1	2	3	4	5	
+	+	+	0	0	
7	7	7	0	0	

$\Sigma = 21$

М9-20

9.1) В некоторый момент может оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет. Для этого малыш должен поделить кучки от 1 до 4 и от 6 до 9 на 4 такие пары, что сумма чисел в любой паре равна 10. Затем он должен на нечетных минутах из каждой пары брать наибольшее число x и делить на кучки 5 и $x-5$, а на четных минутах брать число, которое в паре с x и равняется $10-x$ и объединять с ~~ним~~ кучкой с $x-5$ конфет и получать кучку $10-x+x-5=5$ конфет. Заметим, что данные действия начинаются на нечетной минуте, значит могут идти первыми, и заканчиваются на четной. По итогу ~~камни~~ кучки в которых было с 1 по 9 ~~камней~~ конфет, станут 9-ю кучками с 5 ~~камнями~~ конфетами в каждой, и т.к. последняя минута наших действий была четной, то на нечетной минуте разделим кучку из 10 ~~камней~~ конфет на две кучки по 5 ~~камней~~ конфет, и получится 11 кучек по 5 ~~камней~~ конфет в каждой, значит, может оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет.

+

~~2) Докажем, что $n<202$. Пусть $n \geq 202$, тогда либо среди чисел есть 0 и есть минимум 101 положительное число или 101 отрицательное, либо среди чисел нет 0 и ~~среди~~ есть минимум~~

9.2) Докажем что $n<203$. Пусть $n \geq 203$. Тогда рассмотрим две ситуации, если среди чисел был 0, и если его не было.

Пусть среди чисел был 0. Тогда либо положительных было не меньше 101 числа, либо отрицательных. Т.к. между любыми числами разность хотя бы 10, то минимальное положительное число – 10, а три минимальных наибольших числа $99\cdot 10=990$, $100\cdot 10=1000$, $101\cdot 10=1010$ (такие числа могут быть, если положительных чисел 101, если их больше, то из-за разницы между числами наибольшие числа будут больше). $990^2+1000^2+1010^2=3000200$, а $3000200>3000000$, противоречие. Если отрицательных чисел было не меньше 101, то ситуация аналогична: наибольшие минимальные числа: -990, -1000, -1010. $(-990)^2+(-1000)^2+(-1010)^2=3000200>3000000$ противоречие.

Пусть среди чисел не было 0. Тогда либо положительных было не ~~больше~~ меньше 102, либо отрицательных. Если положительных не ~~больше~~ меньше 102, то минимальное число $\neq 1$, значит минимальные три наибольших числа: $(100-1)\cdot 10+1=991$, ~~1000~~ $(101-1)\cdot 10+1=1001$, ~~101-1~~ $(102-1)\cdot 10+1=1011$. $991^2+1001^2+1011^2>990^2+1000^2+1010^2>3000000$, противоречие. Если отрицательных чисел было не меньше 102, то ситуация аналогична: наибольшие три наименьших числа: -991, -1001, -1011, $(-991)^2+(-1001)^2+(-1011)^2>3000000$, противоречие.

При ~~всех~~ $n \geq 203$ во всех ситуациях достигается противоречие

значит, $n < 203$.
Наибольшее n при $n < 203$, $n = 202$. Пример на $n = 202$: возьмем все числа от -1005 до 1005 с интервалом 10: $-1005, -995, -985 \ldots 985, 995, 1005$. В таком примере 101 положительное и 101 отрицательное число: $\frac{1005-5}{10}+1=101$.
Также $(-1005)^2+(-995)^2+(-985)^2=1005^2+995^2+985^2=2970275$, $2970275<3000000$, значит, суммы наибольших и наименьших трех чисел меньше 3000000, значит, пример подходит по условиям.
Ответ: $n=202$.

1.3) Коля имеет выигрышную стратегию.
Раскрасим поле 8×8 в черный и белый цвет в шахматном порядке (так, чтобы ни у каких соседних по стороне клеток не было бы одинакового цвета), тогда Коле каждый ход надо закрашивать черную клетку. Т.к. Дима накрывает две соседние клетки, то он за свой ход будет накрывать только одну черную клетку. Всего черных клеток $\frac{8 \cdot 8}{2}=32$.
~~Первые 16 ходов и Коля и Дима смогут делать ходы, т.к.~~
Свои первые 16 ходов Коля всегда сможет сделать ход, т.к. и Коля, и Дима за свой ход закрывают одну черную клетку, то только на 16 ходу Коля закроет последнюю 32-ую клетку, значит до этого всегда будет свободная черная клетка, на которую сможет сходить Коля. Если за 32 хода (16 ходов каждого мальчика) Дима не проиграет, то после 16 хода Коли Дима точно проиграет, т.к. какие бы две соседние по стороне клетки Дима не

Мд-20

выбрал, ~~на одной из них (на черной~~ одна из них (черная) занята либо Димой, либо Колей, а вторая (белая) либо свободна, либо занята Димой, значит, не возникнет ~~таких~~ таких клеток, что либо обе заняты Колей, либо обе свободны, значит Дима проиграет.
Ответ: у Коли есть выигрышная стратегия. +

М9-03

6	7	8	9	10	Σ
+	+	−.	∅	∅	
7	6	1	0	0	Σ = 14

9.6) ~~Пусть длина круговой дорожки~~

Сначала Мише надо пробежать половину дорожку, развернутся и пробежать эту же половину обратно. Заметим, что т.к. ~~ск~~ скорость Миши больше скорости Пети, то они встретятся один раз, когда Миша будет бежать в обратную ~~скорость~~ сторону. Также заметим, что раз Миша пробежал по длине равно 1 круг, то Петя пробежал меньше круга. И т.к. с момента разворота Миша пробежал уже полкруга, то он может в любой момент повернутся. Т.к. Миша стоит на старте, а Петя еще не достиг его, то если Миша продолжит бежать по часовой стрелке, то они встретятся во второй раз до того, как Петя закончит один круг. И т.к. после второй встречи Пете до старта осталось пробежать какое-то расстояние, то если Миша пробежит какое-то очень маленькое расстояние (пусть будет бесконечно маленькое) и потом развернется, то т.к. его скорость больше, то он догонит ~~Мишу~~ Петю до старта, следственно встретится с ним третий раз, значит, пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды поравнятся с ним.

+

9.7) Докажем, что хамелеонов изначально зеленых было не более 1010. Заметим, что изначально два зеленых хамелеона не могло стоять рядом, т.к. если первый из двух подряд идущих хамелонов скажет правду, то он не изменит свой цвет, значит, количество зеленых хамелонов не изменится. Но все хамелеоны говорят разные числа, значит, второй, сказав не то же количество, что и первый, при том же количестве зеленых хамелеонов соврет, значит, он не зеленый. Следственно, после зеленого хамелеона не может идти зеленый. А если зеленых хамелеонов изначально больше ~~20~~ 1010, то ~~где-то~~ хотя бы один раз два зеленых хамелеона стоят рядом, противоречие.

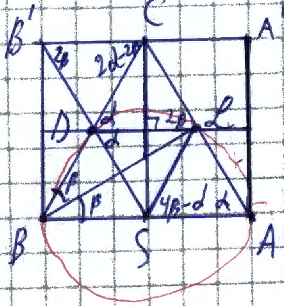
Пример на 1010 зеленых хамелеонов: пронумеруем всех хамелеонов, тогда на нечетных позициях пусть стоят зеленые хамелеоны, причем каждый 2n-1-ый хамелеон называет число n+2009 при n = 1... ~~2010~~ 1010, а коричневые хамелеоны на четных позициях называют любые оставшиеся числа. Тогда коричневые хамелеоны всегда врут, потому что они говорят числа, меньше изначального количества зеленых хамелеонов, а оно только увеличивается. Первый зеленый хамелеон скажет правду, потому что он скажет 2010, сколько и есть зеленых хамелеонов, а каждый последующий будет говорить на один больше, чем предыдущий нечетный, и это будет правдой, т.к. между ними стоит коричневый, который превратится в зеленого, из-за чего количество зеленых увеличится на один. Данный пример выполняет все условия задачи, значит, он верный.

+

Т.к. зеленых хамелеонов не могло быть больше 1010, а для 1010 есть пример, то наибольшее число зеленых хамелеонов изначально — 1010.

Ответ: наибольшее число зеленых хамелеонов изначально — 1010

9.8)



Т.к. точки D, L, A, B лежат на одной окружности, значит, AB и DL антипараллельны, $\angle CDL = \angle CAB$, $\angle CLD = \angle CBA \Rightarrow \triangle BCA \sim \triangle LCD$. Т.к. $\triangle ABC$ — остроугольный, то $\triangle CDL$ — остроугольный, ~~а т.к. CS — высота в данном треугольн~~ Отметим точки A' и B' симметричные точкам A и B относительной прямой DL соответственно. Т.к. ~~$\triangle CDL$~~ $\angle CDL$ и $\angle CLD$ — острые, то $\angle BDL$ и $\angle ALD$ — тупые, значит, AA' и BB' падают вне треугольника ABC.

Т.к. S лежит на AB, то в силу симметрии C лежит на $A'B'$. Т.к. D лежит на BC, то, в силу симметрии относительно прямой DL, D лежит $B'S$.

Пусть $\angle CBL = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle LBA = \angle CBL = \beta$ (т.к. BL — биссектриса. $\angle CDL = \angle CAB = \alpha$, $\angle DCS = 90^\circ - \angle CDL = 90 - \alpha$, $\angle BSC = 180^\circ - \angle CBS - \angle BCS = 90 + \alpha - 2\beta$.

$\angle CLD = \angle CBA = 2\beta$, $\angle LCS = 90 - \angle CLD = 90 - 2\beta$. $\angle CSA = 180^\circ - \angle BSC = 90 + 2\beta - \alpha$. В силу симметрии $\angle CSL = \angle SCL = 90 - 2\beta$.

$\angle ASL = \angle ASC - \angle LSC = 4\beta - \alpha$. В силу симметрии $\angle LCA' = \angle LSA = 4\beta - \alpha$.

$\angle B'CB = 180^\circ - \angle BCA - \angle LCA' = 2\alpha - 2\beta$.

В силу симметрии $\angle CBA = \angle SB'A' = 2\beta$, $\angle SDL = CDL = \alpha$, $B'D = BD$.

М9-03

$\angle B'DB = \angle CDS$ (т.к. они вертикальные), $\angle CDS = \angle SDL + \angle CDL = 2\alpha$.
$\angle B'DB = 2\alpha$. Т.к. $B'D = BD$, то $\angle DB'B = \angle DBB' = 90 - \alpha$.

$\angle BB'C + \angle BSC = \angle BB'S + \angle SB'C + \angle BSC = 90 - \alpha + 2\beta + 90 + \alpha - 2\beta = 180$,
значит, B, B', C, S лежат на одной окружности.
Т.к. $\angle SBB'$ и $\angle CB'B$ вписанные и $\angle SBB' = \angle CB'B$ в силу симметрии, то хорды CB и $B'S$, стягивающие данные углы, равны: $CB = B'S$.
$SB' = 2B'D$, $CB = 2CD$ в силу симметрии, значит,
$2B'D = 2CD$, $B'D = CD$, $\angle DB'C = \angle DCB'$, $\angle DB'C = 2\beta$, $\angle DCB' = 2\alpha - 2\beta$,
$2\beta = 2\alpha - 2\beta$, $\alpha = 2\beta$.
$\angle CAB = \alpha = 2\beta = \angle CBA$, значит, $CB = CA$.
$\angle LSA = 4\beta - \alpha = 2\beta$, $\angle LAS = \alpha = 2\beta$, значит, $SL = AL$. $SL = CL$ в силу симметрии. Т.к. $AL = SL = CL$, то BL – медиана $\triangle ABC$, а т.к. BL – биссектриса $\triangle ABC$, то $CB = AB$.
$AB = CB = CA$, значит, $\triangle ABC$ – равносторонний, $\angle CBA = 60°$.
Ответ: $\angle ABC = 60°$.

+