М10-01

Σ	1	2	3	4	5	Σ = 28
28	7	7	7	7	0	[illegible]
28	7	7	7	7	0	Сорокин

№ 10.1

Покажем, что число 6157 подходит.

$(6+1+5+7)\cdot 6\cdot 1\cdot 5\cdot 7 = 19\cdot 6\cdot 5\cdot 7 = 3990$

№10.2

Предположим обратное, пусть числа множества $S = A+B$ все различны. Тогда очевидно, что сумма в S равна $2n^2$. Заметим из предположения, что в S нету двух одинаковых чисел, т.к. A и B сами состоят из различных. Тогда, т.к. $|S| = 2n$, то $\sum_{i=1}^{2n} S_i \geq 1+2+3+\ldots+2n = \frac{(2n+1)2n}{2} = 2n^2+n$. Но $\sum_{i=1}^{2n} S_i = 2n^2 \geq 2n^2+n$.

Значит $n \leq 0$, что невозможно. Противоречие

ч.т.д.

№ 10-3

Приведем стратегию для ~~Коли~~ Димы. Разобьём доску на квадраты 2×2. Теперь будем делать так: будем ходить „доминошками" в тот квадрат, в который сходил Коля. Покажем, что Дима всегда ~~может~~ может так делать. Есть 2 случая:

1) Коля поставил в этот квадрат первый крестик. Тогда Дима очевидно может поставить

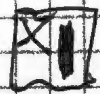


рис. 1

М10-01

„доминошку" (рис. 1).

2) Коля ходит в квадрат второй раз. Тогда ~~очевидно~~ понятно, что „ситуация" в квадрате будет как в рис. 2 с точностью до симметрии (очевидно из первого пункта стратегии). Тогда пусть ~~Коля~~ Дима поставит доминошку на эти 2 крестика.

рис. 2

Очевидно, что после „игры в этом квадрате", Коля не может третий раз сходить в этот квадрат. Тогда ~~Ко~~ Дима всегда имеет ~~ход~~ ход, а в силу конечности множества клеток, имеет выигрышную стратегию.

Ответ: Дима

N 10.4

Т.к. $p \geq 3$, то $\frac{p-1}{2} \geq 2$

Давайте рассмотрим все y_i от 1 до $\frac{p-1}{2}$. Предположим, что для каждого y_i нашлось такое разложение $py_i+1=ab$, что $a>y_i$, $b>y_i$. Тогда присвоим каждому y_i одно из таких разложений. ~~Н~~ (очевидно, что для разных i и j будут разные разложения py_i+1 и py_j+1, иначе просто $y_i=y_j$ и $i\neq j$, но $i\neq j$). Пусть x нас даны разложения. Будем

Брать a и b каждого разложения и „запрещать" их (случай $a=b$ рассмотрим позже). Пусть мы из разных разложений „запретили" 2 одинаковых числа a.

Тогда $py_i+1=ab_1$ $\quad b_1\ne b_2$ $\quad$ не ум. общ. $b_1>b_2$

$py_j+1=ab_2$ $\quad\Updownarrow$

$y_i>y_j$

Тогда $a(b_1-b_2)\,\vdots\, p$. Пусть $a\,\vdots\, p$, тогда

$a\ge p$, $b_1>y_i$

$py_i+1=ab_1\ge p(y_i+1)=py_i+p$ $\quad p>1$ $\quad p\ne1$.

Тогда $b_1-b_2\,\vdots\, p$. Тогда, т.к. $b_1\ne b_2$ и $b_1>b_2$, то $b_1\overset{①}{\ge} p+2$. Тогда

① Т.к. $b_1\ge b_2+p>$ $>y_i+p\ge p+1$

$a\ge y_i$, $b_1\ge p+2$

$py_i+1=ab_1\ge y_i(p+2)=y_ip+2y_i$.

$2y_i>2$.

Противоречие. Докажем, что во всех разложениях $1<a,b<p$. То, что $a,b>1$ очевидно, т.к. $a,b>y_i\ge1$. Пусть нашлись такие a,b, что не умаляя общности $a\ge p$. Тогда

$py_i+1=ab\ge p(y_i+1)=py_i+p$ $\quad p>1$.

Пусть в одном из разложений одно число равно $p-1$. Пусть a. Тогда

$ab\underset{p}{\equiv}-b\underset{p}{\equiv}1$ $\quad b\underset{p}{\equiv}-1$. Значит $b\ge p-1$. Тогда

$py_i+1=ab\ge(p-1)^2=p(p-2)+1>py_i+1$ $\quad p-2>\frac{p-1}{2}$, т.к. $p\ge5$

М10-01

$\cancel{1}, 2, 3 \ldots \ldots p-2, \cancel{p-1}, \cancel{p} \ldots$

Тогда у нас есть $p-3$ возможных значений a кв. Разберёмся со случаем, где $a=b$. Докажем, что таких разбиений ≤ 2. Действительно, пусть таких разбиений ≥ 2.

$py_i + 1 = a^2$ Пусть $a > b$. $py_q + 1 = c^2$

$py_j + 1 = b^2$.

Очевидно $a, b < p$, ведь иначе $a^2 > py_i + 1$ или $b^2 > py_j + 1$

$(a-b)(a+b) = p(y_i - y_j)$, т.к. $0 < a-b < a < p$, то $a+b \vdots p$.

Пусть $a+b \geq 2p$, тогда, т.к. $a > b$, то $a > p$, противоречие. Тогда $a+b = p$.

$(a-b)(a+b) = p(a-b) = p(y_i - y_j)$

$a - b = y_i - y_j$ $\quad y_j > 0$ Тогда $a+b=p$

$\left\{\begin{array}{l} a+b = p \\ a-b = y_i - y_j \end{array}\right.$ $\quad$ и $b+c=p$, но $a \neq c$

~~$2a > p + y_i = 2t$. Но заметим, что при сближении чисел с фиксированной суммой их произведение увеличивается. Тогда~~

~~$py_i < t^2$ (знак строгий, т.к. $p \neq y_i$) Тогда~~

~~$a^2 = py_i + 1 < t^2 + 1$. И т.к. $t = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, а $n = 1$ или $n = 2$, то~~

~~$a \leq t + 0{,}5$~~

М10-01

~~Тогда $a^2 > t^2+1$, т.к.~~

~~$t^2 \le \dots$ $t \le a-0,5$~~

~~$a^2 > t^2+1 \ge (a-0,5)^2+1 = a^2-a+1,25$~~

~~$a > 1,25$, но~~

~~$a^2 \ge 2$, но $a^2 \ge p+1 \ge 6$.~~

~~Противоречие.~~

Приведем доказанные факты:

1) Возможных значений a_i в $p-3$
2) мы не можем из разных разбиений запретить одно и тоже число.
3) разбиений запрещающих одно и то же число ≤ 2.

~~Теперь понятно (из пункта 3), что запретов $\le p-2$ (мы можем один раз запретить одно и то же число, поэтому запретов $\le p-3+1 = p-2$). Но всего запретов это удвоенное количество y_i, т.е. $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p-1$. ~~т.к. мы дважды запретили~~ Но $p-1 > p-2$. Противоречие~~

~~ч.т.д.~~

М10-01

Докажем, что нет „квадратных" разложений. Пусть есть a: $a^2 = pq_i + 1$, $1 < a < p-1$

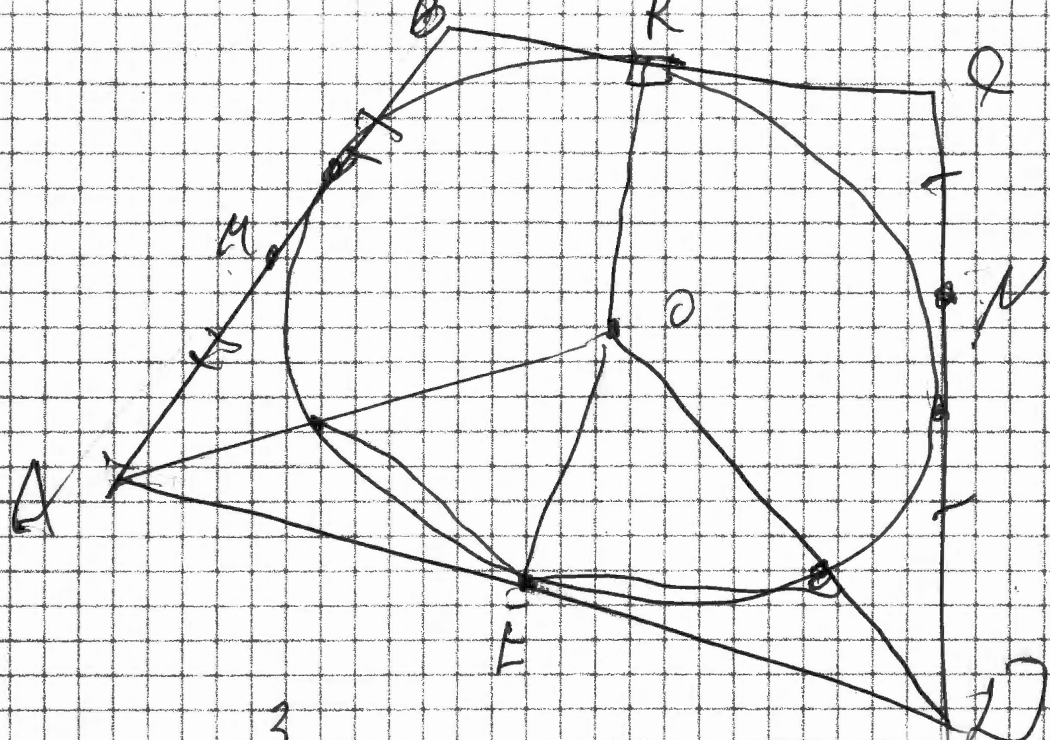
тогда $a^2 \equiv_p 1$ $(a-1)(a+1) \vdots p$, что невозможно, т.к. $a > 1$ и $a < p-1$. Тогда запретов $\leq p-3$, но их точно $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p-1$ Противоречие.

P.S. Запретов $\leq p-3$, т.к. возможные значения a лежат в отрезке $[2; p-2]$

P.P.S. факт, что квадратных разложений ≤ 2 нигде не использовался

M10-01

№10.Б



Заметим, что $MN \geq \frac{AD+BC}{2}$

(просто проведем AK параллельную через BC

?

D': $AD' = AD$, $D' \in (1)$ и отмет.

Тогда нам нужно доказать, что

$AD + BC \geq 2d$, что очевидно,

~~доказывается трудн~~ ~~доказ~~

т.к. $AD + BC = AB + CD$ (т.к. описанный

а $AB + BC + CD + A \geq 4d$, в силу известного ч.т.д. факта

11/10-49

№10.6

Заметим, что $\cos\pi = -1$.

Тогда сделаем следующие операции

6	7	8	9	10	Σ	Σ
7	4	7	–	0	[illegible]	22
7	4	7	–	[illegible]	[illegible]	22

+1

0) $\cos x$

1) $\cos x \quad \cos^2 x$

2) $\cos x \quad \cos^2 x \qquad \cos x + \cos^2 x$

Теперь заметим, что $\cos\pi + \cos^2\pi = -1 + 1 = 0$, что и требовалось.

Ответ: да.

№ 10.8

$t \in \mathbb{Z}, t \geq 0$, т.к. числа $\in \mathbb{N}$

Пусть, да. Тогда пусть даны наши числа

$t+1, \ t+2, \ \ldots\ldots, \ t+3n$. Посмотрим на

из наибольшее число, которое „выступает в роли" коэффициента при x^2. Пусть оно равно $t + n + eps$. Давайте поймем, что $eps \geq 0$. Действительно, т.к. многочленов n, то максимальный коэффициент при $x^2 \geq t+n$. Посмотрим многочлен с этими числами:

$P(x) = \cancel{a(x)} = ax^2 + bx + c = (t+n+eps)x^2 + bx + c$. Пусть у него есть 2 целых корня s и t. Тогда

$P(x) = a(x-s)(x-t)$. Тогда

$st = \frac{c}{a} \qquad s+t = \frac{-b}{a}$

М/10-49

Т.к. $s, t \in \mathbb{Z}$, то $c \,\vdots\, a$ $b \,\vdots\, a$, Т.к. a, b, c попарно различны, то либо $\frac{b}{a} = 3$ либо $\frac{c}{a} = 3$.

Тогда среди этих чисел есть число

$3t + 3n + 3eps \le t + 3n$ $t \ge 0$ $eps \ge 0$

Теперь очевидно, что $t = 0$ и $eps = 0$.

Т.е. у нас взяты первые $3n$ чисел, а n находится в одном трехчлене с $2n$ и $3n$.

~~Аналогично n-1~~ А т.к. $eps = 0$, то все числа меньшие и тоже являются коэффициентами при x^2. Посмотрим на $n-1$. Т.к. $4n-4 > 3n$ ($n > 100$), то $n-1$ находится в одном трехчлене с $2(n-1)$ и $3(n-1)$.

Одно из чисел $3n$, $3(n-1)$ четно. Тогда очевидно существует трехчлен с двумя четными коэффициентами при x и x^0. Тогда, т.к. нечетных и четных чисел от $n+1$ до $3n$ поровну (их $2n$) и все эти числа являются коэффициентами при x и x^0, то найдется трехчлен с двумя нечетными коэффициентами при x и x^0.

Рассмотрим этот трехчлен:

$ax^2 + bx + c$ $a \in \mathbb{N}$ $b \not\vdots\, 2$ и $c \not\vdots\, 2$

Тогда $s + t = \frac{-b}{a} \not\vdots\, 2$ $st = \frac{c}{a} \not\vdots\, 2$

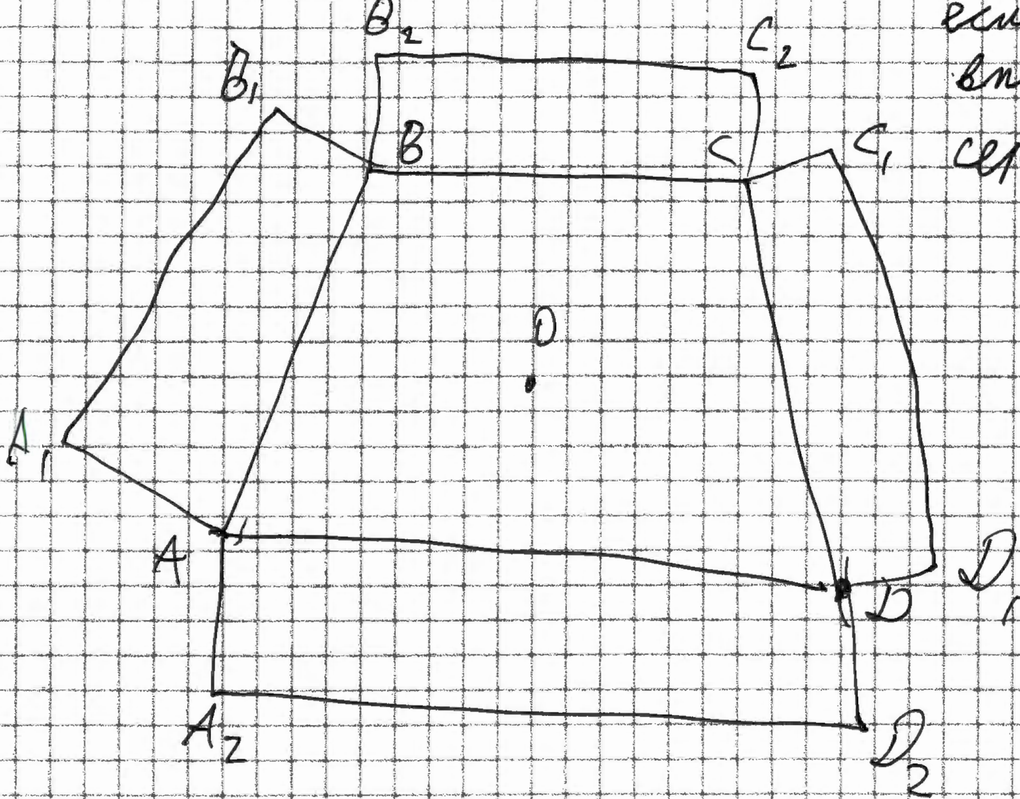
$s + t \not\vdots\, 2$ и $st \not\vdots\, 2$

Т.к. $s + t \not\vdots\, 2$, то либо $s \,\vdots\, 2$, либо $t \,\vdots\, 2$, тогда $st \,\vdots\, 2$

Противоречие

11/10-49

№ 10.7



Заметим, что если восьмиугольник вписанный, то серперы к A_1B_1, B_2C_2, C_1D_1, A_2D_2 пересекаются в одной точке. Но серперы к этим прямым совпадают с серперами к AB, BC, CD, DA (что очевидно, т.к. это прямоугольники). Значит есть такая точка O, что

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OB=OC \\ OC=OD \\ OD=OA \end{array}\right| \Rightarrow OA=OB=OC=OD$$

т.к. O - точка пересечения серперов

Значит $ABCD$ вписан

М10-49

№ 10.10

Давайте покажем, что Вася может угадать многочлен за 9 вопросов. Давайте он спросит 9 вопросов про разные числа и получит ответы. Далее он всеми возможными способами будет разбивать ответы на 2 группы, так что ответы одной группы принадлежат одному многочлену (он будет брать 3 произвольные точки и строить по ним многочлен, как известно многочлен не выше второй степени определяется однозначно). Т.к. многочлены существуют, то когда-нибудь у Васи всё „сойдется": будет ~~существовать~~ такое разбиение на группы, что для ∀ группы существует многочлен не выше второй степени, что он принимает значения чисел этой группы. Пусть есть разбиение на A и B. Не умаляя общности в A хотя бы 5 вопросов. Тогда если бы Петя не придумал многочлен первой группы, то существовало другое разбиение. Но 3 вопроса группы A точно бы оказались в одной группе второго разбиения, значит образовывали бы

M 10-49

Покажем, что Петя может называть значения, что Вася не узнает какой многочлен. На первые четыре вопроса он ответит 0. А на остальные будет отвечать так, что будет хотя бы 2 верных разделения на группы:

$\{A, B, C, D\}$, $\{A', B', C', D'\}$ и $\{A, B, C', D'\}$, $\{A', B', C, D\}$

Покажем, что он всегда может так сделать. Действительно, пусть не может. Тогда посмотрим на последние четыре вопроса. Очевидно, что он может так ответить. Если не может, то у линейного многочлена (созданного разностью квадратных) нету корней, а это значит, что их разность = const, что невозможно