Лист 1 из 4

№ 11

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

М-11-09

1. Упорядочим числа. Теперь у нас есть набор: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{n-1} > a_n$ (т.к. все числа различные, знак „>") $a_i \in \mathbb{Z}$. Известно, что (учитывая $n=2$: наиб. числа) $a_1 \cdot a_2 = a_{n-1} \cdot a_n = 77$. $n \geq 2$ ($a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot a_2 = 77$ наим. числа)

Чтобы максимизировать n, нам нужно сделать промежуток (a_{n-1}, a_2) наибольшим (т.к. числа различные, чем больше целых чисел мы сможем „поместить" в этот промежуток, тем больше n).

Представим 77 в виде произведения двух целых чисел. ~~Для этого~~ разложим 77 на простые множители: $77 = 7 \cdot 11 \Rightarrow$ существует 4 варианта представления:

1) $7 \cdot 11 = 77$
2) $1 \cdot 77 = 77$
3) $(-1) \cdot (-77) = 77$
4) $(-7) \cdot (-11) = 77$

n может быть 4: $a_1 = 77; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = -77$

2. Заметим, что числа a_1, a_2, a_{n-1}, a_n разного знака (если, конечно, пары $(a_1; a_2)$ и $(a_{n-1}; a_n)$ различные. Если они совпадают, то $n=2$, что мало). Докажем это методом док-ва от противного. Предположим, все 4 числа одного знака. Тогда, заметим, что если числа различные, то (из представления числа 77 в виде произведения) одна пара содержится в другой ($a_i; a_{i+1} \in (a_j; a_{j+1})$), что плохо, т.к. $a_1 > a_2 > a_{n-1} > a_n \Rightarrow a_1, a_2 > 0$; $a_{n-1}, a_n < 0$ ($77 > 0 \Rightarrow$ числа одной пары должны быть одного знака).

Т.к. все числа, кроме a_1, меньше, чем a_2, то чтобы n было наибольшим, необходимо взять наибольшее возможное a_2 (чем больше целых чисел поместится в промежуток $(a_2; 0)$, тем больше n можно взять). Аналогично с a_{n-1}. Чем больше промежуток $(0; a_{n-1})$, тем больше чисел мы сможем включить в множество. $\Rightarrow$ $a_2 = \max(\min(7; 11); \min(1; 77))$ $a_1 = 11; a_2 = 7$, $a_{n-1} = -7$, $a_n = -11$. Тогда множество имеет вид: $11, 7$, (все числа (целые) от 7 до -7 (не включительно)), $-7, -11$.

А именно: 11, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4, −5, −6, −7, −11. $n=17$. Докажем, что n не может быть ≥ 17. Для этого попробуем добавить в множество ещё одно число.

Так как все числа различны, $|a_{n+1}| \geq 8 \Rightarrow$ появляется новая пара наибольших или наименьших чисел в множестве $\Rightarrow$ одна из пар меняется, а так как произведение фиксировано, то пара $7; 11 \xrightarrow{\text{может измениться}} 1, 77$ (что приводит к уменьшению $(a_{n-1} a_n)$), а пара $-7; -11 \xrightarrow[\text{может измениться}]{} -1; -77$ (что аналогично приводит к уменьшению множества).

Ответ: $n_{наиб.} = 17$.

$\boxed{№ 11.2}$

Будем доказывать от противного. Предположим, что такого числа не нашлось $\Rightarrow$ множества A и B не пересекаются. Рассмотрим сумму всех чисел из этих множеств:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}_{\text{сумма чисел множества A}} + \underbrace{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}_{\text{сумма чисел множества B}} = n^2 + n^2 = 2n^2$$

Всего чисел $2n$; если все числа различны ~~(...)~~ (числа натуральные), то их сумма $\overset{(1)}{\geq} 1 + 2 + \ldots + 2n$ (сумма первых $2n$ натуральных чисел).

$S \geq 1 + 2 + \ldots + 2n = \dfrac{2n(2n+1)}{2} =$ — сумма чисел в каждой паре (пары вида $a_j + a_{2n-j+1}$) $(1+2n)+(2+(2n-1))\ldots$; 2 — кол-во пар чисел

(наименьшая возможная сумма $2n$ различных натуральных чисел)

$= n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \overset{(n>0)}{>} 2n^2$, а по условию множество $S = 2n^2 \Rightarrow$ $(S > S)$

$\Rightarrow$ ~~...~~ противоречие $\Rightarrow$ предположение о том, что множества не пересекаются (нет элемента $a_i = b_j$), неверно $\Rightarrow$ найдётся число, которое принадлежит сразу двум множествам (A и B).

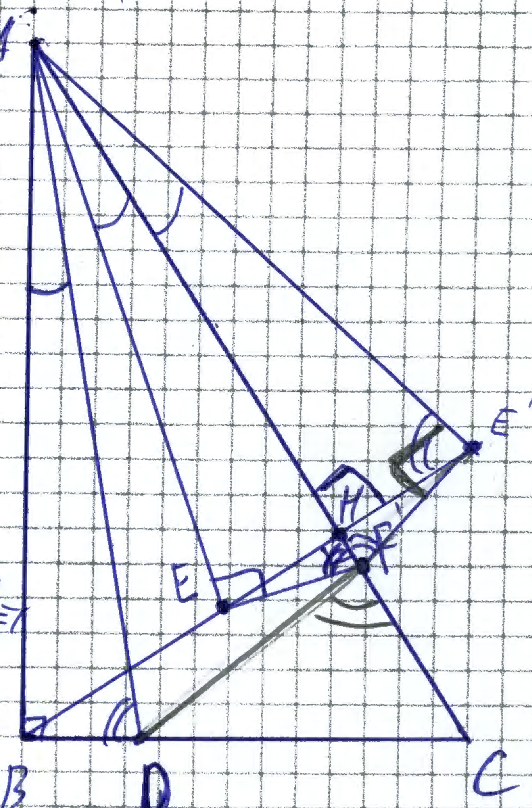
ч.т.д.

Лист 3 из 4

№ 11.3

М11-09

$\angle BAD = \angle EAC = \alpha$



~~Доказ~~ Док-во:

Рассмотрим точку F' такую, что $\angle AEF' = 90°$.

$F' \in AC$ (прямой)

Заметим, что $F' \in HC$ (т.к. $\angle AEH < 90°$ ($\angle AHE = 90°$), $\angle AEC > \angle ABC = 90°$ ($\angle CAB > \angle CAE$)) $\Rightarrow$ где-то на отрезке HC найдётся точка такая, что $\angle AEF' = 90°$)

Отметим точку E', симметричную E относительно AC ($EH = E'H$; $\angle EHF' = \angle F'HE'$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HF'E = \angle HF'E' = \beta$. $\angle HAE' = \angle HAE = \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ (углы прилежащие к гипотенузе, в $\triangle AEF'$).

$\angle BDA = 180° - \angle BAD - \angle DBA = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha = \beta$

$\angle HE'A = 180° - \angle E'HA - \angle E'AH = 180° - 90° - \alpha = \beta$

$\angle AE'B = \angle ADB = \beta$. Так как углы опираются на ~~один~~ один отрезок (AB) $\Rightarrow A, E', D, B \in$ одной окружности.

$\angle ABD = 90° \Rightarrow AD$ – диаметр этой окружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AE'D = 90°$, как опирающийся на диаметр.

Но как же нам известно, что $\angle AE'F' = 90°$ (по построению) $\Rightarrow$

$\Rightarrow F' \in E'D$ (прямой)*. Но тогда $\angle HF'E' = \angle CFD = \beta$ (как вертикальные углы) $\Rightarrow \angle AF'E = \angle CF'D$.

На отрезке HC этим свойством обладает только одна точка (т.к. если мы будем приближать F' к H, $\angle EF'H$ будет расти, $\angle DF'C$ будет уменьшаться, а если мы будем приближать F' к C, $\angle DF'C$ будет расти, $\angle EF'H$ будет уменьшаться $\Rightarrow$ равенство достигается в одной точке) $\Rightarrow$

~~[illegible]~~ $\Rightarrow F'$ задаётся однозначно. И совпадает с F

Но тогда F обладает теми же свойствами $\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ$.

* Теперь поясним, почему расположение точек E', F' и D именно таково:

Ранее было доказано, что они $\in$ одной прямой; рассмотрим луч AK, изначально совпадающий с лучом AB, будем поворачивать луч (двигать K вдоль прямой BE'). $\angle BAD = \alpha$; $\angle BAF' > \alpha$ ($\angle BAF' = \angle BAC > \alpha$, т.к. $D \in$ отрезку BC); $\angle BAE' > 2 \cdot \angle EAC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAE' > 2\alpha \Rightarrow$ луч AK будет совпадать с лучами AD, AF' и AE' именно в этом порядке $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точки расположены на прямой именно в этом порядке удаления от пересечения AB и $E'D$.

(все точки находятся в одной полуплоскости от прямой AB; $\alpha, \beta < 90^\circ$)

Все переходы равносильны, расположение всех точек однозначно определяется (задаётся) расположением точек A, B, C и $D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ факт обратный данному тоже верен $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расположение точки $F \Leftrightarrow$ тому, что $\angle AEF = 90^\circ$.

ч.т.д.

Лист 1 из

М11-49

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	4	0	18

18.

№11.6

$x+1$; x^2+1; x^3+1; x^4+1 (1) (2) (3) (4)

1) применим операцию вычитания к функциям

(2) и (1): $(x^2+1)-(x+1)=x^2+1-x-1=x^2-x=x(x-1)$

2) А теперь к функциям (3) и (2): $(x^3+1)-(x^2+1)=x^3+1-x^2-1=$
$=x^3-x^2=x^2(x-1)$

3) Перемножим полученные функции:

$x(x-1)\cdot x^2(x-1)=\boxed{x^3\cdot(x-1)^2}$

Рассмотрим полученную функцию:

О.Д.З. – все действительные числа; $(x-1)^2\geq 0$ при любом действительном x; $x^3>0$, при $x\in(0;+\infty)$; $x^3<0$, при $x\in(-\infty;0)$ $\Rightarrow$ при $x>0$, $f(x)=x^3\cdot(x-1)^2\geq 0$; при $x<0$, $f(x)=x^3(x-1)^2\leq 0$; функция не нулевая, что и требовалось показать.

№11.7

Ответ: да, можно.

Решение: будем распределять все числа на 2 группы (2 цвета) и покажем, что никакие 2 числа из одной группы не дадут в сумме степень двойки, все числа будут распределены.

1. Распределим нечётные числа: группа I – все числа вида $4k+1$; II группа – все числа вида $4k+3$.

Покажем, что 2 числа из одной группы в сумме не дают 2^k:

1) $\underbrace{4k_1+1}_{\text{первое число}}+\underbrace{4k_2+1}_{\text{2 число}}=4\cdot(k_1+k_2)+2=2\cdot(2\cdot(k_1+k_2)+1)$; $(k\in\mathbb{Z},\ k\geq 0)$

$k_1+k_2\geq 1$ (т.к. ~~в~~ в группах ~~только~~ все числа различные; числа натуральные $\Rightarrow$ только одна из k может быть 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot(k_1+k_2)$ – чётное число $\Rightarrow 2(k_1+k_2)+1\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot(2(k_1+k_2)+1)\equiv 2 \pmod 4$; $2(2(k_1+k_2)+1)>2 \Rightarrow$ не является степенью двойки.

М11-49

шифр 2 из

2) $\underbrace{4k_1+3}_{1\ \text{число}} + \underbrace{4k_2+3}_{2\ \text{число}} = 4(k_1+k_2)+6 =$

$= 2\cdot(2\cdot(k_1+k_2)+3)$; аналогично $2\cdot(k_1+k_2)+3 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 2\cdot(2(k_1+k_2)+3) \equiv 2 \pmod 4$; $\neq 2 \Rightarrow$ не является степенью двойки. (Рассуждения аналогичны рассуждениям для первой группы).

2. Теперь распределим чётные. Рассмотрим произвольное чётное число A. $A = 2^k \cdot l$, где $(k, l \in \mathbb{Z};\ k, l \geq 0)$ k – максимальная степень вхождения двойки в A; l – нечётный множитель (l может быть 1). Теперь определим A к одной из групп: если $l = 4m+1$, то A попадает в первую группу; если $l = 4m+3$, то – во вторую. $(m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0)$

Покажем, что сумма двух чисел из одной группы $\neq$ $\neq 2^k$. ~~Пусть одно из чисел $= 2^x($~~

1) Для первой группы: $A = 2^x(4l_1+1)$; $B = 2^y(4l_2+1)$

Не умоляя общности, пусть $x \geq y$

$A+B = 2^x(4l_1+1) + 2^y(4l_2+1) = 2^y(2^{x-y}(4l_1+1) + 4l_2+1) =$

$= 2^y(2^{x-y+2}\cdot l_1 + 2^{x-y} + 4\cdot l_2 + 1)$

Два случая: 1.1) $x=y \Rightarrow 2^{x-y+2}\cdot l_1 = 4\cdot l_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A+B = 2^y(4l_1+4l_2+2) = 2^{y+1}\cdot(\underbrace{2\cdot(l_1+l_2)}_{\vdots 2}+1) \Rightarrow$ ⋮̸2

$\Rightarrow A+B = 2^k\cdot l_3$, где l_3 – нечётн. >1 (аналогично док-ву для нечётных).

1.2) $x>y \Rightarrow \underbrace{2^{x-y+2}\cdot l_1}_{\vdots 2} + \underbrace{2^{x-y}}_{\vdots 2} + \underbrace{4\cdot l_2}_{\vdots 2} + 1$ – нечётное число $\Rightarrow A+B \neq 2^k$.

2) Для второй группы: $A = 2^x(4l_1+3)$; $B = 2^y(4l_2+3)$ $(x, y, l_1, l_2 \in \mathbb{Z};\ x, y, l_1, l_2 \geq 0)$

2.1) $x=y \Rightarrow A+B = 2^x(4(l_1+l_2)+6) = 2^{x+1}(\underbrace{2(l_1+l_2)+3}_{\not\vdots 2})$

$\Rightarrow A+B \neq 2^k$

М11-49

Мин 3 из

2.2) $x > y \Rightarrow A + B = 2^y(\underbrace{2^{x-y}}_{\vdots 2}(4l_1+3) + \underbrace{4l_2+3}_{\not\vdots 2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow A+B \neq 2^k$. Таким образом, сумма двух чисел из одной группы не является степенью двойки.

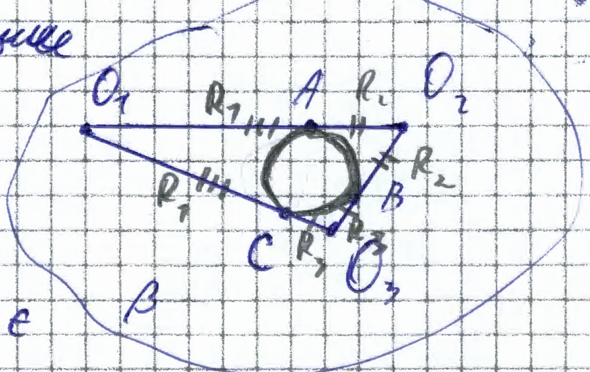
Все натуральные нечётные числа представимы в виде $4k+1$ или $4k+3$ $\Rightarrow$ мы распределили все нечётные (нечётные числа $\equiv 1$ или с 3 по mod 4); любое натуральное чётное число можно представить в виде $2^k \cdot l$, где l - нечётное $\Rightarrow$ мы можем распределить все чётные числа $\Rightarrow$ мы распределяем в 2 группы (красим) все натуральные числа $\Rightarrow$ это возможно сделать.

№11.9

Рассмотрим центры этих сфер: O_1, O_2, O_3; радиусы сфер $= R_1, R_2, R_3$ соответственно.

Проведём плоскость β через O_1, O_2 и O_3.

Заметим, что кратчайшее расстояние между каждой парой центров - прямая их соединяющая; все точки $\in (\beta) \Rightarrow$ все 3 прямые $\in (\beta) \Rightarrow$ точки касания (A, B и C) $\in (\beta)$. (сферы касаются внешним образом; кратчайшее расстояние между ~~[illegible]~~ центрами $\in$ прямой, соединяющей центры, и проходит через точку касания). $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_1O_3 = R_1 + R_3$; $O_2O_3 = R_2 + R_3$



$O_1A = O_1C = R_1$; $O_2A = O_2B = R_2$; $O_3C = O_3B = R_3$

Теперь рассмотрим окружность, касающуюся прямых O_1O_2 и O_1O_3 в точках A и C соответственно (такая существует, поскольку $O_1A = O_1C$). Заметим, что длина отрезков касательных от O_2 и O_3 до окружности $= R_2$ и R_3 соответственно;

$O_2B=R_2$, $O_3B=R_3$ ⇒ окружность, проходящая через A, B и C — вписанная окружность $\triangle O_1O_2O_3$.

Так как через 3 точки проходит единственная (не лежащие на одной прямой) окружность ⇒ опис. окр. $\triangle ABC$ = впис. окр. $\triangle O_1O_2O_3$.

Рассмотрим площадь $\triangle O_1O_2O_3$.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=p\cdot r \qquad p=\frac{a+b+c}{2}$$

По формуле Герона. радиус вписанной окр.

$$p=\frac{(R_1+R_2)+(R_2+R_3)+(R_1+R_3)}{2}=R_1+R_2+R_3$$

$$p-a=R_1+R_2+R_3-(R_1+R_3)=R_2$$

$$p-b=R_1+R_2+R_3-(R_1+R_2)=R_3$$

$$p-c=R_1+R_2+R_3-(R_2+R_3)=R_1$$

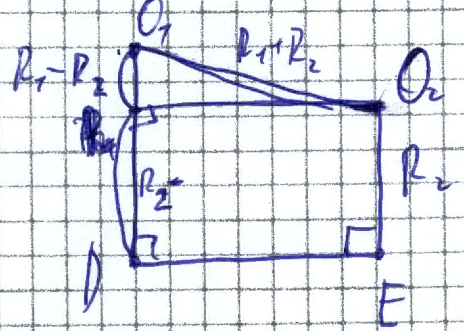
$\Downarrow$

$$r=\frac{\sqrt{p\cdot R_1R_2R_3}}{p}=\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$ — радиус опис. окр. $\triangle ABC$.

Рассмотрим (α).

$O_1D\perp(\alpha)$; $O_2E\perp(\alpha)$; $O_3F\perp(\alpha)$ ⇒ $O_1D \parallel O_2E \parallel O_3F$.

Рассмотрим четырёхугольник O_1DEO_2 (лежит в одной плоскости, т.к. $O_1D\parallel O_2E$):

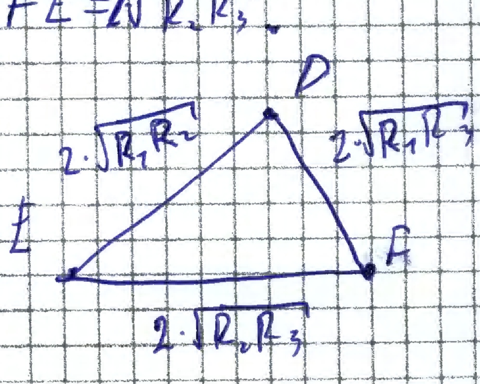


— прямоугольная трапеция; без умаления общности $R_1>R_2$

$$DE=\sqrt{(R_1-R_2)^2+(R_1+R_2)^2}=\sqrt{R_1^2+R_2^2+2R_1R_2-R_1^2-R_2^2+2R_1R_2}=2\cdot\sqrt{R_1R_2}.$$

Аналогично $DF=2\cdot\sqrt{R_1R_3}$; $FE=2\sqrt{R_2R_3}$.

Рассмотрим $\triangle DFE$:



$$S_{\triangle DEF}=\frac{DE\cdot DF\cdot EF}{4r'},$$

где r' – радиус опис. окр. $\triangle DEF$.

М11-49

$$S_{\triangle DEF} = \frac{8\cdot\sqrt{R_1R_2}\cdot\sqrt{R_2R_3}\cdot\sqrt{R_1R_3}}{4\cdot r'} = \frac{2\cdot R_1R_2R_3}{r'} \Rightarrow r' = \frac{2\cdot R_1R_2R_3}{S_{\triangle DEF}}$$

Теперь ~~посмотрим на~~ посчитаем эту же площадь через формулу Герона:

$$S_{\triangle DEF} = \sqrt{\frac{2\sqrt{R_1R_2}+2\sqrt{R_2R_3}+2\sqrt{R_1R_3}}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{R_1R_2}+2\sqrt{R_2R_3}-2\sqrt{R_1R_3}}{2}\right)\times}$$
$$\overline{\times\left(\frac{2\sqrt{R_1R_2}+2\sqrt{R_1R_3}-2\sqrt{R_2R_3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{R_1R_3}+2\sqrt{R_2R_3}-2\sqrt{R_1R_2}}{2}\right)};$$

$$S_{DEF}^2 = (\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3})(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}-\sqrt{R_1R_3})(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_2R_3})\times$$
$$\times(\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_2}) = (R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3+2\cdot R_2\sqrt{R_1R_3})\times$$
$$\times(2R_2\sqrt{R_1R_3}\cancel{+R_1\sqrt{R_2R_3}}-R_1R_2\cancel{+\sqrt{R_1R_2}\cdot R_3}+R_1R_3\cancel{-R_1\sqrt{R_2R_3}}-R_2R_3\cancel{-R_3\sqrt{R_1R_2}}+$$
$$\cancel{+R_2\sqrt{R_1R_3}}) = (R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3+2R_2\sqrt{R_1R_3})(2R_2\sqrt{R_1R_3}-R_2R_3+R_1R_3-$$
$$-R_1R_2) = 4\cdot R_2^2\cdot R_1R_3-(R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3)^2 = 4R_2^2R_1R_3-(R_1^2R_2^2+$$
$$+\cancel{R_2^2R_1R_3}-2R_1^2R_2R_3+\cancel{R_2^2R_1R_3}+R_2^2R_3^2-2R_1R_2R_3^2\cancel{-R_1^2R_2R_3}-R_3^2R_1R_2+$$
$$+R_1^2R_3^2) = 2R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)-R_2^2R_3^2-R_1^2R_2^2-R_1^2R_3^2$$

$$r' = \frac{2R_1R_2R_3}{\sqrt{2R_1R_2R_3(R_1+R_2+R_3)-R_2^2R_3^2-R_1^2R_2^2-R_1^2R_3^2}}$$

и что дальше?