М9-03

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	∅	∅	
7	7	7	0	0	

№9.1

+

Ответ: может.

Например, если Малыш действует так
(Будем считать, что каждая минута - это ход)
Первым ходом разделит 10 на 5 и 5 конфет.
Вторым ходом соединит 1 и 4 в кучку из 5.
Третьим ходом разделит 9 на 4 и 5 конфет
Четвертым ходом соединит 2 и 3 в кучку из 5
Пятым ходом ~~...~~ разделит 6 на 1 и 5 конфет.
Тогда после пятого хода на столе останется
7 кучек по 5 ~~конф~~ конфет, и кучки из
1; 7; 8 и 4 конфет.
Шестым ходом Малыш соединит 1 и 4 в кучку из 5.
Седьмым ходом разделит 7 на 2 и 5 конфет.
Восьмым ходом соединит 8 конфет и кучку
из 2 ~~...~~ конфет, полученную на 7-ом ходе в кучку
из 10 конфет.
Девятым ходом разделит кучку из 10
конфет на 5 и 5 конфет.
Тогда после 9-ого хода на столе будут
лежать ~~...~~ 11 кучек по 5 конфет.

№9.2

Пусть на доске написаны числа $a_1; a_2; \ldots; a_n$,
причём $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Тогда, по условию:

$a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2 < 3\cdot 10^6$

$a_{n-1} \geq a_{n-2}+10 \Leftrightarrow a_{n-1}^2 \geq (a_{n-2}+10)^2$

ш9-03

$a_n \geqslant a_{n-1}+10 \geqslant a_{n-2}+20 \Leftrightarrow a_n^2 \geqslant (a_{n-2}+20)^2$

Значит, $a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 \geqslant (a_{n-2}+20)^2 + (a_{n-2}+10)^2 + a_{n-2}^2$

Тогда $(a_{n-2}+20)^2 + (a_{n-2}+10)^2 + a_{n-2}^2 < 3\cdot 10^6$

$\Downarrow$

$$3a_{n-2}^2 + 60\cdot a_{n-2} + 500 < 3\cdot 10^6.$$

Заметим, что если $a_{n-2} \geqslant 10^3-10$, то

$3a_{n-2}^2 + 60a_{n-2} + 500 \geqslant 3\cdot(10^3-10)^2 + 60\cdot(10^3-10) + 500 =$
$= 3\cdot 10^6 - 6\cdot 10^4 + 300 + 60\cdot 10^3 - 600 + 500 = 3\cdot 10^6 + 200 > 3\cdot 10^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 > 3\cdot 10^6$, что противоречит

условию $\Rightarrow a_{n-2} \leqslant 10^3-11$, т.к. $a_{n-2} \in \mathbb{Z}$

Теперь рассмотрим сумму квадратов трёх наименьших чисел. ~~По условию~~ ~~Сначала рассмотрим случай, в котором~~ ~~$a_3 < 0 \Rightarrow a_1, a_2 < 0$~~

~~По условию $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 3\cdot 10^6$~~

~~$|a_2| \geqslant |a_3-10| \Rightarrow a_2^2 \geqslant (a_3-10)^2$~~

Сначала рассмотрим случай, в котором $a_3 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1, a_2 < 0$

По условию $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 3\cdot 10^6$

$a_2 \leq a_3 - 10 \Rightarrow |a_2| \geqslant |a_3-10|$, т.к. $a_2 < 0$ и $a_3 - 10 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2^2 \geqslant (a_3+10)^2$

$a_1 \leq a_2 - 10 \leq a_3 - 20 \rightarrow |a_1| \geqslant |a_3 - 20|$, т.к. $a_1 < 0$ и $a_3 - 10$

$\Rightarrow a_1^2 \geqslant (a_3-20)^2$

Значит, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant (a_3-20)^2 + (a_3-10)^2 + a_3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3^2 + (a_3-10)^2 + (a_3-20)^2 < 3\cdot 10^6.$

$\Updownarrow$

$$3a_3^2 - 60a_3^2 + 500 < 3\cdot 10^6$$

Если $a_3 \le -10^3+10$, то $3a_3^2 \ge 3\cdot10^6 - 6\cdot10^4+300$,

$-60a_3 \ge 60\cdot10^3 - 600 \Rightarrow 3a_3^2-60a_3+500 > 3\cdot10^6+200 > 3\cdot10^6$,

но это противоречит условию.

Значит, $a_3 \ge -10^3+11$, т.к. $a_3 \in \mathbb{Z}$

Тогда $a_3 \ge -989$, $a_{n-2} \le 989$. Значит, чисел от a_3 до a_{n-2} (включительно) не более 198, т.к. если их хотя бы 199, то

$a_{n-2} \ge a_3 + 198\cdot10 \ge -989+1980 \ge 991$, но

$a_{n-2} \le 989$.

Значит, всего чисел от a_1 до a_n (включительно) не более $198+4 = 202 \Rightarrow n \le 202$.

В случае если $a_3 \ge 0$, чисел от $a_3 \ge 0$ до $a_{n-2} \le 989$ не более 99, т.к. если их хотя бы 100, то $a_{n-2} \ge a_3 + 99\cdot10 \ge 990$, но $a_{n-2} \le 989 \Rightarrow$ всего чисел (от a_1 до a_n) не более $99+4 = 103 \Rightarrow n \le 103$.

Значит, $n \le 202 \Rightarrow$ максимальное n, при котором такое возможно 202.

Пример на $n=202$.

$a_1 = -1009$; $a_2 = -999$; $a_3 = -989$ ...

$a_{199} = 971$, $a_{200} = 989$, $a_{201} = 999$, $a_{202} = 1009$.

$a_1^2+a_2^2+a_3^2 = a_{202}^2+a_{201}^2+a_{200}^2 = (10^3-11)^2+(10^3-1)^2+(10^3+9)^2 =$

$= 3\cdot10^6 - 22\cdot10^3 + 121 - 2\cdot10^3 + 1 + 18\cdot10^3 + 81 =$

$= 3\cdot10^6 - 6\cdot10^3 + 203 < 3\cdot10^6$

+

Значит, такой пример подходит.

Ответ: $n=202$.

№9.3

Ответ: Коля.

+

Покрасим клетки доски 8×8 в шахматном порядке (см. рис 1)

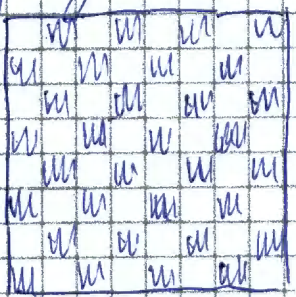


рис. 1

Заметим, что как бы Дима ни поставил доминошку она всегда будет покрывать ровно 1 белую и одну чёрную клетку.

Пусть Коля каждым своим ходом ставит крестик в любую свободную чёрную клетку. ~~Те (пока может)~~ Тогда каждую пару ходов (Димин ход - Колин ход) будет заниматься ровно 2 чёрные и 1 белая клетка. Тогда за 16 пар ходов все чёрные клетки будут заняты (крестиком, либо накрыты доминошкой). И после 16 пар ходов будет ход Димы. Заметим, что во всех незанятых доминошками чёрных клетках стоят крестики, но ни в одной белой клетке крестика не стоит. Тогда как бы Дима ни поставил доминошку в ней будет ровно 1 крестик (т.к. доминошка занимает 1 белую и 1 чёрную клетку) => Дима не сможет поставить доминошку => Коля выиграл.

6	7	8	9	10	
+	+	+	∓	0	
7	7	7	2	0	23

№ 9.7.

Ответ: 1010.

Пример:

~~Пусть со 1-ым спросили зелёного хамелеона и он ответил 1010~~

Пусть зелёных и коричневых ~~хамелеонов~~ спрашивают по очереди ~~через одного~~, начиная с зелёного. (1-ым зеленого, 2-ым коричневого, 3-им зеленого и т.д.) Пусть зелёные хамелеоны ~~по очереди~~ называют числа ~~1010~~ 1010, 1011, 1012, ..., 2019 (именно в таком порядке). А коричневые хамелеоны называют числа 1, 2, 3, ... ~~1010~~, 1009. Тогда коричневые хамелеоны всегда будут врать, а зелёные — говорить правду.

Предположим, что изначально зелёных хамелеонов было хотя бы 1011 ⇒ коричневых хамелеонов изначально было не более 2019 − 1011 = 1008. Тогда рассмотрим ответы 1, 2, ..., 1010, они заведомо ложные, т.к. в любой момент времени зелёных хамелеонов не менее 1011, т.к. их изначально было не менее 1011. Тогда все числа от 1 до 1010 (включительно) должны быть произнесены коричневыми хамелеонами ⇒ ⇒ коричневых хамелеонов должно быть хотя бы 1010, но их изначально не более 1008 и их количество не увеличивается. Получили

М9-12

противоречие. Значит, наше предположение неверно и зелёных хамелеонов не может быть более 1010. (+)

№ 9.6.

Пусть длина всего круга 102S

Пусть сначала Миша пробежит 51S (т.е. полкруга) против часовой стрелки и развернется. К этому моменту Петя пробежит 50S.

Потом Миша добежит до старта (по часовой стрелке) (к этому моменту он уже один раз встретит Петю, т.к. он находился ~~[illegible]~~ на расстоянии 50 S от старта, а Миша 51S, если считать против часовой стрелки).

К тому моменту, когда Миша добежит до старта, Петя пробежит 100 S т.к. Миша суммарно пробежал 102S, т.е. будет в 2S от старта.

Миша продолжит движение по часовой стрелке (т.е. навстречу Пете). Тогда они встретятся в $\frac{102}{101}$S от старта (т.е. Миша пробежит $\frac{102}{101}$S, а Петя $\frac{100}{101}$S)

~~[illegible]~~ Пусть Миша после их встречи пробежит ~~[illegible]~~ меньше, чем $\frac{1}{101}$S по часовой стрелке и потом развернется. Петя за это время пробежит меньше, чем $\frac{50}{51\cdot 101}$S. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расстояние между Мишей и Петей будет меньше, чем $\frac{1}{101}+\frac{50}{51\cdot 101}S=\frac{51+50}{51\cdot 101}S=\frac{1}{51}S \Rightarrow$

к моменту встречи Петя пробежит

М9-12

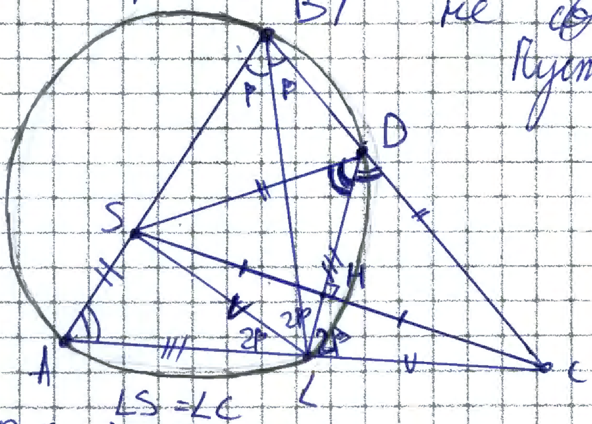
меньше, чем $\frac{50}{51}S$ $\Rightarrow$ от момента разворота Миши Петя пробежит меньше, чем $\frac{50}{51}S + \frac{50}{51\cdot 101}S = \frac{50\cdot 50+50}{51\cdot 101}S = \frac{100}{101}S$ $\Rightarrow$ Петя ещё не добежал до старта. Значит, Миша смог ~~уже~~ поровняться с Петей 3 раза, пока Петя бежал 1-ый круг.

(+)

№9. 8

Сначала рассмотрим случай в котором точка D не совпадает с точкой B. $B \neq D$ — по условию

Пусть H — точка пересечения прямых DL и CS.



$LS = LC$

$DC = DS$; в силу того, что ~~за~~ ~~со~~ точка S симметрична точке C относительно прямой DL

$DL = AL$, т.к. углы, опирающиеся на $\smile DL$ и $\smile AL$ равны ($\angle LBD = \angle ABL$)

$\triangle DSC$ — равнобедренный ($DC = DS$) $\Rightarrow$ DH — высота и биссектриса. $\Rightarrow$ $\angle CDL = \angle SDL$.

$\angle CDL = \angle BAL$, т.к. четырехугольник ABDL — вписанный

Докажем лемму: ~~если~~ если есть 2 треугольника ~~$\triangle$~~ $\triangle MNK$ и $\triangle M'N'K'$ и в них $MN = M'N'$, $NK = N'K'$ и $\angle MKM = \angle N'K'M'$, то либо $\triangle MNK = \triangle M'N'K'$, либо $\angle NMK + \angle N'M'K' = 180°$

МД-12

Доказательство:

Пусть $\angle NKM = \angle N'K'M' = \alpha$, $\angle NMK = \varphi$, $\angle N'M'K' = \psi$

Тогда по теореме синусов для $\triangle MNK$

$$\frac{MN}{\sin\alpha} = \frac{NK}{\sin\varphi}$$

По теореме синусов для $\triangle M'N'K'$

$$\frac{M'N'}{\sin\alpha} = \frac{N'K'}{\sin\psi}$$

Тогда, т.к. $MN = M'N'$, $\frac{NK}{\sin\varphi} = \frac{N'K'}{\sin\psi}$ $\Rightarrow$ т.к. $NK = N'K'$, $\sin\varphi = \sin\psi$ $\Rightarrow$ либо $\varphi = \psi$ ($\angle NMK = \angle N'M'K'$), либо $\varphi + \psi = 180°$ ($\angle NMK + \angle N'M'K' = 180°$).

Если $\angle NMK = \angle N'M'K'$, то $\triangle MNK = \triangle M'N'K'$ по 2 сторонам и углу между ними

Применим ~~эту~~ эту лемму для $\triangle ASL$ и $\triangle DSL$

В них $AL = DL$, SL — общая и $\angle SDL = \angle SAL$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо $\triangle ASL = \triangle DSL$, либо $\angle ASL + \angle DSL = 180°$,

но если $\angle ASL + \angle DSL = 180°$, то точки D и B совпадают, а мы рассматриваем случай, когда ~~они~~ они не совпадают. Значит

$\triangle ASL = \triangle DSL \Rightarrow AS = DS$. $\Rightarrow$ ~~DS~~ $AS = DC$, т.к. $DS = DC$

Пусть $\angle ABC = 2\beta$.

$\angle DLC = \angle ABC = 2\beta$, т.к. ABDL - вписанный четырехугольник.

$\triangle DLC = \triangle ALS$ т.к. $DC = AS$, $AL = DL$ и $\angle LDC = \angle LAS$.

Тогда $\angle ALS = \angle DLC = 2\beta$

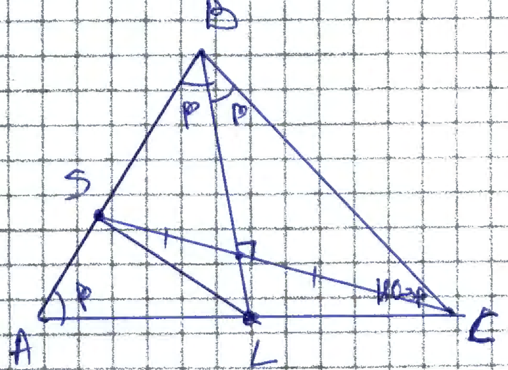
$\angle DLS = \angle DLC = 2\beta$, в силу симметрии точек S и C относительно DL

М9-12

Тогда $\angle ALS + \angle SLD + \angle DLC = 180° \Leftrightarrow 2\beta+2\beta+2\beta = 180° \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\beta = 60° \Leftrightarrow \angle ABC = 60°$

+

~~Теперь~~ рассмотрим случай, в котором ~~точки~~ D и B совпадают. Тогда BC – касательная к описанной окружности $\triangle ABL \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle LBC = \angle BAL$, как углы между касательной и хордой.



Пусть $\angle ABL = \angle LBC = \angle BAL = \beta$
Тогда $\angle BCA = 180 - 3\beta$.

Заметим, что $\angle BAC < \angle BCA \Leftrightarrow \beta < 180 - 3\beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\beta < 180 \Leftrightarrow 2\beta < 90 \Leftrightarrow \angle ABC$ – острый, что верно по условию.

~~Покажем, что~~ $\angle ACB < 90 \Leftrightarrow 180 - 3\beta < 90 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\beta > 90 \Leftrightarrow 2\beta > 60° \Leftrightarrow \angle ABC > 60°$.
Покажем, что $\angle ABC$ может принимать любые значения ~~от~~ больше 60°, но меньше 90°, если точка D совпадает с B.

Возьмем $\triangle ABC$ с $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BAC = \beta$.
Тогда BC – будет касательной к окружности описанной около $\triangle ABL$. По ~~до~~ показанному выше этот треугольник остроугольный и $\angle C > \angle A \Rightarrow AB > BC$. Тогда отложив на BC точку S так, что $BS = BC$ получим, что S симметрична C относительно BL $\Rightarrow$ этот треугольник
... искомый

М9-12

Ответ: $\angle ABC = 60°$, если D не совпадает с B.
$60° < \angle ABC < 90°$, если D совпадает с B.

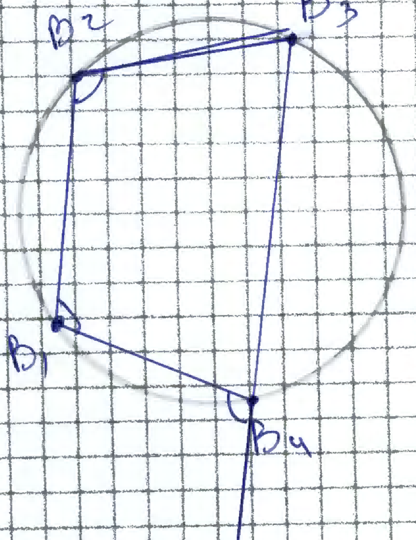
№9.9.

Ответ: нет не может.

Пусть изначальный многоугольник будет $A_1A_2...A_n$

Предположим, что ~~такой~~ хороший многоугольник найдется. Пусть у него параллельны стороны B_1B_2 и B_3B_4. Тогда $B_1; B_2; B_3; B_4$ – различные 4 вершины многоугольника $A_1A_2...A_n$. Значит четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ – вписанный, т.к. многоугольник $A_1A_2...A_n$ – вписанный, потому что правильный.

Докажем лемму: вписанный четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$, у которого $B_1B_2 \parallel B_3B_4$ либо прямоугольник, либо равнобокая трапеция.



$\angle B_2B_1B_4 = \angle B_1B_4K$, т.к. $B_1B_2 \parallel B_3B_4$

$\angle B_1B_2B_3 = \angle B_1B_4K$, поскольку $B_1B_2B_3B_4$ – вписанный четырехугольник.

Значит, $\angle B_2B_1B_4 = \angle B_1B_2B_3$.

Тогда если B_2B_3 непараллельно B_1B_4, то $B_1B_2B_3B_4$ – равнобокая трапеция. $\Rightarrow B_2B_3 = B_1B_4$

Если $B_2B_3 \parallel B_1B_4$, то $B_1B_2B_3B_4$ – прямоугольник. $\Rightarrow B_2B_3 = B_1B_4$.

Значит, в любом случае $B_1B_4 = B_2B_3$, если $B_1B_2B_3B_4$ – вписанный четырехугольник.

Тогда $\smile B_2B_3 = \smile B_1B_4$, т.к. стягивающие их хорды равны.

Докажем, что если $\smile B_2B_3 = \smile B_1B_4$, то на этих дугах лежит одинаковое количество вершин правильного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$.

Предположим, что с точностью до симметрии на дуге B_2B_3 лежит больше вершин, чем на дуге B_1B_4.

Пусть на дуге B_2B_3 лежат вершины $A_i; A_{i+1}; \ldots A_{i+k}$, а на дуге B_1B_4 лежат вершины $A_j; A_{j+1}; \ldots; A_{j+m}$, где $k > m \Rightarrow k \geq m+1$. Тогда рассмотрим дуги $\smile B_1B_4$ и $\smile B_2A_{i+m+1}$. Заметим, что

$B_1A_j = A_jA_{j+1} = A_{j+1}A_{j+2} = \ldots = A_{j+m-1}A_{j+m} = A_{j+m}B_4 = B_2A_i = A_iA_{i+1} = \ldots = A_{i+m}A_{i+m+1}$, т.к. это все стороны многоугольника. $\Rightarrow \smile B_1A_j = \smile A_jA_{j+1} = \ldots = \smile A_{j+m-1}A_{j+m} = \smile A_{j+m}B_4 = \smile B_2A_i = \ldots = \smile A_{i+m}A_{i+m+1}$, т.к. эти дуги стягивают равные хорды. Тогда:

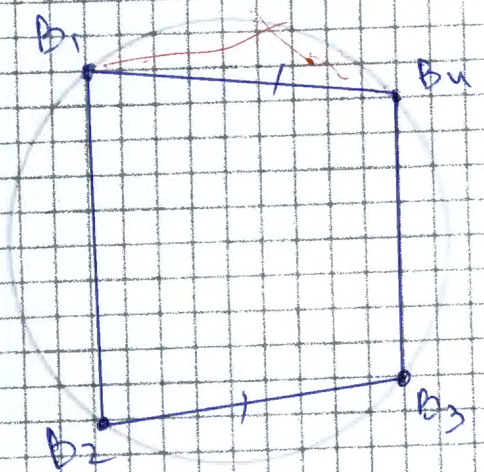
$\smile B_1A_j + \smile A_jA_{j+1} + \ldots + \smile A_{j+m-1}A_{j+m} + \smile A_{j+m}B_4 = \smile B_2A_i + \smile A_iA_{i+1} + \ldots + \smile A_{i+m}A_{i+m+1}$ (т.к. с каждой стороны равенства $m+1$ слагаемое и они все равны) $\Leftrightarrow \smile B_1B_4 = \smile B_2A_{i+m+1}$.

Но с другой стороны $\smile B_1B_4 = \smile B_2B_3 > \smile B_2A_{i+m+1}$, т.к. точка A_{i+m+1} лежит на $\smile B_2B_3$ и не совпадает с концами. Получим противоречие.

Значит, наше предположение неверно и на дугах $\smile B_1B_4$ и $\smile B_2B_3$ лежит одинаковое количество вершин многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$

Мg-12

Тогда посмотрим на многоугольник, в котором параллельны стороны B_1B_2 и B_3B_4. Заметим, что оставшиеся его вершины лежат на равных дугах B_1B_4 и B_2B_3, т.к. B_1B_2 и B_3B_4 стороны этого многоугольника.



~~В~~ Теперь посмотрим на вершины ~~не~~, лежащие на дугах B_1B_4; B_2B_3 и не входящие в многоугольник со сторонами B_1B_2 и B_3B_4. Заметим, что у всех многоугольников, в которые входят эти вершины ~~шести~~ все вершины лежат только на одной из дуг B_1B_4, B_2B_3, т.к. диагонали не пересекаются. Тогда пусть ~~в~~ вершины на дуге B_1B_4 имеют a многоугольников, а вершины на дуге B_2B_3 имеют ~~b~~ b многоугольников (не считая многоугольника со сторонами B_1B_2 и B_3B_4) ~~А~~ А в каждом многоугольнике разбиения c вершин. И на обоих дугах B_1B_4 и B_2B_3 по c вершин. Тогда $2c-2(a+b)+4$ – вершин в многоугольнике со сторонами B_1B_2 и B_3B_4 => если a и b одной ~~четн~~ четности, то в ~~то~~ этом многоугольнике вершин чётное количество, что противоречит