М11-21

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

Задача 11.1

Рассмотрим все способы получить 77 как произведение целых чисел:

$77=(-1)\cdot(-77)=(-7)\cdot(-11)=(1\cdot 77)=(7\cdot 11)$

Тогда заметим, что остальные числа могут находиться только между наибольшим из наименьших (m) и наименьшим из наибольших (M), и всего чисел $\leq 2+2+(M-m)-1 \leq$
$\leq 4+7-(-7)-1=17$

$M=1,7,-1,-7$

$m=77,11,-11,-7$

Пример: $-11,-7,-6,-5,\ldots,5,6,7,11$

Задача 11.2.

Докажем, что среди первых n чисел $(1,2,\ldots n)$ в каждое мн-во входят $>\left[\frac{n}{2}\right]$. Предположим противное, тогда $S \geq \left(1+2+\ldots+\left[\frac{n}{2}\right]+(n+1)+(n+2)+\ldots\right.$
$\left.\ldots(n+\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ (наименьшая сумма достигается, когда чисел среди первых n выбрано наиб. кол-во $(n-\left[\frac{n}{2}\right])$, а остальные числа выбраны подряд, начиная с $n+1$)
$=2\frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}{2}+n\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$

Обозначим через $S(X)$ сумму чисел в мн-ве X.

Предположим противное, тогда все $2n$ чисел в A и B различны. Но тогда $2n^2=S(A)+S(B)\geq(1+2+3+\ldots+2n)=n(2n+1)>2n^2$, противоречие.

Значит наше предположение неверно, и не все числа в A и B различны, а поскольку два одинаковых числа не могут находиться в одном мн-ве, они находятся в разных.

ЧТД

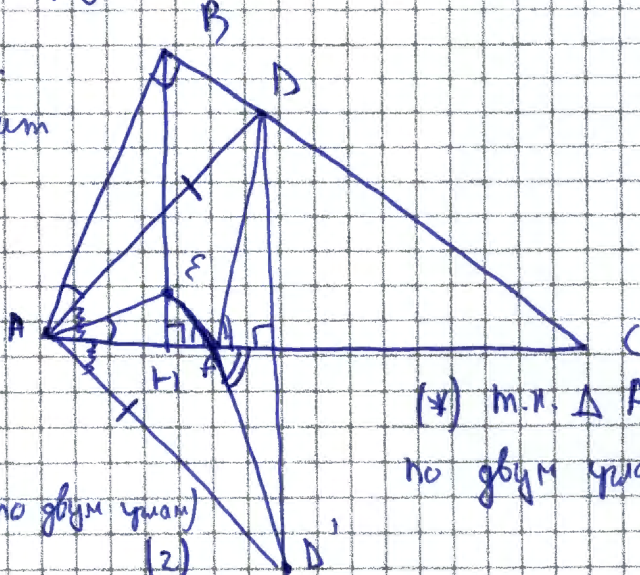
+

Задача 11.3

Пусть D' симметрична D отн. AC.

Т.к. $\angle AFE=\angle CFD=\angle CFD'$, D' лежит на прямой EF.

Далее $\angle EAD'=\angle EAC+\angle CAD'=$
$=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC$ (1)



Далее, $\frac{AE}{AD'}=\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AB}\overset{(*)}{=}\frac{AD}{AB}$

$\overset{(*)}{=}\frac{AH}{AB}=\frac{AB}{AC}$ (т.к. $\triangle AHB\sim\triangle ABC$ по двум углам) (2)

(*) т.к. $\triangle AEH\sim\triangle ADB$ по двум углам

Из (1) и (2) $\Rightarrow\triangle AED'\sim\triangle ABC$ по ~~первому признаку~~ углу и отношению прилежащих сторон $\Rightarrow\angle AEF=\angle AED'=\angle ABC=$
$=90^\circ$

ЧТД

+

M11-21

Задача 11.4

Пусть $a_k = pk+1 = b_k c_k$, где $b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $b_k, c_k > k$

(мы решаем задачу от противного, предполагая, что такое разложение $\exists\ \forall\ 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$)

Т.к. $b_k > k$, то $c_k < \frac{pk+1}{k}$, т.е. $c_k \leq p$, но если $c_k = p$, то $pk+1 \vdots p \Rightarrow 1 \vdots p$, противоречие $\Rightarrow 2 \leq c_k \leq p-1$ ($c_k \neq 1$, т.к. $c_k > k \geq 1$). Аналогично, ~~b_k~~ $2 \leq b_k \leq p-1$.

Посмотрим на $p-1$ число $b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k$. Поскольку на отрезке $[2; p-1]$ $p-2$ числа, $\exists\, i, j$: $b_i = c_j = t$, либо $b_i = b_j = t$

I $i \neq j$ (случай $b_i = b_j$, $b_i = c_j$)

Тогда $pi+1 \vdots t$, $pj+1 \vdots t \Rightarrow p(i-j) \vdots t \overset{t \leq p-1}{\Rightarrow} i-j \vdots t \overset{\text{НУО, } i>j}{\Rightarrow} i > t$, ~~но тогда~~ противоречие с $b_i > i$.

II $i = j$ (случай $b_i = c_i$), тогда $pi+1 = b_i^2 \Leftrightarrow pi = (b_i^2 - 1) = (b_i - 1)(b_i + 1)$

а) $b_i + 1 \vdots p \Rightarrow b_i \geq p-1$, но $b_i \leq p-1 \Rightarrow b_i = p-1 \Rightarrow (p-1)^2 = pi+1 \leq p\frac{p-1}{2}+1$

$\Updownarrow$

$p \leq 3$, противоречие с условием

б) $b_i - 1 \vdots p$, но $b_i > 1 \Rightarrow b_i \geq p+1$, противоречие с $b_i \leq p-1$

Значит, наше предположение неверно, и для какого-то k таких b_k, c_k $\nexists$

ЧТД

Задача 11.1

Рассмотрим все способы представить 77 как произведение двух целых чисел:

$77 = (-77)(-1) = (-11)(-7) = (7)\cdot(11) = (1)\cdot(77)$

Если одна и та же пара является и двумя наибольшими числами, и двумя наименьшими, то всего чисел 2. Далее считаем, что два наиб. числа и два наим — это разные пары чисел (возможны только написанные выше варианты). Пусть m — наибольшее число в наименьшей паре, а M — наименьшее число в наибольшей$^{(*)}$. Тогда все остальные написанные на доске числа ~~все~~ лежат между m и M. Значит, всего чисел $\leq 2+2+(M-m-1) \leq 2+2+7-(-7)-1 = 17$

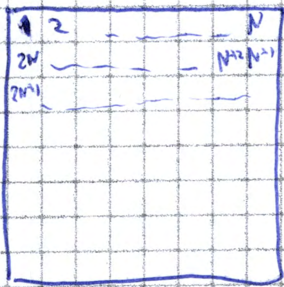
Пример: $-11, -7, -6, -5, \ldots, 5, 6, 7, 11$

(*) $M \in \{1, 7, -11, -77\}$, $m \in \{-1, -7, 11, 77\}$

Задача 11.5

Ответ: $\frac{N^3-N}{2}$

Пример:



расстановка чисел „змейкой"

Тогда $S_{max} = (N+2N+\ldots+N^2)$

$S_{min} = (1+2+\ldots+N)$

$$\Rightarrow S_{max}-S_{min} = N(1+2+\ldots+N)-(1+2+\ldots+N) = \frac{(N-1)N(N+1)}{2} = \frac{N^3-N}{2}$$

М11-08

6	7	8	9	10	Σ
+.	+	+	+	+	35
7	7	7	7	7	

Задача 11.6

Заметим, что многочлен $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$ удовлетворяет условию①. Покажем, как его получить. Для этого последовательно выпишем на доску многочлены:

1) $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$

2) $x^3+x^2 = (x^3+x^2+x+1)-(x+1)$

3) $x^3+x = (x^3+x^2+x+1)-(x^2+1)$

~~4) $x^3+x = (x^3+x^2+x+1)-(x^2+1)$~~

5) $x^3-x^2 = (x^3+x)-(x^2+x)$

6) $x^2-x = (x^3+x^2)-(x^3+x)$

7) $x^3-2x^2+x = (x^3-x^2)-(x^2-x)$

① т.к. при $x>0$ $(x+1)^2 \geq 0$, а при $x<0$ $(x+1)^2 \geq 0$

$x(x+1)^2 \geq 0$ $\quad$ $x(x+1)^2 \leq 0$

4) $x^3+x = (x^3+x^2+x+1)-(x^2+1)$

5) $(x^3-x^2) = (x^3+x)-(x^2+x)$

~~4) $x^3+2x^2+x = (x^3+x^2)+(x^2+x)$~~

6) $x^2-x) = (x^3+x^2)-(x^3+x)$

7) $x^3-2x^2+x = (x^3-x^2)-(x^2-x)$ ← читать всё

ЧТД

+.

Задача 11.7

Ответ: да

Пример: Обозначим через $t_a = \nu_2(a)$ – степень вхождения 2 в число a. ~~Тогда~~ Тогда покрасим все числа a такие, что $\frac{a}{2^{t_a}} \equiv_4 1$, в первый цвет, а ~~все~~ все числа такие, что $\frac{a}{2^{t_a}} \equiv_4 3$, во второй. Заметим, что все числа покрашены, т.к. $\frac{a}{2^{t_a}} \not\vdots 2$ $\forall a \in \mathbb{N}$.

Доказательство примера:

+

Лемма: Если $a+b=2^s$ $(a,b,s \in \mathbb{N})$, то $t_a = t_b$

Док-во леммы: Предположим противное. НУО, $t_a > t_b$, но $2^s > a \geq 2^{t_a}$ => $s > t_a$. Тогда $\frac{a}{2^{t_b}} \vdots 2$, $2^{s-t_b} \vdots 2$, $b/2^{t_b} \not\vdots 2$, противоречие. Лемма доказана.

Перейдём к обоснованию примера. Предположим, $a+b=2^s$ (*) и a и b одного цвета. Это значит, что $\frac{a}{2^{t_a}} \equiv_4 \frac{b}{2^{t_b}}$, но $t_a = t_b$ по лемме (причём $t_a = t_b = t < s$), тогда $2 \equiv_4 \frac{a}{2^t}+\frac{b}{2^t} = 2^{s-t}$, но такое возможно лишь при $2^{s-t}=2$, но $\frac{a}{2^t}, \frac{b}{2^t} \geq 1$ => $\frac{a}{2^t} = \frac{b}{2^t} = 1$ => $a=b$. Значит, при $a \neq b$ равенство (*) невозможно

ЧТД

М11-08

Задача 11.8

Пусть $\sin x+\cos y = p = \frac{p_1}{p_2}$ ($p, q \in \mathbb{Q}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, т.к. $p, q > 0$)
$\sin y + \cos x = q = \frac{q_1}{q_2}$

Выразим $\sin y$ и $\cos y$: $\sin y = q - \cos x$, $\cos y = p - \sin x$.

Значит, $1 = \sin^2 y + \cos^2 y = (q-\cos x)^2 + (p - \sin x)^2 = p^2+q^2 - 2q\cos x - 2p\sin x + \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} \Rightarrow 2q\cos x + 2p \sin x = p^2+q^2$. Значит, нам подойдут $m = 2p_1p_2q_2^2 > 0$, $n = 2q_1q_2p_2^2 > 0$ (мы привели предыдущее равенство к общему знаменателю)

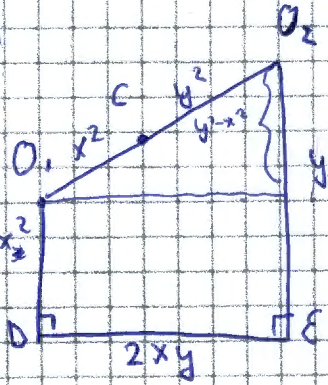
+

ЧТД

Задача 11.9

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно (ω_1 и ω_2 касаются в т. C, ω_2 и ω_3 — в т. A, ω_3 и ω_1 — в т. B; ω_1 касается α в т. D, ω_2 — в т. E, ω_3 — в т. F). ~~Посмотрим на пр прямоугольн~~

Также пусть $O_1D = x^2$, $O_2E = y^2$, $O_3F = z^2$ ($x, y, z > 0$)



сф сферы касаются плоскости с одной стороны, т.к. если н-р, ω_1 и ω_2 лежат по разные стороны от α и касаются при этом, то $D=E$, и треугольника DEF не будет.

Посмотрим на прямоугольную трапецию O_1DEO_2 ($O_1D \perp \alpha$, $O_2E \perp \alpha \Rightarrow O_1D \parallel O_2E \perp DE$)

Опустим перпендикуляр из O_1K на прямую O_2E.

Тогда $\cancel{x^2}$ $(x^2+y^2)^2 = O_1K^2 + (|y^2-x^2|)^2 = DE^2 + (|y^2-x^2|)^2 \Rightarrow DE = 2xy$.
по т. Пифагора

Аналогично, $EF = 2yz$, $FD = 2zx$.

Лемма: Описанная окружность ΔABC — это вписанная окружность $\Delta O_1O_2O_3$.

Док-во: ~~Для начала заметим, что сферы касаются плоскости~~

Выберем на сторонах O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 точки C', A', B' так, что $O_1C' = O_1B' = x'$, $O_2A' = O_2C' = y'$, $O_3B' = O_3A' = z'$. Поскольку система уравнений

$$\begin{cases} x'+y' = O_1O_2 \\ y'+z' = O_2O_3 \\ z'+x' = O_3O_1 \end{cases}$$

имеет единственное решение ($x' = \frac{O_1O_2+O_1O_3-O_2O_3}{2}$ и т.д.), то такая тройка (A', B', C') единственна, т.е. совпадает с ~~(A, B, C)~~. Значит, ~~$A=A'$~~ тройкой точек касания вписанной окружности. Значит, $A'=A$ = т. касания на стороне BC и т.д. Лемма доказана.

M11-08

По формуле Герона, $S_{O_1O_2O_3} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)x^2y^2z^2}$, а $p_{O_1O_2O_3} = x^2+y^2+z^2$ полупериметр $\Longrightarrow$

$\Rightarrow r_{O_1O_2O_3} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\left(r_{O_1O_2O_3} = \frac{S_{O_1O_2O_3}}{p_{O_1O_2O_3}}\right)$

$$S_{DEF} = \frac{DE\cdot EF\cdot DF}{4R_{DEF}} \Rightarrow R_{DEF} = \frac{2x^2y^2z^2}{S_{DEF}} \underset{\text{по ф. Герона}}{=} \frac{2x^2y^2z^2}{\sqrt{(xy+yz+zx)\prod_{cyc}(xy+yz-zx)}}$$

От нас требуют доказать, что $R_{DEF} > r_{O_1O_2O_3}$. Мы докажем более сильное неравенство $R_{DEF} \geq 2r_{O_1O_2O_3}$

т.к. xy, yz, zx – стороны Δ, то $xy+yz > zx$ и т.д.

$\Updownarrow$

$$\frac{x^2y^2z^2}{\sqrt{(xy+yz+zx)\prod_{cyc}(xy+yz-zx)}} \geq \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \iff \underbrace{(x^2+y^2+z^2)x^2y^2z^2}_{ЛЧ} \geq \underbrace{(xy+yz+zx)\prod_{cyc}(xy+yz-zx)}_{ПЧ}$$

~~Сделаем замену: $xy=a$, $yz=c$, $zx=b$, $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.~~

~~Тогда $x^2+y^2+z^2=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$, $x^2y^2z^2=abc \Rightarrow ЛЧ=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=q^2-2pr$~~

~~$ПЧ=p(p-2a)(p-2b)(p-2c)=p(p^3-2p^3+4pq-8r)=-p^4+4p^2q-8pr$~~

~~Нам осталось доказать, что $q^2-2pr \geq -p^4+4p^2q-8rp \iff p^4+$~~

~~Сделаем замену: $xy+yz-zx=b$, $xy+zx-yz=a$, $yz+zx-xy=c$ $(a,b,c>0)$,~~

~~$p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.~~

~~Тогда $ПЧ=(a+b+c)abc=pr$~~

~~$x^2y^2z^2=xy\cdot yz\cdot zx=\frac{1}{8}(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$~~

~~$x^2+y^2+z^2=\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}=\frac{(a+b-c)^2+(c+a-b)^2}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}=(p^2+$~~

Значит, достаточно доказать нер-во $x^2y^2z^2 \geq \prod_{cyc}(xy+yz-zx)$

~~Сделаем з~~ Заметим, что $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \iff (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$.

После замены $c=xy$, $b=xz$, $a=yz$ ~~мы получим~~ неравенство преобразовывается к виду

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \iff a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0$$

неравенство симметричное $\Rightarrow$ НУО $a \geq b \geq c$, ~~$b=c+\alpha$, $a=c+\beta$~~ $b=c+\beta$, $a=c+\alpha$ $(\alpha,\beta \geq 0)$

Тогда $a(\alpha-\beta)\alpha - b(\alpha-\beta)\beta + c\alpha\beta \geq 0 \iff (\alpha-\beta)((c+\alpha)\alpha-(c+\beta)\beta)+c\alpha\beta \geq 0$

$\iff (\alpha-\beta)^2(c+\alpha+\beta)+c\alpha\beta \geq 0$, что верно

ЧТД

+

М11-08

Задача 11.10

Докажем, что Вася может угадать Петин многочлен (1 из, а ~~не самом~~ чаще всего ~~для~~ оба) за 8 ходов.

Стратегия: Пусть за первые 7 ходов Вася назовёт 7 произвольных различных чисел, а затем отметит 7 получившихся точек (ордината - названное Петей в ответ число) на координатной плоскости. Вася хочет назвать восьмое число a_8 так, чтобы какую бы Петя ни взял точку с абсциссой a_8, получившееся мн-во из восьми точек разбивалось ~~(возможно по~~ на две недопараболы (недопарабола - это парабола или прямая) единственным образом (возможны пересечения недопарабол) - тогда это разбиение и будет задавать Петины многочлены. Как же он выберет число a_8?

I Среди семи точек $\exists$ 5, лежащие на одной недопараболе П. Тогда ~~чтобы~~ в любом другом разбиении (в том числе и искомом Петином) хотя бы одна из недопарабол пересекается с П хотя бы по трём точкам (по принципу Дирихле), т.е. совпадает с ней (поскольку недопараболы задаются уравнениями ≤ 2 степени, уравнение $~~П_1 - П_2~~(x)$ $П_1(x)=П_2(x)$ имеет больше двух корней только в случае $П_1 \equiv П_2$). (1)

Значит, если Вася назовёт эту недопараболу, то победит (даже после семи ходов).

II $\nexists$ пяти точек, лежащих на одной недопараболе. Поскольку на каждой недопараболе (из любого разбиения этих семи точек) лежит ≤ 4 точек, на каждой недопараболе лежит $\geq 7-4=3$ точек. (2) Поскольку через три точки проходит ≤ 1 недопараболы (~~см~~ (1)), то существует лишь конечное кол-во разбиений этих семи точек на две недопараболы. Покрасим недопараболы ~~в цвета~~ в несколько цветов так, чтобы недопараболы из одного разбиения были одноцветными, а из разных - разноцветными, а затем отметим точки пересечения разноцветных недопарабол (никакая недопарабола не покрашена в ≥ 2 цвета, т.к. в этом случае вторые недопараболы этих ≥ 2 разбиений также совпадают по (2) => разбиения совпадают). Их конечное число, т.е. конечное число их абсцисс. Значит, если Вася назовёт a_8 не из этого мн-ва (т.к. вещественных чисел бесконечно, он может это сделать) и отличные от $a_1, a_2, \dots, a_7$, то как бы ни ответил Петя, у полученного мн-ва из восьми точек будет только одно разбиение (искомое), и Вася победит.

Теперь покажем, что Петя может отвечать так, чтобы после любых семи Васиных чисел существовало ≥ 2 разбиения $\Rightarrow$ Вася не может определить.

Стратегия за Петю(*): Пусть он возьмёт произвольную параболу $f(x)$ и на первые четыре числа a_1, a_2, a_3, a_4 ответит $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$. Затем пусть он проведёт через точки $(a_1; f(a_1))$ и $(a_2; f(a_2))$ параболу $П_1$, а через точки $(a_3; f(a_3))$ и $(a_4; f(a_4))$ — параболу $П_2$ $(П_1 \neq П_2 \neq f(x) \neq П_1)$. Пусть затем он на числа a_5, a_6 ответит $П_2(a_5), П_2(a_6)$, а на число a_7 — $П_1(a_7)$. Через точки $(a_5; П_2(a_5)), (a_6; П_2(a_6)), (a_7; П_1(a_7))$ проходит единственная недопарабола $П_3$(**), поэтому Вася не может различить разбиения $(П_1; П_2)$ и $(f; П_3)$.

(*) Если Вася дважды назовёт одно и то же число, то пусть Петя дважды ему ответит одно и то же. Вася ничего нового не узнает и просто потеряет ход. Далее считаем, что $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ ~~[illegible]~~

(**) Почему это так? ~~Система линейных уравнений (относительно~~ a, b, c)

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=y_1 \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2 \\ ax_3^2+bx_3+c=y_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$ Достаточно показать это для случая $x_1 = y_1 = 0$ (из-за параллельного переноса)

$$\begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0 \\ ax_2^2+bx_2+c=y_2 \\ ax_3^2+bx_3+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_2^2+bx_2=y_2 & |x_3^2 \\ ax_3^2+bx_3=y_3 & |x_2^2 \end{cases} \ominus : \quad b(x_2x_3^2 - x_3x_2^2) = y_2x_3^2 - y_3x_2^2.$$

~~Решение~~ При $x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$ или $x_2 \neq x_3$ решение будет: $b = \dfrac{y_2x_3^2 - y_3x_2^2}{x_2x_3(x_3 - x_2)}$, и a тоже найдётся $(x_2, x_3 \neq 0)$

Но т.к. a_i различны, эти случаи невозможны.

Ответ: При $n = 8$

~~$4 \cdot 2$~~