М10-44

Σ	1	2	3	4	5	
21	7	7	7	0	0	Нечаева
21	7	7	7	0	0	Девятков

№10.1

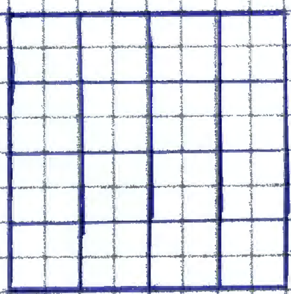
$3990 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot1 = (1\cdot6\cdot5\cdot7)\cdot19 = (1\cdot6\cdot5\cdot7)\cdot(1+6+5+7)$

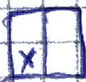
У числа 1657 сумма цифр $= 19$ $(1+6+5+7)$, а произведение $= 210$ $(1\cdot6\cdot5\cdot7)$

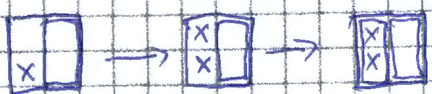
$210\cdot19 = 3990$

Ответ: 1657

№10.3 Стратегия для второго



Разобьём доску 8×8 на 16 квадратов 2×2.
Первый ходит Коля и ставит крестик в один из 16 квадратов 2×2. Пусть Дима тоже нарисует доминошку в этот квадрат. Тогда получится следующий рисунок  (в силу симметрии можно выбрать любой из случаев). (1) Если Коля опять сходит в этот квадрат 2×2, то ~~А~~ Дима снова сможет сходить в этом квадрате 2×2, но уже нарисовав доминошку на 2-х клетках по 1 крестику



. Т.е. После таких ходов в этот квадрат 2×2 нельзя будет никому сходить. (2) Если Коля сходит в другой пустой квадрат 2×2, то Дима ходит в этот же квадрат 2×2.
Значит, ~~если Коля~~ на каждый Колин ход есть у Димы свой, который всегда можно сделать.
(при ходе Коли в пустой квадрат 2×2 у Димы есть свой ход в этот же квадрат 2×2 (случай 2), при ходе Коли не в пустой квадрат 2×2, у Димы тоже есть свой ход в этот квадрат 2×2 (случай 1). Следовательно, если Коля сможет сделать ход, то Дима тоже может сделать

M10-44

Значит Элина точно не проиграет => проиграет Коля

Ответ: Элина имеет выигрышную стратегию

№10.2

~~Пред.~~ Дано: ~~$a_1, ..., a_n$~~, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$; $a_1, ..., a_n \in A$, $\in N$

$0 < b_1 < b_2 < ... < b_n$; $b_1, ..., b_n \in B$, $\in N$

$a_1 + ... + a_n = n^2$

$b_1 + ... + b_n = n^2$

Предположим, что $a_i \neq b_j$, где $i \in [1, ..., n]$ и $j \in [1, ..., n]$, тогда все числа, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ - различные (всего $n + n = 2n$ чисел)

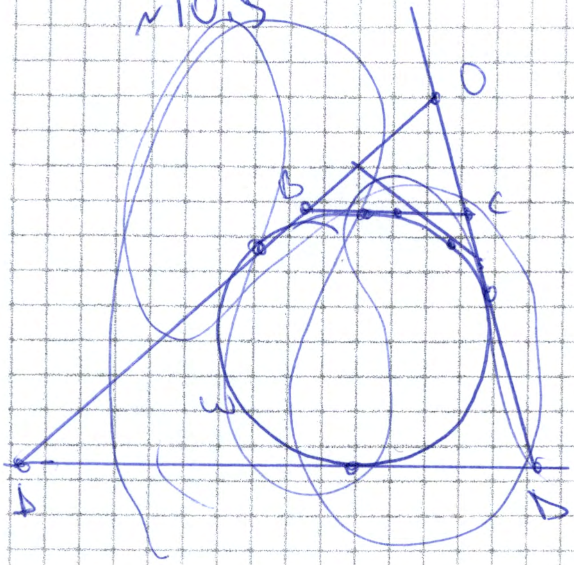
~~Тогд~~ Т.к. все числа различные (и натуральные), и их $2n$, то минимальная сумма всех чисел $a_1, ..., b_n$ равна $1 + ... + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) = 2n^2 + n$, но

$a_1 + ... + a_n + b_1 + ... + b_n = n^2 + n^2 = 2n^2 < 2n^2 + n$ - противоречие, значит не все $a_i \neq b_j$, т.е. как минимум 1 пара $a_i = b_j$ найдётся $\Rightarrow$ в ~~множестве А и множестве В~~ найдётся число, которое принадлежит и множеству А, и множеству В.

ЧТД.

Л110-44

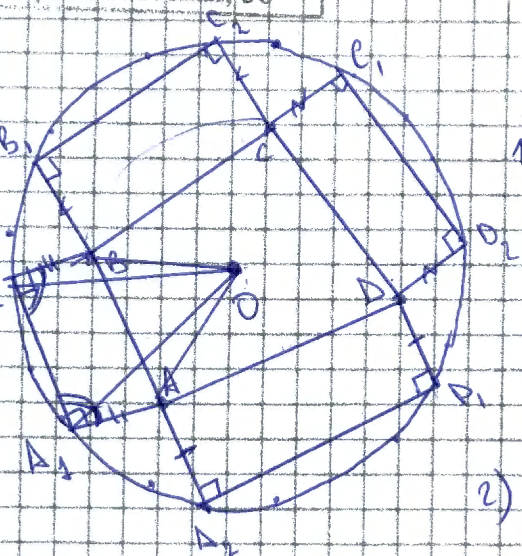
№10.5



14/10-28

6	7	8	9	10	Σ
7	7	4	–	0	18
7	7	4	–	0	18

№ 10.7



Решение:

1) т. O – центр описанной окружности около $A_1B_2B_1C_2C_1C_2C_1D_2D_1A_2$

тогда $OA_1 = OB_2 = \ldots = OA_2$

~~Рассмотрим △OAA1 и △OBB2:~~

~~O1~~

2) Рассмотрим $\triangle A_1OB_2$:

$B_2O = OA_1 \Rightarrow \triangle A_1OB_2$ – равнобедренный с основанием $A_1B_2 \Rightarrow \angle OB_2A_1 = \angle OA_1B_2$

3) $\angle BA_1B_2 = \angle A_1B_2B = 90^\circ$

$\angle OA_1A = \angle BA_1B_2 - \angle OA_1B_2 = \angle BB_2A_1 - \angle OB_2A_1 = \angle OB_2B$

4) Рассмотрим $\triangle OAA_1$ и $\triangle OBB_2$:

а) $OB_2 = OA_1$ (по условию)

б) $\angle OB_2B = \angle OA_1A$

в) $BB_2 = AA_1$ (AA_1B_2B – прямоугольник)

$\Rightarrow \triangle OAA_1 = \triangle OBB_2$ (по 2м сторонам и углу между ними)

$\Downarrow$

$OA = OB$.

5) Аналогично доказываем, что $OB = OC$, $OC = OD$, тогда $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D$ – равноудалены от т. $O \Rightarrow O$ – центр окружности описанной около $ABCD$

ч.т.д.

№ 10.6

$\cos x$, перемножим само на себя, получим $\cos^2 x$.

Сложим $\cos^2 x$ и $\cos x$, получим $\cos^2 x + \cos x = f(x)$

$\cos \pi = -1$, тогда $f(\pi) = \cos^2 \pi + \cos \pi = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$,

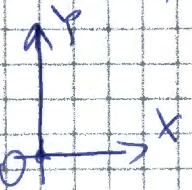
т.е. мы получили выражение, которое при $x = \pi$ равно 0.

Ответ: можно

№10.10

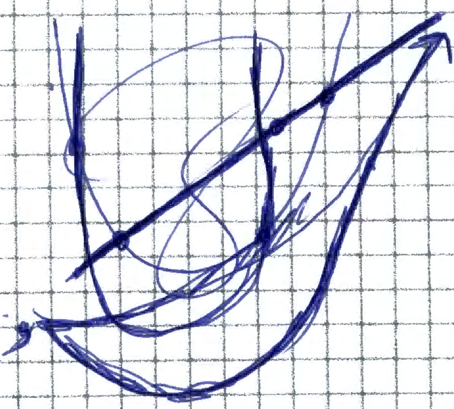
Многочлен, степень которого не превышает 2, определяется 3-мя точками. Т.е. если мы назовём 2 точки, то мы не сможем восстановить многочлен в худшем случае. Т.к. у нас 2 многочлена, то нам не хватит 4 точек, значит $n \geq 5$, где n – количество ходов Васи. Представим наши ходы на координатной плоскости

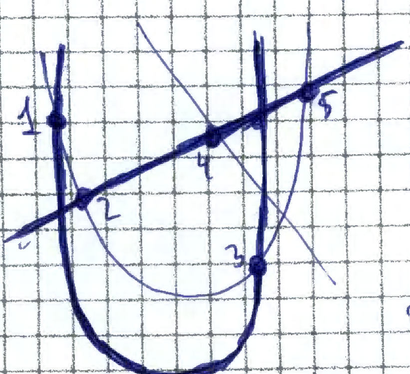
где ось OY – показывает значение функции в данной точке, а OX – значение числа, которое мы назвали.



(расположение системы отсчёта в плоскости ни на что не влияет, но направление осей именно такое)

Контр пример для 5 точек.





где не понятно какие точки определяют наши графики. (первый набор: 1, 2, 3, 5 и 4 или
второй набор: 1, 3 и 2, 4, 5)

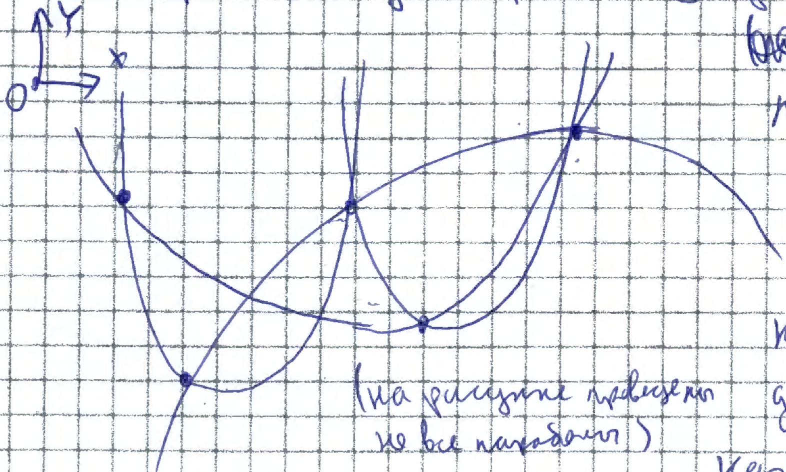
значит $n \geq 6$.

Докажем, что при $n=6$ мы сможем определить один из многочленов.

~~Рассмотрим случай, когда или $f(x)$ или $g(x)$ парабола т.к. график задаётся 3-мя точками, а всего~~

Пусть у нас уже есть 5 точек на плоскости.

1) ~~Рассмотрим случай, когда или $f(x)$ или $g(x)$ парабола~~ т.к. наши графики задаются 3-мя точками, а всего точек 5, то по принципу Дирихле 3 из них лежат на одной параболе.



(на рисунке приведены не все параболы)

~~Проведём все параболы~~ (прямые – частные случаи) проведём все возможные параболы. В плоскости найдётся прямая $x=k$, которая не проходит через данные 5 точек, тогда она каждую параболу пересекает в одной точке, причём все такие точки различны, т.к. все параболы различны. Тогда Вася говорит число $t=k$, а Петя сообщает на какой из парабол ~~прямая~~ лежит это точка, тогда эта парабола и есть ~~одна~~ один из искомых графиков функций $f(x)$ или $g(x)$, т.к. все остальные параболы построенные на этих точках

2) Ответ: $n=6$

№10.8.

Рассмотрим многочлен ax^2+bx+c, раз у этого многочлена целые корни, то по теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ – целые $\Rightarrow$ $b \vdots a$ и $c \vdots a$

Всего у нас чисел $3n$, которые распределены на 3 множества A, B и C (где все члены множества A – это коэффициент при x^2, все члены множества B – это коэффициенты при x, все члены множества C – свободные члены), в ~~которых~~ каждом из которых по n составляющих, причём $b_i \vdots a_i$ и $c_i \vdots a_i$, где $b_i\in B$, $a_i\in A$, $c_i\in C$ и a_i, b_i, c_i – один из наборов квадратного трёхчлена.

Пусть последовательные натуральные числа, которые нам даны – это $k+1, \dots, k+n, \dots, k+2n, \dots, k+3n$, где $n\in\mathbb{N}$, а $k\geq 0$ и $k\in$
Рассмотрим множество A, где $a_1<a_2<\dots<a_n$ (в двух других множествах не факт, что именно в такой последовательности идёт порядок возрастания или убывания). Заметим, что $a_n\geq k+n$, т.к. $b_n \vdots a_n$ и $c_n \vdots a_n$, но $b_n\neq c_n\neq a_n$, в силу симметрии $c_n>b_n$, то $c_n\geq 3\cdot a_n = 3k+3n$, но $c_n\leq k+3n$ (последний член ряда), значит $k\geq 3k \Rightarrow k=0$
$k\leq 0$ (...)

Значит все наши коэффициенты входят в множество W, где $[1,\dots,3n]\in W$, и $c_n=3\cdot a_n \Rightarrow b_n=2a_n$ (a

по доказанному ранее у нас есть многочлен вида $nx^2+2nx+3n$ или $nx^2+3n+2n$, но многочлен $nx^2+2nx+3n$ – имеет не целые корни, значит $a_n=n$, $b_n=3n$, $c_n=2n$