомним, что сер-пер к отрезку - это ГМТ, равноудалённых от концов этого отрезка

$\Downarrow$

Точка пер-я сер-перов к отрезкам равноудалена от концов этих отрезков $\Rightarrow$ точка пер-я сер-перов ко всем сторонам прямоугольника — (если такая одна) это центр описанной окружности этого прямоугольника и наоборот, центр опис-ой окр-ти - это точка пер-я сер-перов.

Тогда центр нашей окружности (O) — есть точка пересечения сер-перов к A_2D_1; D_2C_1; C_2B_1; B_2A_1 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ еще и сер-перов к AD; DC; CB; BA $\Rightarrow$ эта точка равноудалена от $ABCD$ $\Rightarrow$ эта точка - центр опис-ой окружности $ABCD$ $\Rightarrow$ $ABCD$ - вписанный ЧТД

М10-05

№8 Допущение можно, когда:
Пусть на доске записаны трёхчлены:

$a_1x^2+b_1x+c_1$
...
$a_nx^2+b_nx+c_n$
— n, где ~~...~~ a_i; $i \le n$; ~~$a_i \ne a_j; b_i \ne b_j; c_i \ne c_j$~~, которые удовлетворяют условиям.

Заметим, что если у всех этих 3-х членов есть целые корни, тогда произведение этих корней и их сумма — целые числа

⇓

по т-ме Виета: $-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ ⇒ x_1 и x_2 — одного знака, отрицательны

$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \in Z$

$x_1x_2=\frac{c}{a} \in Z$

⇒ т.к. $a, b, c \in N$; $c \vdots a$ и $b \vdots a$, тогда

+1 б.

т.к. ~~...~~ a, b, c — различные (из условия) то $a<b$; $a<c$; значит хотя бы одно из чисел (b или c) — больше либо равно $3a$

Теперь скажем, что если минимальное из чисел a_i, b_i, c_i ($i \le n$) $= k \in N$, то все они находятся в диапазоне $[k; 3k+3n-1]$.

Рассмотрим трёхчлен с максимальным a, заметим что это $a \ge k+n-1$, тогда либо b, либо c $\ge 3a \ge 3k+3n-3$, НО максимальное число из всех a, b, c — это $3k+3n-1$. Имеем:

$k+3n-1 \ge 3k+3n-3$

⇕

$2 \ge 2k$

⇕

$1 \ge k$ ⇒ т.к. $k \in N$ $k=1$ — и это может быть только тогда, когда все $a \in [k; k+n-1]$

1410-05

Значит все b и $c \in [n+1; 3n]$

Значит многочлен который мы рассматривали выглядит так:

~~$(x+(n-1))x^2+bx+c$; причём $\max(b;c)=3x+3n-3$~~

nx^2+xb+c; причём $\max(b;c)=3n$, а второе значение ровно $2n$; имеем:

$$n\left(x^2+\frac{b}{n}x+\frac{c}{n}\right)=n(x^2+3x+2)=n(x+1)(x+2)$$

$$n(x^2+2x+3)>0$$

Посмотрим на многочлены которые мы записали:

$x^2+b_1x+c_1$

$2x^2+b_2x+c_2=2\left(x^2+\frac{b_2}{2}x+\frac{c_2}{2}\right)$

$3x^2+b_3x+c_3=3\left(x^2+\frac{b_3}{3}x+\frac{c_3}{3}\right)$

...

$nx^2+3nx+2n=n(x^2+3x+2)$

По доказанному ранее $-\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ должно существовать разбиение всех чисел от $n+1$, до $3n$, на двойки каждая из которых кратна своему числу от 1, до n.

~~Также очевидно, что если есть простое число $p\in[n+1;3n]$, то его никуда не поставить и ничего не получится~~

Заметим, что если $n>100$ (условие) и $n\vdots 2$ (один из вариантов), то $\frac{n}{2}$ чётных чисел $\in[1;n]$ – могут стоять только с чётными числами $\in[n+1;3n]$, которых ровно $\frac{2n}{2}=n$, но тогда нечётные числа нельзя ставить с чётными

Но $n-1$ – может быть в паре только с $2n-2$ и $3n-3\Rightarrow$ $n\vdots 2$ $n-1\in[1;n]$

(т.к. $4n-4>3n$, при $n>100$)

$\Rightarrow$ расставить чётное n – невозможно.

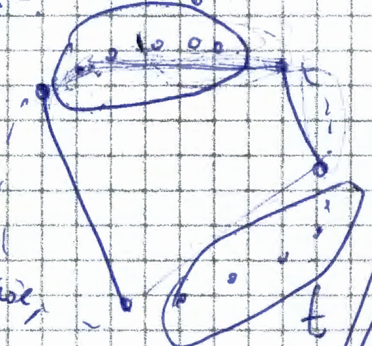
Рассмотрим нечётное n. Получаем $\frac{n-1}{2}$ чисел $\in[1;n]$ могут быть в паре только с чётными из $[n+1;3n]$ которых n

№10-05

Аналогично n-1 — забирает одно чётное
n-2 и n-4 — тоже забирают по одному чётному (сумма санки 2). Тогда числа 2 не хватает — противоречие ⇒ **Ответ: Нельзя** !

~~Доказательство методом~~ №10.9 $n\in N$, $n\ge 2$, (3-угольник)

Заметим, что 2 параллельные стороны 2n-1-угольника ~~...~~ имеют одинаковое кол-во точек с обеих боков (см. рис.) т.к. многоугольник из которого в-ны — правильный.



(для разрезания)

Среди этих 2+ точек есть 2n-3 точек нашего 2n-1-угольника. Т.к. 2n-3 — нечётное, то с одной из сторон точек будет больше, ~~...~~

~~Сразу заметим, что всего точек N=2n-1 + (k-1)(2n-3), где k — это кол-во 2n-1-угольников, на которые мы разбили нашу фигуру (т.к.~~

3-угольник не может быть параллелен, т.к. его стороны не могут быть параллельны

значит там меньше ~~больше~~ точек 2n-1 угольников т.к. одинаковое кол-во 2n-1 угольников занимает одинаковое кол-во точек (т.к. диагонали не пер-ся).

Но т.к. $t\equiv t$, то в обоих частях должна быть одинакова по чётности кол-во вершин, но это невозможно.

~~т.к. ... по индукции кол-во общих точек~~

~~Ч.т.д.~~ противоречие

ЧТД.

M10-05

~~Если с одной $2n$ ($2n-1$), что с другой точек больше, т.к. свободных точек $2n-5$~~

№ 10. ω

~~Вопрос~~ Спросим 0, узнаем 1 из 2-х С

Спросим 1 – узнаем $a+b+c$ или $a_1+b_1+c_1$, –1 и узнаем $a-b+c$ или $a_1-b_1+c_1$.

Очевидно, что вопросов необходимо не менее 3, т.к. иначе у нас будет 2 ур-я и 6 неизвестных, из которых нужно узнать 3.

Задав 3 вопросов мы получим 3 ответа об одном из многочленов => возможно решить

Ответ: $\boxed{3}$