	1	2	3	4	5	Σ
Девятов	7	7	7	7	0	28
Нечаева	7	7	7	7	0	28

М10-50

№10.1

Заметим, что число 7651 удовлетворяет условию задачи, т.к

$7+6+5+1=19$

$19\cdot(7\cdot6\cdot5\cdot1)=3990$

№ 10.2

Пусть у множеств A и B нет совпадающих чисел, тогда рассмотрим множество $C=A\cup B$, в C нет одинаковых чисел.

$\Rightarrow$ В C $2n$ различных натуральных чисел сумма которых хотябы

① $S(C)\geq 1+2+\ldots+2n=\frac{(2n+1)(2n)}{2}=n(2n+1)$.

$S(C)$ - сумма чисел множества C

С другой стороны т.к $C=A\cup B$, то

② $S(C)=S(A)+S(B)=2n^2$

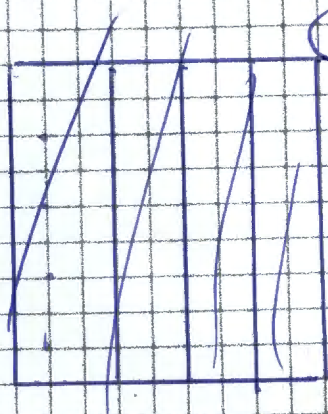
из ① и ②

$2n^2\geq n(2n+1)$

$\Updownarrow$

$0\geq n$

т.к $n\geq1$, ~~что~~ получаем Противоречие $\Rightarrow$ у множеств A и B есть совпадающее число



№ 10.3

Выигрывает Дима

Разобьем доску 8×8 на квадраты 2×2 см. рис 1

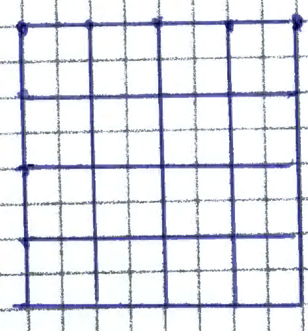
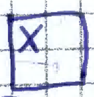


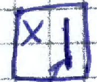
рис.1

Выигрышная стратегия Димы:

№10-50

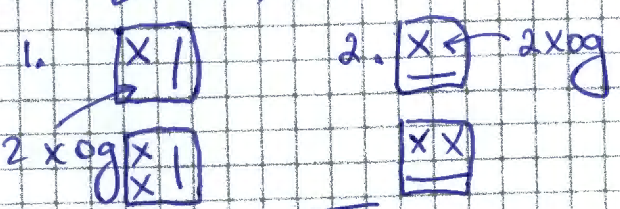
1) На каждый ход Коли Дима ходит в тот же квадрат 2×2

1. Если Коля ходит в пустой квадрат 2×2 

Дима покрывает любые 2 пустые соседние по стороне клетки в том же квадрате 2×2  (т.к после хода Коли остаётся уголок из 3 клеток Дима всегда сможет поставить доминошку)

доминошка

2. Если Коля ходит в квадрат, в который он ходил до этого ровно 1 раз, что в нём уже стоит доминошка и не пересекающиеся крестик => у Коли существует ровно 1 ход, заметим, что при его 2 ходе в данном квадрате появляется 2 рядом стоящих крестика это не сложно показать перебором (с точностью до поворота)



⇓

Образуются в данном кв. 2×2 2 рядом стоящих крестика => Дима покрывает их доминошкой 

Заметим, что после 2 Диминого хода в кв 2×2, Коля больше не сможет ходить в данный квадрат => кол-во квадратов, в которые может сходить Коля уменьш. на 1 и снова ходит Коля

№10.3

Аналогично играя по Диминой стратегии получаем, что Дима закроет последний квадрат в который мог сходить Коля своим ходом

Выиграет!

№10.4

$py+1 = ab \qquad a,b \geq y$

1) Заметим, что $a, b < p$, т.к

если $a \geq b$, то $a \neq p$, т.к тогда $1 \vdots p$

если a хотя бы $p+1$, тогда

$$ab \geq (p+1)(y+1) = py+1+p+y > py+1$$

$\Leftarrow$ $a, b < p$

Пусть такого y не сущ.

рассмотрим всевозможные y

$$\begin{cases} 1\cdot p+1 = a_1 b_1 \\ 2p+1 = a_2 b_2 \\ \vdots \\ \frac{p-1}{2} p+1 = a_{\frac{p-1}{2}} \cdot b_{\frac{p-1}{2}} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1 b_1 \equiv_p 1 \\ a_2 b_2 \equiv_p 1 \\ \vdots \\ a_{\frac{p-1}{2}} \cdot b_{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1 \end{cases}$$

Пусть существуют такие i, j, что $(i \neq j)$

$a_i = a_j$, тогда

$a_i b_i \equiv_p 1$

$a_j b_j \equiv_p 1$

$\Downarrow$ (т.к $a_i < p$ при любом i)

$b_i \equiv_p \frac{1}{a_i}$

$b_j \equiv_p \frac{1}{a_j} = \frac{1}{a_i}$

$\Downarrow$

$b_i \equiv_p b_j$, т.к $b_i < p$, $b_j < p$, то $b_i = b_j$

М10-50

тогда если $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$,
то $a_i b_i = a_j b_j$

$a_i b_i = 1 + pi$

$a_j b_j = 1 + pj$

$p(i-j) = 0$, т.к. $i \neq j$ противоречие

$\Downarrow$

все a_i - различные и

аналогично

все b_j - различные

Пусть существуют такие i, j $i \neq j$, что

$a_i = b_j$, тогда

$a_i b_i \underset{p}{\equiv} a_j b_j$

$\Downarrow$

$a_j \underset{p}{\equiv} b_i$, т.к. $a_j, b_i < p$, то

$a_j = b_i$

$\Leftarrow$

$a_i b_i = a_j b_j$

$\Downarrow$

$1 + pi = 1 + pj \Rightarrow p(i-j) = 0$

противоречие

$\Downarrow$

a_i - отличается от всех чисел

кроме может быть b_i (для b - аналогично)

Найдём все пары такие что

$a_i = b_i$ $\quad a_i \cdot b_i \underset{p}{\equiv} 1$

$a_i^2 \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow (a_i - 1)(a_i + 1) \underset{p}{\equiv} 1$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a_i = 1 \\ a_i = p-1 \end{array}\right.$

$\leftarrow$

$a_i = b_i = 1$ $\quad a_i = b_i = p-1$

$\Downarrow$

$a_i b_i = 1 = 1 + py$ $\quad (p-1)^2 = 1 + py$ $\quad y < \frac{p}{2}$

не может быть $\quad p^2 - 2p \le \frac{p^2}{2}$

М10-50

$p^2-2p\le\frac{p^2}{2}$

$\frac{p^2}{2}-2p\le 0$

$p-4\le 0$

$p>3 \Rightarrow p\ge 5$

не может быть

все числа различны

$a_1, a_2 \ldots a_{\frac{p-1}{2}}, b_1, b_2 \ldots b_{\frac{p-1}{2}}$ — $p-1$ различное число ~~меньше~~ меньшее p

Заметим, что среди них есть a_i (либо b_i аналогично) равное 1

$y>a_i=1 \Rightarrow y$ – не натуральное противоречие

найдётся такой y, что

$py+1=a\cdot b$, где $b, a>y$

М10-87

№10.6

6	7	8	9	10	Σ	
7	7	1	0?	–	15	
7	7	1	0	–	15	

1) $\cos x$

2) $\cos x$ $\cos x \cdot \cos x$

Умножим $\cos x$ на $\cos x$

3) Прибавим к $\cos^2 x$ $\cos x$

$\cos x$ $\cos^2 x$ $\cos x + \cos^2 x$

Заметим, что при $x = \pi$

$\cos x + \cos^2 x = 0$

№10.8

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - (x_1 + x_2)ax + x_1x_2a$

Заметим, что при целых x_1, x_2

$b \vdots a$ и $c \vdots a$

$c, b > 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > 0$ и $(-x_1 + x_2) > 0$

$x_1, x_2 < 0$ $x_1, x_2 \neq 0$, т.к c - натур.

т.к $x_1 \neq x_2$

$-(x_1 + x_2)a \geq 3a$

a хотя бы в 3 раза меньше b

~~наименьших~~ l - макс. знач. звездочки,

тогда $\left[\frac{2}{3}l\right]$ - кол.во чисел больше $\frac{1}{3}l$

$3n - \left[\frac{2}{3}l\right]$ - кол. чисел меньших $\frac{1}{3}l$ или равных.

среди $3n$ подряд идущих чисел

т.к кол.во значений коэф. a - n, то

$3n - \left[\frac{2}{3}l\right] \geq n$

$2n \geq \left[\frac{2}{3}l\right]$

Н/О-14

~~т.к. ℓ - макс. знач. *, то $\ell \geq 3n$ $\Downarrow$ $2n \geq \frac{2 \cdot 3n}{3}$ $\left[\frac{2}{3} \cdot 3n\right]$ $2n \geq 2n$ $\Downarrow$ равенство достигается, когда $\ell = 3n$ либо $\ell = 3n+1$, при больших * ℓ - не работает~~

Заметим, что т.к. коэф. при x^2 ровно n, и коэф. при x^2 хотябы в 3 раза меньше ~~в~~ коэф. при x, то первые выбраные n чисел подрядидущих все ~~коэф.~~ при x^2, т.к. иначе

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}\ \underbrace{a_0 \qquad}_{\text{коэф. при } x^2}$$

$a_0 \cdot 3 > \ell^{n}$, где ℓ^{2n} - макс. из $3n$ послед. чисел

$\Downarrow$

$$\underbrace{a,\ a+1, \ldots\ a+n-1}_{\text{коэф. при } x^2},\ \underbrace{a+n, \ldots\ a+3n-1}_{2n},$$

Заметим, что если коэф при x^2 делиться на 3, то все остальные коэф. тоже делятся на 3, т.к

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

$b \vdots a$

$c \vdots a \Leftarrow$ ~~[illegible]~~ Если среди первых n чисел ~~ровно~~ хотябы $\left[\frac{n}{3}\right]$ делятся на 3, то всего чисел $\vdots 3$ хотябы ~~$\frac{n}{3} \cdot 3$~~ $\left[\frac{n}{3}\right] \cdot 3$

M10-37

$$\left[\frac{n}{3}\right]\cdot 3 \geq \frac{n-2}{3}\cdot 3 = n-2$$

Рассмотрим ~~также~~ 5 чисел

$a+n-1$

$a+n-2$ ← выберем 3 из них $\vdots 3$

$a+n-3$ (коэф. при x^2)

$a+n-4$, $a+n-5$

Рассмотрим трехчлены с ними

$(a+n-i)x^2 + (a+n-i)(x_1+x_2)x + x_1\cdot x_2\cdot(a+n-i)$

где $i\leq 5$

Заметим, что ~~...~~

если $-(x_1+x_2)$ хотя бы 4, то

$b=(a+n-i)(x_1+x_2)\geq 4(a+n-i)>$

$>a+3n$, т.к $3a+n>4i$, т.к

n хотя бы 100

i макс 5

$\Leftarrow$ при такой сумме

$-(x_1+x_2)$ b - было бы больше макс. числа

$-(x_1+x_2)=3 \Leftarrow -(x_1+x_2)\geq 3$

из ранее доказ.

$\Downarrow$

существует ещё хотя бы 3 числа $\vdots 3$ вида $3(a+n-i)$, $i\leq 5$,

которые мы не учли при подсчете

$\Leftarrow$

чисел кратных 3 хотя бы

$(n-2)+3=n+1$, но заметим, что

чисел от a до $a+3n-1$, $\vdots 3$ ровно

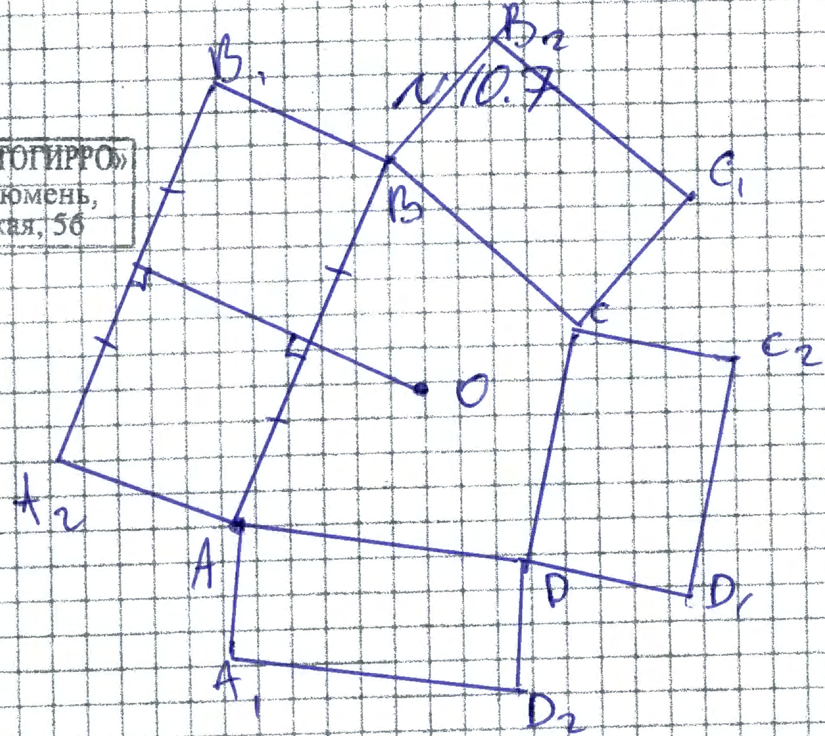
$\frac{3n}{3}=n$ $\quad n+1>n$

противореч

Такого n не существ

11-10-34

№10.7



Рассмотрим центр. окр. описан. вокруг A, A_2, B, B_2. ~~где~~ назовем его O

Заметим, что т.к O - центр окр., то O лежит на сер. перп. A_2B_1, т.к ▭ AA_2B_1B - прямоугольник, то сер.пер A_2B_1 - это сер.пер. AB $\Rightarrow$ O лежит на сер. перп к AB

Аналогично рассуждая для других сторон получаем, что O - точка пересеч. сер.перп. к AB, BC, CD, DA $\Leftarrow$

O - центр. опис. окр ▭$ABCD$ $\Rightarrow$

▭$ABCD$ - вписанный.

№10.9

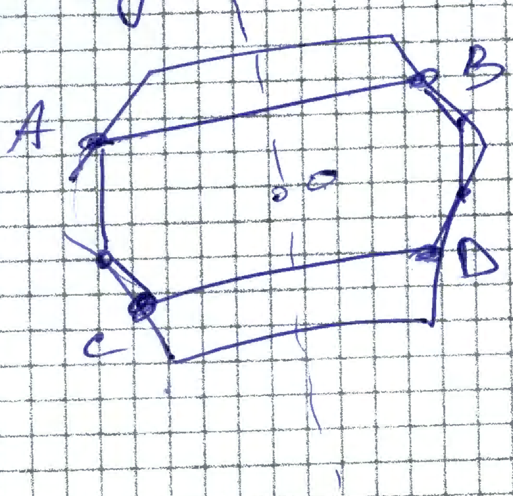
Не может.

1) Заметим, что для того чтобы A_k угольник резался на k угольн то $n = a(k-1)+1$, где n - кол-во диагоналей

Это можно показать спуском

Отрезая к угольник мы убираем к-1 сторону, но в конце остаётся к угольник, по этому +1

Пустъ это возможно тогда



тогда Если AB и CD то кол-во вершин между AC и BD равны в силу симметрии между AC и BD одинаковое кол-во городов.

Заметим, что выбрав наш к угольник у которово стороны и получаем, что между (A и C) и (B и D) разное по чётности кол-во проведёных диагоналий => на участке AC есть чёт кол-во подряд. вершин