М11-19

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | 21 |



Задача 1.

77 можно разложить на произведение двух целых чисел как

$-77\cdot(-1)$, ~~77~~ $-11\cdot(-7)$, $7\cdot 11$, $1\cdot 77$.

Заметим, что необходимо комбинировать пару с положительными значениями и пару с отрицательными, т.к. пара одного знака не будет произведением 77:

7, 11, 1, 77 упорядочатся как 1, 7, 11, 77, их произведения наим. двух и наиб. — это $1\cdot 7=7$ и $11\cdot 77=847\neq 77$. Аналогично с отриц. парами.

Упорядочим наши числа на доске по возрастанию.

Слева будут наши два числа $-x_2$ и $-x_1$ (отрицательные), справа $y_1$ и $y_2$. Между ними может находиться ~~столько других чисел~~ любое число $a$ $|-x_1<a<y_1$, причём не одно, т.к. это не изменит наим. и наиб. числа.

Тогда максимальное кол-во чисел между $-x_1$ и $y_1$ — это $y_1-(-x_1)-1=y_1+x_1-1$, а $n=2+2+y_1+x_1-1=$
$=y_1+x_1+3$. Значит, для максимизации $n$ надо брать максимальные $y_1$ и $x_1$. Максимальные $y_1=7$, $x_1=7$ ($x_1$ — модуль, а не само отриц. число). Тогда $n=7+7+3=17$. Пример:

$-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$ +

Ответ: $n=17$.

Задача 2.

Предположим, ~~что не~~ требуемое условие может не выполняться, и существует пример таких $n$, $A$ и $B$, что все числа в $A$ и $B$ различны, т.е. $A\cap B=\varnothing$. Тогда

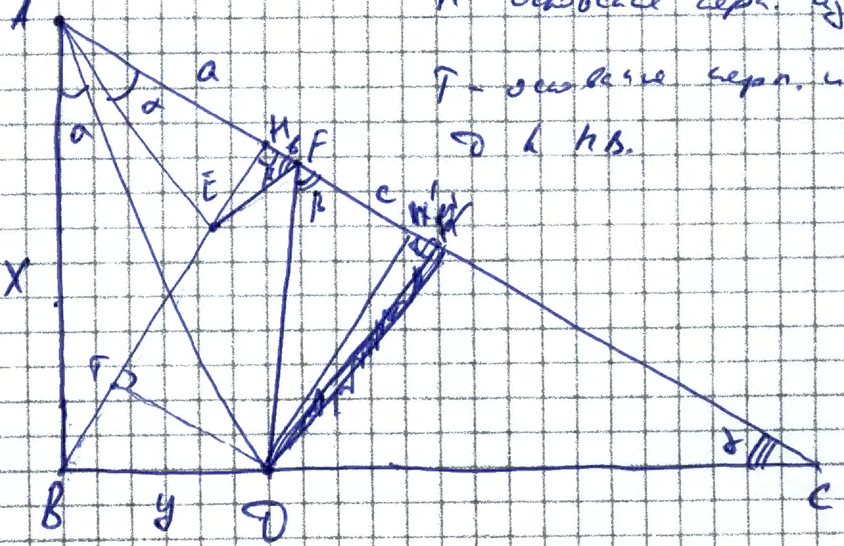
$|A \cup B| = 2n$ — мощность их объединения, т.е. всего чисел в A и B $2n$, причём они все различны, и ни одно не встречается дважды. Тогда сумма ~~все~~ всех чисел в этих множествах будет конечно равна сумме чисел от 1 до $2n$, т.к. все $2n$ чисел натуральны и уникальны.

$\sum\limits_{i=1}^{2n} i = \frac{(2n+1)\cdot 2n}{2} = 2n^2+n$. Но это же и равно сумме сумм чисел в A и B по отдельности ввиду уникальности каждого числа, а также сумма в A и B равна $n^2$, а сумма всех чисел тогда равна $2\cdot n^2 = 2n^2 = 2n^2+n \Rightarrow n=0$. Противоречие, т.к. $n$ — натуральное, ~~сумма натуральных чисел не даст~~. Значит, таких $n$, A и B не существует и утверждение задачи верно, что и требовалось доказать. +

Задача 3.

Пусть $AB \equiv x$,
$BD \equiv y$,
$AH \equiv a$,
$HF \equiv e$, $FH' \equiv c$,
$\angle BAD = \angle EAH \equiv \alpha$,
$\angle HFE = \angle H'FD \equiv \beta$,
$\angle ACB \equiv \gamma$;

$H'$ — основание перп. из D к AC.
T — основание перп. из D к HB.




Свойство ряда равных отношений (СРРО) — если $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$, то $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$. Действительно, если $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$, то $x_2=\alpha x_1$, $y_2=\alpha y_1$, тогда $\frac{x_1}{y_1}=\frac{\alpha x_1}{\alpha y_1}=\frac{x_1}{y_1}$, т.е. это верно, но тогда $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{x_1+\alpha x_1}{y_1+\alpha y_1}=\frac{x_1(1+\alpha)}{y_1(1+\alpha)}=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ и т.д.

М11-19



т.к. $\angle BHF = \angle DH'C = 90^\circ$ и $\angle HFE = \angle H'CD$, то

$\frac{b}{EH} = \boxed{\frac{c}{DH'} = \frac{b+c}{DH'+EH}}$. $DH' = HT$, т.к. $THH'D$ – прямоуг.

$EH = a \cdot tg\,\alpha$, $a = x \cdot \sin\gamma$, т.к. $\angle ABH = 90^\circ - \angle BAH = \gamma$. Тогда $EH = a \cdot tg\,\alpha \cdot \sin\gamma$. x? С другой стороны

$y = BD = x \cdot tg\,\alpha$ из $\triangle ABD$. Тогда из $\triangle BTD$ $BT = y \cdot \sin\gamma = x \cdot tg\,\alpha \cdot \sin\gamma$, т.к. $\angle BDT = \angle BCH = \gamma$.

($EH = a \cdot tg\,\alpha$ из $\triangle AHE$, $a = x \cdot \sin\gamma$ из $\triangle AHB$)

Тогда $EH = a \cdot tg\,\alpha \cdot \sin\gamma = BT$.

$DH' + EH = HT + TB = HB \to \frac{c}{DH'} = \frac{b+c}{HB}$.

Из подобия $\triangle BHA \sim \triangle DTB$ $\frac{x}{HB} = \frac{y}{DT} \Rightarrow$

$\Rightarrow DT/HB = \frac{y}{x}$. $DT = b+c$ из прямоуг. $THH'D \Rightarrow \boxed{\frac{b+c}{HB} = \frac{y}{x}}$.

т.к. $\frac{c}{DH'} = \frac{b+c}{DH'+EH} = \frac{b+c}{HB} = \boxed{\frac{y}{x} = \frac{b}{DH'}}$ $\frac{c}{DH'}$ $\Leftrightarrow \frac{HF}{EH} = \frac{BD}{AB}$ $\frac{BD}{AB}$,

и $\angle ABD = \angle EHF = 90^\circ$, $\triangle ABD \sim \triangle EHF \to \angle BDA = \angle HFE = \beta$,

при этом $\angle BAD = \alpha$, $\angle ABD = 90^\circ \to \alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \to$

$\to \alpha + \beta = 90^\circ$. В $\triangle AEF$ $\angle EAF = \alpha$, $\angle EFA = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = 180^\circ - (\alpha+\beta) = 90^\circ$, ч.т.д.

+

11.5

Ответ: $\frac{(n^2-1)\cdot n}{2}$

Пример:

| | 0 | ... | i | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|
| n-1 | $n^2$ | $n^2-1$ | .. | | $n^2-n+1$ |
| - | $n(n-1)$ | .. | .. | .. | $n^2-n+1$ |
| k | .. | .. | $(k+1)n-i$ | . | - |
| - | | | | | |
| 0 | n | n-1 | .. | | 1 |

−

6 7 8 9 10 Σ
+ + + − ∅
7 7 7 0 ~~10~~ 21

М11-09



Задача 6.

Запишем такие функции:

$f_1(x)=x+1$, $f_3(x)=x^3+1$

$f_2(x)=x^2+1$, $f_4(x)=x^2+1$

$f_5(x)=f_2(x)-f_1(x)=x^2+1-(x+1)=x^2-x=x(x-1)$

$f_6(x)=f_3(x)-f_2(x)=x^3+1-(x^2+1)=x^3-x^2=x^2(x-1)$

$f_7(x)=f_5\cdot f_6=x(x-1)\cdot x^2(x-1)=x^3(x-1)^2$. Очевидно, что эта функция подходит, т.к. $x^3$ принимает знак аргумента, а $(x-1)^2$ всегда неотрицательна, и при $x\neq 1$ $x^3(x-1)^2=x\cdot(x(x-1))^2$ одного знака с $x$, а при $x=1$ $x^3(x-1)^2=0\geq 0$, что удовлетворяет условию.

Ответ: $f_7(x)=x^3(x-1)^2$. +

Задача 7.

~~Т.к. чётное и нечётное число не могут дать в сумме степень двойки, рассмотрим отдельно разбиение нечётных чисел и разбиение чётных. Приведём пример такого разбиения: покрасим в белый все нечётные числа вида $4z+1$, а в чёрный~~

Да, возможно.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ч | б | б | б | ч | ч | б | б | ч | б | б | ч | ч | ч | б | б | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | $\mathbb{N}$ |

Разбиение будем делать динамически: присвоим всем степеням двойки белый цвет, т.к. две различные степени двойки не могут дать в сумме степень двойки. (пусть $x>y$, тогда $2^x+2^y=2^y(2^{x-y}+1)$, $2^{x-y}+1\neq 2^t$ и это не степень двойки).

М11-09



Приравняем единицу черный цвет.
Далее действуем так:

Докажем, до $2^n$ все числа покрашены подходящим образом, т.е. их сумма не может дать число $2^x$ | $0<x\le n$. Также их сумма не может дать $2^x$ ($x>n$), т.к. ~~одн~~ любое число до $2^n$ меньше $2^n$, а их сумма будет меньше $2\cdot 2^n = 2^{n+1} \le 2^t \ \forall t \ge n+1$.
Покажем, что можно индуктивно раскрасить числа между $2^n$ и $2^{n+1}$. Числа между ними $a$ удовлетворяют условию $2^n < a < 2^{n+1}$ ⇒ ~~их сумма~~ сумма любых двух из них $S$ удовлетворяет $2^{n+1} < S < 2^{n+2}$, поэтому как они соотносятся между собой не важно, они могут дать только сумму $S = 2^{n+1}$ при условии, что одно число будет лежать до $2^n$.
Два таких числа $x_1$ и $x_2$ можно представить как $x_1 = 2^n - \Delta$ и $x_2 = 2^n + \Delta$, когда $x_1 + x_2 = 2\cdot 2^n - \Delta + \Delta = 2^{n+1}$, т.е. они симметричны от $2^n$. Между 0 и $2^n$ такое же кол-во чисел, как и между $2^{n+1}$ и $2^n$, и оно равно $2^n - 1$. Значит, каждому числу $x_2$ между $2^{n+1}$ и $2^n$ найдется ровно одно ~~число~~ число между 0 и $2^n$, что их сумма будет $2^{n+1}$. Тогда число $x_2$ надо покрасить в противоположный цвет (если $x_1$ - черное, $x_2$ - белое, и наоборот). Числа между 0 и $2^n$ не могут дать степень двойки, т.к. были изначально так разбиты, числа между $2^n$ и $2^{n+1}$ не могут дать степень двойки в принципе, числа до $2^{n+1}$ не могут дать степень двойки также по разбиению. Значит, мы пришли к индукционной ситуации, что и была вначале, но теперь числа разбиты не до $2^n$, а до $2^{n+1}$. Переход доказан, а значит, мы можем разбить все натуральные числа, ч.т.д.

М11-09



Первые 16 чисел, подвергнутых такому разбиению, указаны в начале описания алгоритма

Ответ: да, можно.

+

Задача 8.

~~$\sin x + \cos$~~ Пусть ~~sin~~

$\sin x + \cos y = 2q$, $\sin y + \cos x = 2p$,

здесь $\{q, p\} \subset \mathbb{Q}$ (разумеется, любое рациональное число можно представить в таком виде).

~~тогда можно~~

пусть $\sin x - \cos y = 2i$, ~~$\sin y - \cos x$~~ $\cos x - \sin y = 2j$ (возможно, ~~тогда~~ $i \notin \mathbb{Q}$, $j \notin \mathbb{Q}$).

Тогда

$\sin x + \cos y + \sin x - \cos y = 2q + 2i \to \sin x = q + i$

$\sin x + \cos y - (\sin x - \cos y) = 2q - 2i \to \cos y = q - i$

$\sin y + \cos x + \cos x - \sin y = 2p + 2j \Rightarrow \cos x = p + j$

$\sin y + \cos x - (\cos x - \sin y) = 2p - 2j \Rightarrow \sin y = p - j$.

Итак, $\sin x = q + i$, $\cos x = p + j$

~~$\cos y = q - i$~~,

$\sin y = p - j$, $\cos y = q - i$.

По основному триг. тождеству

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow (q+i)^2 + (p+j)^2 = q^2 + p^2 + i^2 + j^2 + 2qi + 2pj = 1$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow (p-j)^2 + (q-i)^2 = p^2 + q^2 + j^2 + i^2 - 2pj - 2qi = 1$

Вычтем ~~первое~~ второе равенство из ~~второго~~ первого, получим

$q^2 + p^2 + i^2 + j^2 + 2qi + 2pj - p^2 - q^2 - j^2 - i^2 + 2pj + 2qi = 1 - 1$

$\Updownarrow$

$4qi + 4pj = 0 \Leftrightarrow qi + pj = 0.$

М11-09



Рассмотрим теперь выражение
$p\sin x + q\cos x$:
$q\sin x + p\cos x =$ ~~p+p~~ $q(q+i) + p(p+j) = q^2+p^2 + qi+pj.$
$qi+pj=0 \Rightarrow q\sin x + p\cos x = q^2+p^2+0 = q^2+p^2.$
$q$ и $p$ – положительные рациональные числа, поэтому их можно представить в виде
$q = \frac{a_q}{b_q}$ и $p = \frac{a_p}{b_p}$, где $\{a_q, b_q, a_p, b_p\} \in \mathbb{N}$ (являются натуральными).

тогда $q\sin x + p\cos x = q^2+p^2$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_q}{b_q}\sin x + \frac{a_p}{b_p}\cos x = \frac{a_p^2}{b_p^2} + \frac{a_q^2}{b_q^2} \Big| \cdot (b_p b_q)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_q b_q b_p^2)\sin x + (a_p b_p b_q^2)\cos x = $$
$$= (a_p b_q)^2 + (a_q b_p)^2.$$

Отметим, что коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ натуральны, т.к. являются произв. натуральных чисел, а значение справа от знака равенства натурально. Значит, разложив данные нам $2q$ и $2p$ как $q = \frac{a_q}{b_q}$ и $p = \frac{a_p}{b_p}$, мы получим натуральные $a_q, b_q, a_p, b_p$, и положив
$m = a_q b_q b_p^2$, $n = a_p b_p b_q^2$, мы добьёмся того, что натуральные $m$ и $n$ будут удовлетворять условию
$m\sin x + n\cos x \in \mathbb{N}$, т.е. они найдутся, что и требовалось доказать.

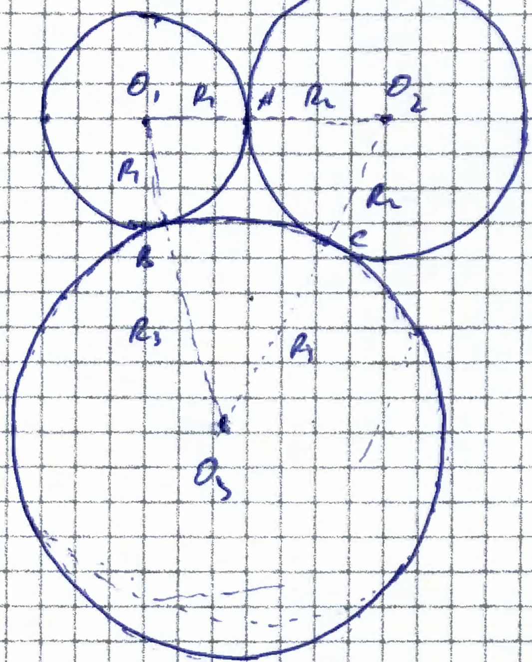
М11-09



Задача 9.

пусть радиусы сфер с центрами $O_1$, $O_2$, $O_3$ равны $R_1$, $R_2$, $R_3$ соотв.

Проведём плоскость $(O_1O_2O_3)$, она совпадёт с плоскостью $(ABC)$, т.к. $O_1A$, $O_1B$, $O_2A$, $O_2C$, $O_3C$, $O_3B$ — радиусы сфер.




А дальше?

—