Задача № 1.

Возьмём два числа в группу n и $10-n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \in [1;4]$

Тогда сделаем такие операции, начиная с нечётной минуты:

$$n\ ;\ 10-n \ \longrightarrow\ n\ ;\ 5;\ \underset{\overset{\vee}{1}}{5-n} \ \longrightarrow\ \underset{n+(5-n)}{5};5,$$

т.е. за 2 минуты мы из $n; 10-n$ сделали $5;5$, а следующая минута также будет нечётная, тогда мы данные операции можем сделать для всех 4-х групп, начиная с первой минуты, и получим через 8 минут:

$\underbrace{5,5,5,\ \dots\ 5}_{8шт},5,10$, т.к. следующая минута нечётная, то 10 делим на 5 и 5 ~~камней~~ конфет. Получаем:

$\underbrace{5,5,\ \dots\ 5}_{11шт}$ Получили, что во всех кучках по 5 конфет. Получили как надо!

1	2	3	4	5	
+	±	+	∓	0	Д-н
7	3	7	1	0	Ау

+3 Ау

$\Sigma = 18$

$\Sigma = 21$ Ау

Задача №2.

Пусть наши числа: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$

Упорядочим их: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, можем так сделать, т.к. они все различны.

Рассмотрим любую a_i и a_{n+1-i}, что $a_i \neq a_{n+1-i}$, у нас число ≥ 3 по условию, значит такие найдутся.

Тогда чисел между a_i и a_{n+1-i}

если $(a_i - a_{n+1-i}) \vdots 10$

тогда их $\frac{|a_i - a_{n+1-i}|}{10} - 1$, а если $|a_i - a_{n+1-i}| \not\vdots 10$, то

их $\left[\frac{|a_i - a_{n+1-i}|}{10}\right]$, т.к. a_i и $a_{n+1-i} \in \mathbb{Z}$, то в общем случае

их: $\left[\frac{|a_i - a_{n+1-i}| + 8}{10}\right]$ Тогда всего чисел включая a_i и a_{n+1-i}

максимум чисел:

$$\left[\frac{|a_{n+1-i}-a_i|+9}{10}\right]+2;$$

Тогда чисел максимально, когда

$|a_{n+1-i}-a_i| - max \Rightarrow a_{n+1-i}$ и a_i максимально удалены друг от друга.

Пусть a_n и a_1; a_{n-1} и a_2! - - максимально удалены $\Rightarrow a_n, a_{n-1} \ldots a_j$, где $j \geq \frac{n}{2}$, а $j-1 \leq \frac{n+1}{2}-1$ максимально сближены, а остальные между собой, но удалены от $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_j$.

Тогда максимум есть тогда, когда a_n и a_1 по модулю максимальны. Заметим, что чисел ≥ 6, т.к. можно привести пример на 6: $-30; -20; -10; 10; 20; 30$.

Тогда a_1, a_2, a_3, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n различны.

a_{n-2}, a_{n-1}, a_n максимально сближены $\Rightarrow a_{n-2} = a_{n-1}-10$;
$a_n = a_{n-1}+10$,

~~макс~~ минимальная их разница 10. (Также заметим, что для максимального кол-ва чисел $a_n > 0$, а $a_2 < 0$.)

$$a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2 \leq 3\cdot 10^6$$

$$(a_{n-1}-10)^2 + a_n^2 + (a_{n-1}+10)^2 = 3a_{n-1}^2 + 20a_{n-1} - 20a_{n-1} + 200 =$$
$$= 3a_{n-1}^2 + 200 < 3\cdot 10^6$$
$$3a_{n-1}^2 < 3\cdot 10^6 - 200 = 3000000 - 200 = 2999799$$
$$a_{n-1}^2 < 999933$$
$$a_{n-1}^2 \leq 999932 <$$
$$(10^3)^2 > 999932 \geq (10^3-1)^2 = (10^3)^2 \underbrace{-2\cdot 10^3+1}_{-100}.$$

Т.к. $a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ и $a_{n-1} > 0$, и $(10^3)^2$ и $(10^3-1)^2$ последовательные квадраты, а $a_{n-1} < (10^3)^2$, то $a_{n-1} = 10^3-1 \Rightarrow a_n = 10^3+9$
$a_{n-2} = 10^3-11$

Аналогично рассуждая приходим к тому, что т.к. $a_2 < 0$ и $a_2^2 \leq 999932$, то $a_2 = -(10^3-1) \Rightarrow$

Тогда по формуле, кол-во чисел будет:

$$K = \left[\frac{a_n - a_1 + 9}{10}\right] + 2 = \left[\frac{10^3+9 + 10^3+9+9}{10}\right] + 2 =$$

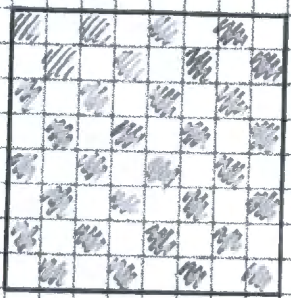
$$= \left[\frac{2\cdot 10^3 + 27}{10}\right] + 2 = \left[\frac{2027}{10}\right] + 2 = 202 + 2 = 204.$$

Ответ: максимум 204 числа

Пример:

$10^3+9;\ 10^3-1, \ldots, 9, -9, \ldots -(10^3+9)$.

Задача №3



Раскрасим доску в шахматную раскраску. Заметим, что чёрных клеток $\frac{64}{2}=32$. Тогда будем играть за Колю и ставить крестики в чёрные клетки.

Заметим, что за ход Дима ставит доминошку, которая закрывает 1 чёрную и 1 белую клетку, а мы занимаем 1 чёрную клетку, Дима не может покрыть 2 крестика, т.к. мы их ставим на 1 цвет, то есть они не стоят рядом. Значит после хода Димы всегда остаётся нечётное кол-во чёрных клеток ≥ 1 (т.к. вначале их 32 и он ходит первым), а после нашего чётное кол-во $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ У нас всегда есть ход, куда сходить, то есть когда чёрные клетки закончатся, то следующий ход будет Димы и он не сможет сходить, т.к. нет 2 стоящих рядом крестика, а все чёрные клетки заняты и ≥ 1 белая клетка будет, т.к. мы с ним суммарно займём $3\cdot\frac{32}{2} = 3\cdot 16 < 64$ клетки. Тогда Дима не сможет сделать ход и он проиграет, а Коля выиграет.

M9-24

стр 4

Задача №4

Пусть это не так, тогда для каждого y найдутся такие a_y и b_y: $a_y b_y = py+1$, и $a_y, b_y > y$.

Выпишем их все: т.к. p - простое и $p>3$, то p - нечетное $\Rightarrow y \le \frac{p-1}{2}$

$$a_1 b_1 = p+1$$

$$a_2 b_2 = 2p+1$$

$$\dots$$

$$a_{\frac{p-1}{2}} b_{\frac{p-1}{2}} = p\cdot\frac{p-1}{2}+1$$

Перемножим их все

$$a_1 a_2 \dots a_{\frac{p-1}{2}} b_1 b_2 \dots b_{\frac{p-1}{2}} = (p+1)(2p+1)\dots\left(p\cdot\frac{p-1}{2}+1\right)$$

$$a_i > i \Rightarrow a_i \geq i+1$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 a_2 \dots a_{\frac{p-1}{2}} b_1 b_2 \dots b_{\frac{p-1}{2}} \geq (p+1)\dots\left(p\frac{p-1}{2}+1\right)$$

$a_1 \geq 2$, $a_2 \geq 3$, $a_{\frac{p-1}{2}} \geq \frac{p+1}{2}$, $b_1 \geq 2$, $b_2 \geq 3$, $b_{\frac{p-1}{2}} \geq \frac{p+1}{2}$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)!^2 \le (p+1)\dots\left(p\frac{p-1}{2}+1\right)$$

1 можно не учитывать $\Rightarrow$ $\frac{p-1}{2}\cdot 2$ множителей; $\frac{p-1}{2}$ множителей

~~сох~~ сравним $(k+1)^2$ и $pk+1$

$$\Updownarrow$$

$$k^2+2k+1 \qquad pk+1$$

$$\Updownarrow$$

$$k(k+2-p) \qquad 0$$

Заметим что $k \le \frac{p+1}{2} \Rightarrow k(k+2-p) \le k\left(\frac{p+1}{2}+2-p\right) =$

М 9-24

стр5

$k\left(\frac{p+5}{2}-p\right)=k\left(\frac{5-p}{2}\right)\leq 0,$

при $p\geq 5$, а у нас $p>3 \Rightarrow p\geq 5$,

при $p>5$ у нас $\forall k$: $(k+1)^2 < pk+1$

$\left(\frac{p+1}{2}\right)!^2 < (p+1)(2p+1)\cdot\ldots\cdot\left(p\frac{p-1}{2}+1\right)$

Противоречие $\Rightarrow$ найдутся a_i b_i:

где одно их a_i, a_i или $b_i \leq i \Rightarrow a_y$ или $b_y \leq y$ при $i=y$.

Нашли такое y.

Остался случай $p=5$. Возьмём $y=2$:

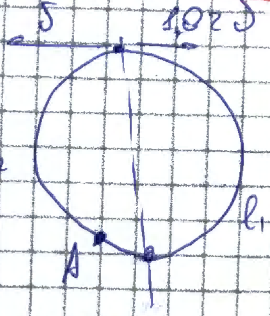
$py+1 = 5\cdot 2+1 = 11$, одно из чисел будет <2,

т.к. 11-простое число! Ч.Т.Д. Значит всегда найдётся такое y.

Задача №6

Пусть скорость Пети v, тогда скорость Миши $v_1 = 1{,}02v$ по условию.

Пусть изначально Миша и Петя побежали в разные стороны до встречи: Пусть длина круговой дорожки l. Тогда они встретятся 1ый раз в точке A, причём Миша пробежит $l_1 > l_2$ – пробежит Петя, т.к. они бегали в одно и тоже время t_0, то

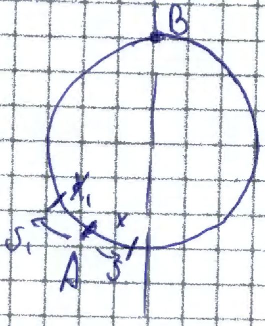


$l_1 = 1{,}02v \cdot t_0$; $l_2 = v \cdot t_0$ $\Rightarrow$ $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1{,}02v}{v} = 1{,}02$

$l_1 = 1{,}02\, l_2 \Rightarrow l_1 > l_2$. Но вместе они пробегали 1 круг $\Rightarrow l_1 + l_2 = l$

но т.к. $l_1 > l_2 \Rightarrow l_1 > \frac{l}{2}$. $l_1 + l_2 = l_1 + \frac{l_1}{1{,}02} = \frac{2{,}02}{1{,}02} l_1 = l \Rightarrow l_1 = \frac{1{,}02}{2{,}02} l > \frac{l}{2}$

Пусть после встречи Петя пробежит x, тогда Миша пробежит $x_1 = 1{,}02x$, т.к. $\frac{x_1}{x} = \frac{1{,}02v}{v} = 1{,}02 \Rightarrow x_1 = 1{,}02x$, т.к. бегали одно и тоже время, и после этого Миша развернётся, (может развернуться, т.к. $l_1 > \frac{l}{2}$) пусть тогда развернётся, что $x_1 = 1{,}02x < l_2$, а $x < l_1$ (тогда ещё у них пока 1 встреча): Теперь посмотрим времена, которые они бегут до точки B, откуда стартовали.



Петя: $t_п = \frac{l_1 - x}{v}$.

Миша: $t_м = \frac{l_1 + x_1}{v_1} = \frac{l_1 + 1{,}02x}{1{,}02v} = \frac{\frac{l_1}{1{,}02} + x}{v}$

Посмотрим, когда $t_м < t_п$:

$$t_м = \frac{\frac{l_1}{1{,}02} + x}{v} < \frac{l_1 - x}{v} \quad \Big| \cdot v > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{l_1}{1{,}02} + x < l_1 - x$$

$$2x < \frac{0{,}02\, l_1}{1{,}02}$$

$$x < \frac{0{,}01\, l_1}{1{,}02}$$

Тоесть если $x > 0$ и $x < \frac{0{,}01\, l_1}{1{,}02} = \frac{0{,}01}{1{,}02} \cdot \frac{1{,}02}{2{,}02} l = \frac{0{,}01}{2{,}02} l = \frac{1}{202} l$

6	7	8	9	10	
–	+	+	+	0	Д
0	7	7	7	0	21

Но Миша пробежит быстрее Пети до

М9-29
стр 12

Миша встретит по дороге Петю, это будет 2ая встреча, а т.к. он пробежит $l_1 + x_1 > l_1 > \frac{l}{2}$, то может снова развернуться и тогда будет бежать навстречу Пети, который ещё не пробежал 1 круг и произойдёт 3ая встреча.

Значит Миша может трижды повстречать Петю
ч.т.д.

Задача №7

Рассмотрим зелёного хамелеона. Пусть хамелеоны что-то говорят. И пусть зелёный сказал, что ~~на~~ среди них x зелёный, тогда их и правда x, и после ~~того~~ того, как он сказал, то их тоже осталось x, заметим, что следующий хамелеон говорит, что их $y \neq x$ по условию, т.к. их всего 2019 и были все 2019 ответов => все разные, тогда этот хамелеон говорит неправду, т.к. зелёный на тот момент x, тогда он коричневый. Тогда после зелёного хамелеона всегда говорит коричневый, а т.к. хамелеоны не повторяются, то зелёных не больше коричневых чем на 1; тогда $З \le K+1$, ~~но~~ (на начальный момент времени) Но сначала

$З + К = 2019 \Rightarrow З = 2019 - К$; $К = 2019 - З$

$З \le К + 1$

$\Downarrow$

$З \le 2019 - З + 1 \Rightarrow 2З \le 2020 \Rightarrow З \le 1010$

Максимум 1010 зелёных хамелеонов изначально было => коричневых $К = 1009$.

Пример: Пусть говорят по очереди, сначала зелёный, потом коричневый и говорят:

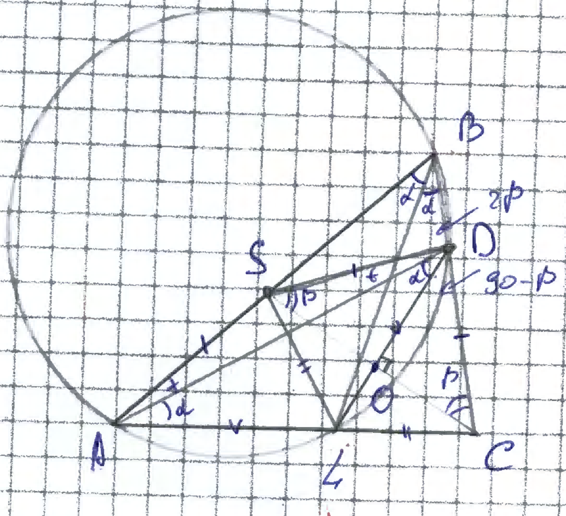
Хамелеоны:	З	К	З	К	З	...	К	З
Ответ:	1010	1	1011	2	1012	--	1009	2019

Тогда хамелеоны говорят от 1 до 1009 всего 1009 ответов => и

Зелёный хамелеонов = 1010, т.к. они не перекрашиваются => коричневые врут, а зелёные на 1 больше каждый раз говорят, т.к. перед зелёным, коричневый перекрашивается в зелёного. Тогда они всегда говорят правду, т.к. первый сказал правду.

Ответ: 1010.

Задача №8



$\angle ABL = \angle LBC = \alpha$, т.к BL - биссектриса.

Т.к. $ABDL$ - вписанный, то $\angle ABL = \angle ADL = \alpha$, и $\angle LBD = \angle DAL = \alpha$, т.к они опираются на одинаковые дуги одной окружности.

Пусть $\angle DCS = \beta = \angle DSC$, т.к. $\triangle SDS$ р/б ($SD = DC$), т.к. C - симметрична точке S, относительно DL. тогда $\angle SDB = 2\beta$, т.к он внешний для $\triangle SDC$.

Пусть $O = SC \cap DL$, тогда DO высота в $\triangle SDC$, т.к. S симметрична C, тогда по сумме углов $\triangle DOC \Rightarrow \angle ODC = 90 - \beta$.

тогда $\angle SDA = \angle BDC - \angle SDB - \angle ADL - \angle ODC = 180 - 2\beta - \alpha - (90 - \beta) = 90 - \alpha - \beta$ (угол именно такой, т.к. расположение точек именно такое по условию). Но сумме углов $\triangle SBD$: $\angle BSD = 180 - 2\alpha - 2\beta$, он же внешний для $\triangle ASD \Rightarrow \angle BSD = \angle SAD + \angle SDA \Rightarrow \angle SAD = \angle BSD - \angle SDA = 180 - 2\alpha - 2\beta - (90 - \alpha - \beta) = 90 - \alpha - \beta = \angle SDA \Rightarrow \triangle ASD$ р/б ($AS = SD$).

Тогда т.к. S симметрична точке C, то $AS = SD = DC$. Аналогично $SL = LC$. А $AL = LD$, т.к. $ABDL$ - вписанный, $\angle ABL = \angle LBD$ (BL-биссектриса) $\Rightarrow \smile AL = \smile DL \Rightarrow AL = DL$, т.к. стягивают равные дуги одной окружности $\Rightarrow \triangle LAS = \triangle LDS = \triangle LDC$ по 3-м

$= \angle DLC$.

Но $\angle DLC = \angle ABD$, $\angle ABD = \angle ABC$, т.к. $ABDL$ – вписанный (по свойству вписанного 4-х угольника), тогда $\angle ALS + \angle SLD + \angle DLC = 3\angle ABC = 180^\circ$, т.к. A, L, C – лежат на одной прямой $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

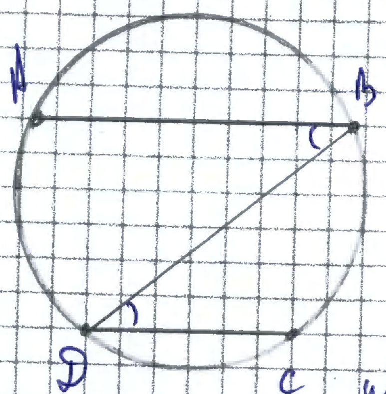
Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

+

Задача №9

Пусть у нас в каждом многоугольнике по n сторон и n вершин. n-нечётное, по условию.

Рассмотрим хороший многоугольник, пусть он нашелся. ~~Пусть это~~ Пусть у него параллельны 2 стороны AB и CD. Заметим, что A, B, C, D - это

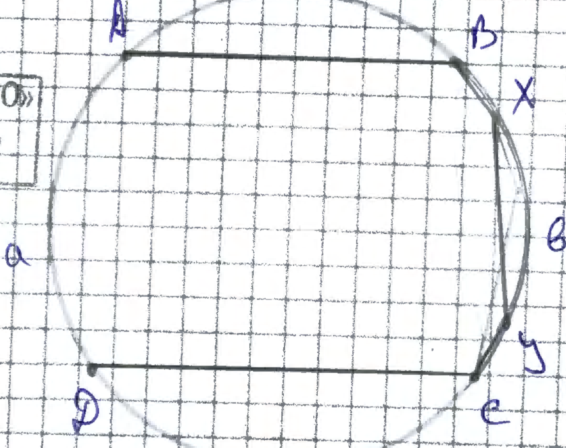


вершины ~~нашего~~ нашего правильного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность. Опишем её.

Т.к. $AB \parallel CD$, то $\angle ABD = \angle BDC$, т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей BD.

Тогда, т.к. $\angle ABD = \angle BDC$ и они вписанные, то $\smile BC = \smile AD \Rightarrow$ ~~на~~ дуги AD и BC стягивают ~~одинаков~~ одинаковое кол-во сторон правильного многоугольника, т.к. они все равны и A, B, C, D являются его вершинами. Тогда пусть по a сторон, тогда у вписанного многоугольника $AB \ldots CD \ldots$, ровно $2a + 2 = 2(a+1)$ сторон, чётное число (к сторонам AB и CD прибавили стороны правильного многоугольника).

Теперь рассмотрим наши получившиеся многоугольники, в них нет никаких отрезков, т.к. по условию диагонали не пересекаются во внутренних



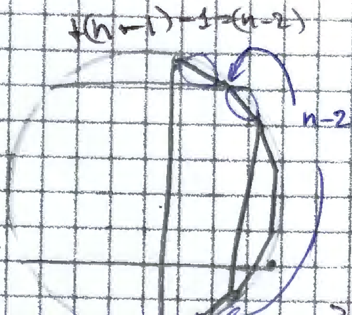
Рассмотрим в нашем этом многоугольнике сторону, которая является диагональю правильного многоугольника.

Она содержиться в каком-то тоже находиться в каком-то многоугольнике, который является надстройкой для рассматриваемого, теперь заменим XY сторону нашего многоугольника на (n−1) ~~другую~~ другую, которые находятся в одном многоугольнике с XY. Тогда кол-во сторон в нашем новом многоугольнике:

$n-1+(n-1) = 2(n-1) = n+(n-2)$. Аналогично продолжим опперацию с новым многоугольником и т.д., пока не получим ~~А~~ в нашем многоугольнике стороны AB, CD и стороны правильного многоугольника. Пусть сделали k опперацийб. Тогда в конце сторон стало: $n + k(n-2) = 2a+2$, т.к. n-нечётное и n-2 тоже ⇒ ⋮2 ⋮2

⇒ k-нечётное

значит с какой-то стороны, правее BC, или левее AD (по картинке) ~~...~~ кол-во диагоналей проведённых больше. Пусть кол-во диагоналей a и в, a>в. Теперь мы можем обратно размотать процесс, теперь за опперацию ~~...~~ также добавляются по (n−2) новые стороны, ~~но т.к.~~ может с каждой дуги убирается по n−2.



но, т.к. кол-во опперацийб a и в различны, и на ∪BC и ∪AD кол-во сторон правильного многоугольника ~~один~~ одинаковое, но с какой-то стороны останется кол-во ст

~~Это~~ Эти стороны будут сторонами изначально рассматриваемого многоугольника со сторонами AB и CD.

Пусть эти стороны суммарно на $\smile BX$ и $\smile CY$, а у нас ещё ≥ 1 сторона на $\smile AD$ должна быть, т.к. $AB \parallel CD$ и $A \neq D$, то как-то A и D соединяются через стороны многоугольника, тогда в нём сторон $\geq (n-2)+2+1 = n+1$

$n-2$ – это на $\smile BX$ + $\smile CY$, 1 на $\smile AD$ и 2 – AB и CD. Противоречие, т.к. всего в каждом многоугольнике по n сторон, а в нашем $\geq n+1$ уже $\Rightarrow$ Противоречие, тогда не найдётся хорошего многоугольника!

+