1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

Задача №П.1

Заметим, что 77 раскладывается на простые как 7·11. Тогда 77 можно представить как (7·11), (1·77), ((−7)·(−11)), ((−1)·(−77)) (в произв. у...)

Если наибольшие и наименьшие одного знака, то такая ситуация очевидно невозможна, если это не одинаковые пары, так как $1<7<11<77$ (наим. ... наиб.) и $-77<-11<-7<-1$ (наим. ... наиб.). Если же пара наибольших и наименьших совпала, то покажем, что это не наиб. случай.

Рассмотрим остальные случаи (2 пары в наборе):

Одна пара — отрицательные числа,

другая пара — положительные числа.

Если одна из пар есть (1; 77) или (−1; −77), то мы можем заменить их на (7; 11) и (−7; −11) соотв-но и допустимое кол-во чисел в наборе ~~не уменьшится~~ увеличится.

Не умаляя общности рассмотрим положительные пары. Если 1 и 77 — наибольшие (т.к. это мои наиб.), то никаких положительных более в наборе нет, но если заменить эту пару на (7; 11), то в наборе также могут присутствовать числа от 1 до 6 (вкл.). Аналогично для (−1; −77) замена на (−7; −11), чтобы добавить {−1; −2; −3; −4; −5; −6}

Таким образом, отрицательная, наименьшая пара => (−11; −7), положительная, наибольшая пара => (7; 11) => набор {−11; −7; −6; −5; ...; 0, 1, ...; 6; 7; 11}

(17 чисел)

+

Ответ: 17

11-13

МА-10

№11.2.

Считаем, что первый ~~набор~~ есть $A_1: \{a_1; \ldots; a_n\}$,

B есть: $\{b_1; \ldots; b_n\}$

Тогда $2n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1+2+\ldots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2+n$

так как если не различны, то сумма $2n$ натуральных чисел не меньше суммы первых $2n$ натуральных.

(прот.)

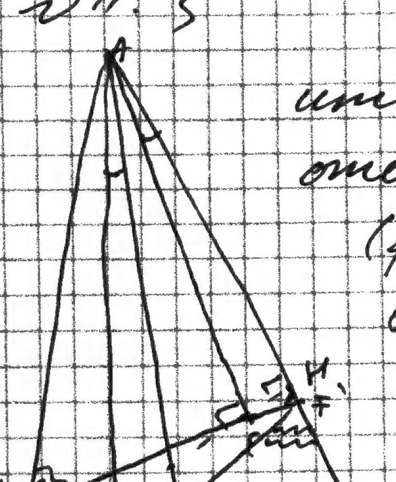
Получим, что $2n^2 \geq 2n^2+n$, это неверно.

$\Leftarrow$ не все числа различны,

но в A все эл-ты различны, в B все эл-ты различны $\Rightarrow$ A пересекается с B по непустому мн-ву чисел, что и требовалось д-ть.

(+)

№11.3



Построим прямую ℓ, такую что ℓ проходит через E и $\ell \perp AE$. отметим $F' = \ell \cap [AC]$ и $K = \ell \cap [BC)$ (~~?~~ расположение точек объясним в конце, пока что рассуждаем с ситуацией, как на чертеже!)

$\triangle AF'E \sim \triangle ADB$, т.к. $\angle EAF' = \angle BAD$ и $\angle ABD = \angle AEF' = 90° \Rightarrow \angle AF'E = \angle ADB$.

отсюда понимаем, что $AF'DK$ - вписанный,

так как $\angle AF'K = \angle ADK \Rightarrow \angle DF'C = \angle AKD$

$\angle HEF' = 90° - \angle HF'E$

$\|$

$\angle KAB$ (вертикальные)

$\|$

$\angle KEB$

$\|$ $(AEBK$ – вписан, т.к. $\angle AEK = \angle ABK = 90°)$

$\angle KAB = 90° - \angle AKB$

$\Downarrow$

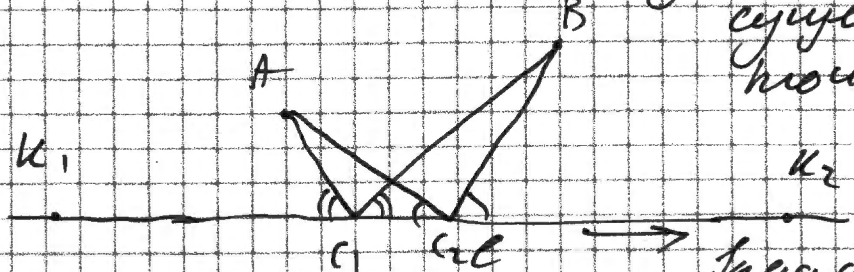
$\angle HF'E = \angle AKB$

Значит $\angle EF'H = \angle DF'C$

Осталось заметить, что для двух заданных точек $(A$ и $B)$ и прямой (l) существует только одна точка (C), такая что

$\angle(AC;\ l) = \angle(BC;\ l)$

Покажем это. Предположим противное, существуют 2 такие точки: C_1 и C_2



Зададим на l координатную ось ~~направление~~ и считаем, что координата C_1 < координата C_2 (координата K_1 меньше C_1, координата K_2 > коорд. C_2)

из $\triangle AC_1C_2 \Rightarrow \angle K_1C_1A > \angle K_2C_2A$ (внешний к треуг. $\triangle AC_1C_2$)

$\| \Leftarrow$ усл. (предп.)

$\angle BC_2K_2$

$\vee$ (внешний к $\triangle BC_2C_1$)

$\angle BC_1K_2$ противоречие.

Значит, такая точка единственная, применим эту лемму для D, E и прямой $AC \Rightarrow$

$\Rightarrow F = F'$, а из построения

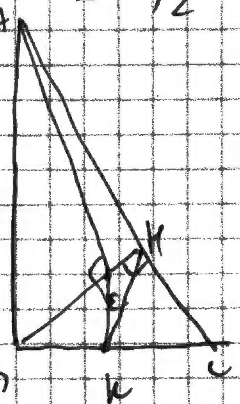
$\angle AEF' = 90^\circ$

Теперь немного о расположении точек на чертеже.

В решении нигде не используется порядок лучей AD и AE внутри угла $\angle BAC$, как и расположение F'.

$l \perp BC$, т.к. иначе $l \parallel BC$, $AE \parallel AB$, что невозможно, т.к. $E \neq B$.

Также $K \in$ ~~лучу~~ продолжению луча CB за точку B, т.к. предположим, что $K \in [BC]$, $\angle AEK = 90^\circ$, $\angle ABK = 90^\circ \Rightarrow$ ~~AEBK — вписанный~~, $\angle AHK < 90^\circ$, т.к. $> \angle AKB$, но $\angle AEK > \angle AHK$, т.к. AEK лежит внутри $\triangle AHK$, либо AEK лежит внутри $\angle ABK \Rightarrow \angle AEK > \angle ABK > 90^\circ$.

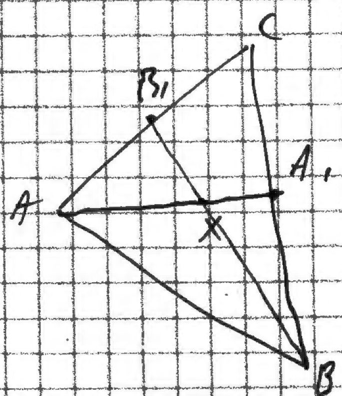


Если же K лежит на луче BC за точкой C, то тогда $\triangle AKE$ лежит внутри $\angle AKB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEK > \angle ABK = 90^\circ$. В док-ве был использован факт, гласящий, что если точка X лежит внутри треугольника ABC, то $\angle AXB > \angle ACB$, что верно, доказательство:

$(A_1 = AX \cap BC)$, $(B_1 = BX \cap AC)$

$\angle AXB > \angle AA_1B$, как внешний к $\triangle XA_1B$; $\angle AA_1B > \angle ACB$, как внешний к $\triangle ACA_1$, что и требовалось.



Остальное решение не использует расположение точек.

+

№4 Предположим противное.
Тогда
$1\cdot p+1=a_1 b_1$, где $a_i > i$,
$2p+1=a_2 b_2$ $\quad b_i > i$

$\vdots$ $ip+1=a_i b_i$

$\frac{(p-1)}{2}p+1 = a_{\frac{p-1}{2}} \cdot b_{\frac{p-1}{2}}$

для всех $i < \frac{p}{2}$ $\Rightarrow$ $i\cdot p+1$

Заметим, что a_i и b_i ~~не~~ не меньше p. предположим противное,

$a_j \geq p$; $b_j > j \Rightarrow a_j b_j \geq (j+1)p =$
$= jp + p$,
что больше
$jp+1$, противоречие.

Тогда заметим также, что

$\cancel{*}$ $yp+1 \underset{p}{\equiv} 1 \equiv a_y b_y$,

тогда все произведения $a_i b_i$ сравнимы между собой и сравнимы с 1 (по mod. p)
предположим, что какие-то 2 числа равны (не умаляя общности $a_m = a_n$), тогда
$a_m b_m \equiv a_n b_n \Rightarrow b_m \equiv b_n$, а т.к. они
(и b_j - просто с p, что очев-но, т.к. p-простое)
меньше p, то $b_m = b_n$, но тогда $a_m b_m = a_n b_n$,
что невозможно при разных m и n.
Аналогично $b_m \neq b_n$ при разных m и n,
$a_n \neq b_m$ при разных m и n.
Что если $a_n = b_n$? $\Rightarrow np+1 = a^2 \Rightarrow np = (a-1)(a+1)$,
то есть, $(a-1)(a+1) \vdots p$, но $a < p \Rightarrow$ данный случай

$*$ $a \underset{p}{\equiv} b$ - обозначение a сравнимо b по модулю p

М11-13

возможно только если
$a+1=p$, для всех остальных
пар, a_i и b_i различны.

$\Downarrow$

~~среди {a_i} всех a_i и всех b_i суммарно, как минимум, $\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot 2-1 = p-2$ разных чисел. Среди них, очевидно, нет 1, т.к. 1 не больше любого натурального. Значит, в наборе из всех a_i и b_i есть все числа от 2 до $p-1$.~~

~~Но тогда рассмотрим $y=1$, и $p+1$, которое, очевидно, не представ~~

$\Rightarrow$ Но рассмотрим $kp+1=a^2$. $a=p-1$

$\Downarrow$

$kp+1=p^2$ $kp=p^2-2p$

$\Downarrow$

$k=(p-2)$, а такое k не может быть меньше $\frac{p}{2}$ при $p>3$, значит,

все a_i и все b_i - различны.

Тогда среди них $2\left(\frac{p-1}{2}\right)=p-1$ число, меньше p, т.е. все натур. числа от 1 до $p-1$.

Рассмотрим тогда пару, в которую входит 1. Такое не возможно т.к. 1 не больше любого натурального числа.

Противоречие, значит,

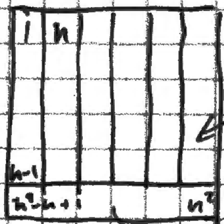
для какой-то пары не выполнено, что $a_i \geq \frac{y}{k}$, $b_i \geq \frac{y}{k}$. $\Rightarrow$ для какой-то пары либо a_i, либо $b_i < y$

ч.т.д.

№11.5.

Ответ: $\frac{(n-1)(n^2+2)}{2}$

Пример:



в каждом столбце-прямоугольнике $1\times(n-1)$ числа от a_i (самого верхнего), до $(a+n-2)$, подряд вниз. $a_i = \{ \equiv_{n-1} 1$ до n^2-2n
т.е. все натур, $\equiv_{n-1} 1$ и ~~числа~~ не больше n^2-2n+2

в нижней строке числа от (n^2-n+1) до n^2

Тогда ~~все больше если~~ сумма всех больших = сумма столбца, где $a_i = n^2-2n+2$ и n^2, а сумма малых $= \sum a_i$.

Сумма больших: $n^2 + \frac{(n^2-n)(n^2-n+1)}{2} - \frac{(n^2-2n+1)(n^2-2n\ldots)}{2}$

Сумма малых: $n + (n-1)\frac{(n-1)\cdot n}{2}$

−

$\sum$ больших $-$ $\sum$ малых $= \frac{(n-1)(n^2+2)}{2}$

М11-51

6	7	8	9	10	Σ
7	7	7	7	0	28

№11.6.

1) $(x^4+1)-(x^2+1) \Rightarrow x^2(x^2-1)$

2) $(x^3+1)-(x^2+1) \Rightarrow x(x^2-1)$

3) $(x^2(x^2-1))\cdot(x(x^2-1)) \Rightarrow \boxed{x^3(x^2-1)^2} \Rightarrow f(x)$

$f(x)\ge 0$ при $x\ge 0$, т.к. $x^3\ge 0$ и $(x^2-1)^2\ge 0$

$f(x)\le 0$ при $x\le 0$, т.к. $x^3\le 0$ и $(x^2-1)^2\ge 0$ (+.)

№11.7.

Покрасим сначала нечётные.

Если $a \equiv_4 1$, покрасим его в белый цвет. Если $a \equiv_4 3$, покрасим его в чёрный цвет.

Так как нечётное натур. в сумме с чётным натур. не может дать степень 2 (чётное число), то рассмотрим суммы нечётных между собой. Все степени 2, (натур.), кроме 1 и 2 - сравнимы с нулём по модулю 4, белые же в сумме с белыми, как и чёрные с чёрными $\equiv_4 2$.

1 и 2 вообще не могут быть представлены в виде суммы различных натуральных, поэтому не рассматриваем их как предполагаемые суммы.

То есть одноцветные нечётные не могут в сумме давать $2^k \equiv_4 0$ (при $k\ge 2$, $k=1$ и 0 не могут быть суммами разл. натур.)

Покрасим теперь чётные.

Будем красить теперь их по индукции по n до 2^n (включительно) так, чтобы никакие одноцветные чётные $\le 2^n$ не давали в сумме степень 2, натуральную

База: покрасим 2 в белый цвет ($n=1$)

Переход: мы покрасили все числа до 2^k включительно. Нужно покрасить числа до 2^{k+1}

(заметим, отмечено (мы покрасили все числа до 2^k), то

[illegible] мы рассмотрим по индукции

М11-51

тогда если число 2^m имеет цвет a, покрасим $2^{k+1}-2^m$ в цвет (не a) для всех натур. 2^m до 2^k (не включительно) и 2^{k+1} в белый.

Исходя из такого построения мы рассматриваем все возможные варианты получения 2^k как суммы различных чётных, меньших его и в каждой такой паре есть одно чёрное и одно белое число. Так мы покрасим чётные числа до любой степени двойки => можем покрасить и все чётные (на стр. 6 доп. объяснение индукции)

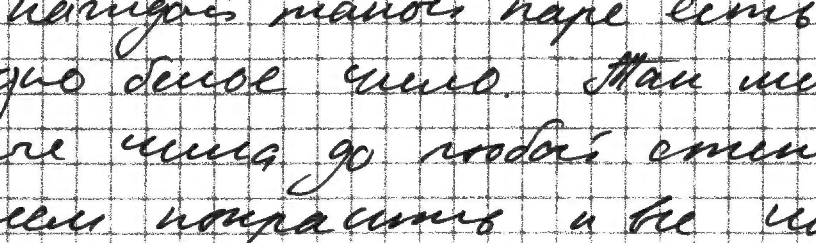
Итак, мы покрасили как все чётные, так и все нечётные.

Ответ: можно.

№11.9. Отметим центры сфер

ω_1 : O_1
ω_2 : O_2
ω_3 : O_3

Тогда скажем, что $\omega_1 \cap \omega_3 = A$, $\omega_3 \cap \omega_2 = B$, $\omega_2 \cap \omega_1 = C$; $\omega_1 \cap \alpha = D$, $\omega_2 \cap \alpha = F$, $\omega_3 \cap \alpha = E$



Рассмотрим $\triangle O_1O_2O_3$. Точки A, B и C лежат на его сторонах, так как если сферы касаются в точке, то точка касания лежит на линии центров (причём между центрами, т.к. касание внешнее)

Причём $O_3A = O_3B$; $O_2B = O_2C$; $O_1C = O_1A$, т.к. это - радиусы ω_3, ω_2 и ω_1 соотв-нно. То есть, A, B и C - точки касания вписанной окружности $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Докажем это.

2

Лемма:

Отметим в треуг-ке ABC точки касания вписанной окружности со сторонами A_1, B_1, C_1 (BC, AC и AB соотв-но) предположим, что $\exists$ такие точки D, E и F ~~такие что~~ на сторонах AB, BC и CA соотв-но, такие что $AD = AF$; $BD = BE$, $CE = CF$. Докажем, что эти точки совпадают с точками касания вписанной окр. со сторонами.

Предположим противное, тогда скажем, что $AB_1 = AF + \alpha$, где $\alpha \neq 0$. Тогда и $AC_1 = AD + \alpha$

$\Downarrow$

$CF = CB_1 + \alpha$ и $BD = BC_1 + \alpha$,

но $CE = CF$ и $BD = BE$ $\Rightarrow$ $BC = CE + BE = BD + CF =$

$CA_1 = CB_1$ $\quad BC_1 = BA_1$

$= CB_1 + \alpha + BC_1 + \alpha =$

$= CA_1 + BA_1 + 2\alpha = BD + 2\alpha$

$\Downarrow$

$\alpha = 0$, противоречие.

Вернёмся к задаче

Мы показали, что окружность, описанная около ABC есть вписанная в $O_1O_2O_3$.

Заметим, что т.к. ω_1, ω_2 и ω_3 касаются α, значит, $O_1D \perp \alpha$; $O_3E \perp \alpha$, $O_2F \perp \alpha$ $\Rightarrow$ DEF – ортогональная проекция $\triangle O_1O_2O_3$ на α. Строим пирамиду, тогда $\triangle O_1O_2O_3$ и его вписанную окружность ω_4 на α (ортогональной) ω_4 перейдёт в эллипс, который лежит внутри проекции $\triangle O_1O_2O_3$ ($\triangle DEF$) и касается сторон. Но заметим, что диаметр, параллельный $\ell = \alpha \cap (O_1O_2O_3)$ перейдёт в равный ему отрезок, в свою нетрудно

3

M11-51

убедимся, ~~проведём~~ так как ~~этот~~ этот диаметр $\parallel \alpha$, а такой диаметр есть, т.к. $\ell \in (O_1O_2O_3)$ => проведём через центр ω_1 $\ell' \parallel \ell$ и отметим точки пересечения с ω_1.

Но тогда проекция этого диаметра лежит внутри $\triangle DEF$ => она меньше (по длине), чем диаметр окружности, описанной около $\triangle DEF$ => радиус окружности описанной около $\triangle DEF$ > радиуса окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Для полноты заметим также, что $\triangle DEF$ — невырожденный и его отрезок лежит внутри окружности, ибо он короче диаметра, т.к. короче хорды, которой он принадлежит.

Примечание: если $(O_1O_2O_3) \parallel \alpha$, то ℓ $\nexists$, но тогда $\triangle O_1O_2O_3$ равен $\triangle DEF$ и ~~все~~ радиус описанной окр = радиусу описанной.

4-5.9

№8. Пусть

$$\sin x + \cos y = \frac{a_1}{b_1}, \qquad \sin y + \cos x = \frac{a_2}{b_2},$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — натуральные, т.к. мы можем их выбрать такими, чтобы положительные рациональные.

считаем что $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$

Тогда

$$\frac{a_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2}{b_2^2} = \sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x \cdot \cos y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\sin y \cdot \cos x,$$

рациональное

но $\parallel$

$$2 + 2(\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x)$$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$ — рациональное

4

М-11-51

А это такие равно, значит, $\frac{p}{q}$, где натуральные. q - натур, p - целое.

$$\frac{p}{q} = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x =$$

$$= \sin x \left(\frac{a_1}{b_1} - \sin x\right) + \cos x \left(\frac{a_2}{b_2} - \cos x\right) =$$

$$= \frac{a_1}{b_1} \sin x - \sin^2 x + \frac{a_2}{b_2} \cos x - \cos^2 x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_1}{b_1} \sin x + \frac{a_2}{b_2} \cdot \cos x = \frac{p}{q} + 1$$

$$\Downarrow \quad | \cdot b_1 b_2 q$$

$$q a_1 b_2 \sin x + a_2 b_1 q \cos x = p b_1 b_2 + b_1 b_2 q,$$

т.е. при m и n равных $q a_1 b_2$ и $a_2 b_1 q$ соотв-нно $m \sin x + n \cos y$ - натур. число, если $p+q$ - натур.

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 = 2 + 2\frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2}{2} - 1,$$

что ≥ -1

$$\Downarrow$$

$\frac{p}{q} \geq -1$ $\quad p \geq -q$

$p + q \geq 0$

и целое $\Rightarrow$ натуральное,

ч.т.д.

5

М11-51

Дополнительные рассуждения про индукцию в 11.7

Мы красим все числа до 2^n, тем самым, рассматриваем все возможные представления 2^n как сумму чётных, и в каждой такой паре $a+b$ одно чёрное и одно белое. Никакая пара различных чисел, (меньших / равных) 2^n не может давать в сумме степень 2, большие, чем 2^n, т.к. $a+b < 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$

Также стоит заметить, что никакая степень 2 (2^m) не может в сумме с отличным от неё числом не большим 2^{m+1} давать степень двойки, что очевидно, у неё, мы можем красить их на шаге индукции в соотв-щий в любой цвет, в моём решении - белый.

№11.10

Ответ: 6

Пример: сначала Вася называет 5 различных t и получает значения функции в этих точках. По принципу Дирихле какой-то мн-н (g или f) прошёл, как минимум, через 3 точки.

Тогда пусть Вася проведёт обобщённых трёхчленов через каждую тройку точек. Всего их будет $C_5^3 = 10$, как максимум.

Тогда существует точка, в которой все полученные функции принимают различные значения. Пусть он подставит это t_i, тогда он и получит один из

6

М11-51

трёхчленов.

Примечание: через 3 точки на пл. проходит ровно одна функция ax^2+bx+c.

~~с точностью до прогрессии~~

Оценка. Для начала заметим, что $n \geq 3$, т.к. для того чтобы задать трёхчлен нужно как минимум 3 точки.

Но 3 вопросов Васе, очевидно, не хватит, т.к. он не может получить информацию, какому какой функции принадлежит на ней каждая точка.

Почему же тогда при $n=4$ и $n=5$ он не сможет выиграть?

Если же он сможет определить g или f за 5 вопросов (предположим), то на 5 шаге он знает 4 точки, через которые проходят многочлены. Считаем тогда, что у него есть $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, $(c; g(c))$ и $(d; g(d))$. Тогда если он выберет 5 точку e, то через $(a, b$ и $e)$ и $(c, d$ и $e)$ проходит бесконечно много трёхчленов (считаем, что ординаты всех точек различны, такое может случиться). То есть, он не сможет достоверно определить g или f, за 5 вопросов, так как неизвестно, к g или f принадлежат первые 4 точки.

Для $n=4$ тогда и подавно, оценка доказана.

7