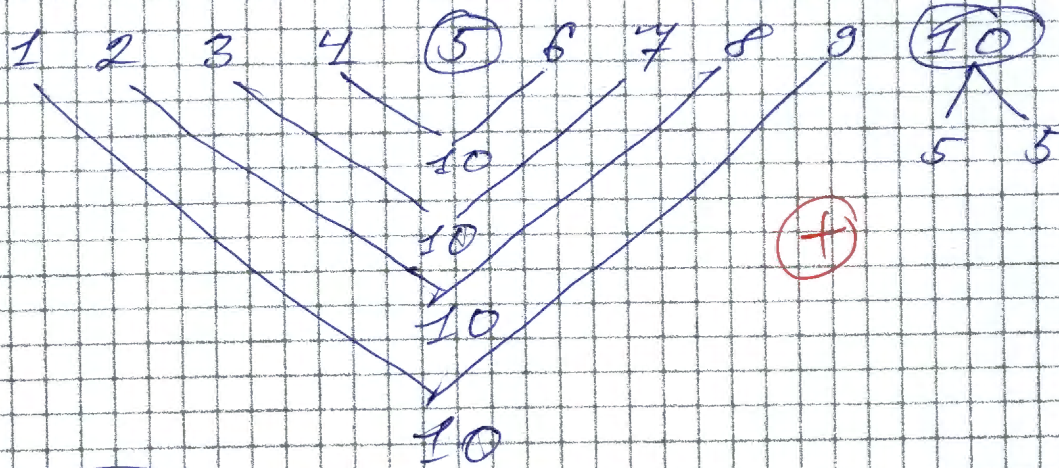
М9-08

1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	±	∅	
7	7	7	0	0	

Задача 1

Ответ: да, может.

Пример: на первой минуте делим кучу из 10 на 2 равные. 2 мин.: ~~тр~~ объединяем кучи из 1 и 9 камней. На 3-ей мы новую кучу из 10 камней делим на 2 по 5 камней; и т.д. Т.е. на $2k$ минуте мы объединяем кучи из k и $10-k$ камней, а на $2k+1$ — эту кучу из 10 камней бьём на 2 равные ($k \leq 4$). Тогда после 9-ой минуты у нас будет 11 кучек по 5 камней.



+

Задача 2.

Упорядочим наши числа: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ ~~a_{n-1}~~ $\geq a_n$. Тогда найдём наибольшее возможное

М9-08

значение a_3. Док-м, что $a_3 \le 989$.

Пусть $a_3 \ge 990$. Тогда по условию задачи $a_2 \ge 990+10 = 1000$; а $a_1 \ge 1000+10 = 1010$. Но тогда $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ge$
$\ge 1000000 + (1000+10)^2 + (1000-\cancel{10})^2 =$
$= 1000000 + 2000000 + 200 =$
$= 3000000 + 200 > 3000000$

Значит, $a_3 \le 989$. Тогда заметим, что при $a_3 = 989$; $a_2 = 999$ и $a_1 = 1009$ первое условие задачи выполняется (т.к. $a_3 < 990$; $a_2 < 1000$; $a_1 < 1010$; а $(1010)^2 - a_1^2 \ge (1010)^2 - (1009)^2 = (1000000 + 20000 + 100) - (1000000 + 18000 + 81) = 2019 > 2009 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 3000000$). Теперь, ~~то~~ найдём наименьшее возможное значение a_{n-2}. Оно равно -989 по тем же причинам (т.к. квадрат числа ≥ 0 и необходимо выполнять второе условие). Тогда, раз мы ищем наибольшее значение $(a_3 - a_{n-2})$, $\Rightarrow$ мы можем найти наибольшее n (т.к. чем больше ~~от~~ ~~интервал~~ отрезок $[a_{n-2}; a_3]$, тем больше на нём может быть чисел).

Найдём наибольшее возможное кол-во чисел ~~среди~~ последовательности среди $989 \cdot 2 + 1 =$

мg-08

(будем искать от 1 до 1979)

≤ 1979 подряд идущих чисел

Чтобы найти наибольшее кол-во, нужно сделать разницу между выбранными числами равную 10; а первое выбранное число $=1$. Тогда чисел будет 198 (от 11 до 1971 и ещё 1).

Значит, $(n-4) \le 198$, $\Rightarrow n \le 202$.

Приведём пример при $n=202$

(-1009); (-999); (-989); (-979); …, (-9); (9); (19); … (979); (989); (999); (1009).

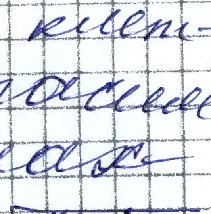
(нетрудно убедиться, что здесь 202 числа).

$\boxed{\text{Ответ: при } n=202}$

Задача 3.

Ответ: выиграет Коля

Стратегия: не раздумывая, в каждый свой ход будем рисовать крестик в белой клетке (предварительно раскрасим у себя в голове доску шахматной раскраской).



Тогда заметим, что Дима своей доминошкой на каждом ходу закрывает ровно 1 белую клетку.

Значит, если к моменту нашего 16-ого хода Дима

М9-08

не проиграл, то мы поставили крестик в последнюю (забыл сказать: раз до нашего 16-ого хода ~~все крест~~ никакие 2 крестика рядом не стояло; => Дима будет накрывать еще ~~не~~ не накрытые и не „испорченные крестиками" белые клетки). Теперь 17-ый ход Димы и он проиграл; т.к. любая его попытка поставить доминошку будет кончаться крахом; ведь никакие 2 креста рядом не стоят, а ~~в~~ каждая белая клетка либо покрыта, либо помечена крестиком (а до 16-ого хода мы не проиграем; т.к. белых клеток 32; а мы ходим вторыми, и к k-ому ходу будем свободно еще (32 − 2k) белых клеток). Значит, в любом случае Дима к своему ~~т~~ 17-ому ходу проиграет.

Ответ: Коля

мg-08

Задача 4

Давайте докажем, что существует y такой, что не существует такого x на интервале $(y; p)$, что $(py+1) \vdots x$. Если мы это докажем, то возьмём это y. Если найдётся такое z, что $py+1 \vdots z$, $z > y$, $\frac{py+1}{z} > y$, то $y < z < p$, т.к. $z \neq p$ (ведь $py+1$ и p взаимнопросты), а если $z \geq p+1$, то $\frac{py+1}{z} \leq \frac{y(p+1)}{z} \leq$ $\leq y$).

Для доказательства сперва докажем следующее: не существует t и r $(t < r)$ таких, что $1 \leq t < r < \frac{p}{2}$ и НОД$(tp+1; rp+1) \geq r$. Пусть такие есть: тогда, раз справедливо равенство для $a, b \geq 1$ $(a \geq b)$: НОД$(a; b) =$ НОД$(a-b; b)$, то воспользуемся им: НОД$(tp+1; rp+1) =$ $= (tp+1; (r-t)p) = (tp+1; (r-t))$, т.к. $(tp+1; p) = 1$. Но тогда либо $t=0$, либо $r=t$, ведь $(tp+1; (r-t)) \geq r \Rightarrow$ $\Rightarrow (r-t)$ должно быть $\geq r$, либо $(r-t)=0$

М9-08

Раз $r \neq t$, и $r; t \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ НОД$(tp+1; rp+1) < r$;
противоречие. Утверждение доказано. +

~~Применим его для $t=1$;
$r=2$ НОД$(p+1; 2p+1) < 2$; т. е.
равен единице НОД$(2p+1, 3p+$~~

Среди чисел $(p+1)$; $(2p+1)$ ...
$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)p+1\right)$ при любом $1 < x \leq \left(\frac{p-1}{2}\right)$
есть хотя две ~~...~~ 1; x) и что?

любая пара $tp+1$ и $rp+1$ может иметь НОД $=1$ ... откуда это?

М 9-22

6	7	8	9	10	
+	+	+	+.	−	Едм
7	7	7	7	0	9к

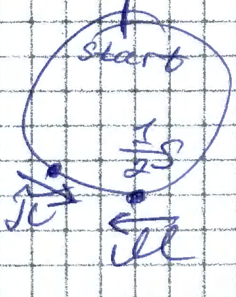
$\Sigma = 28$

Задача 9.6

Пусть скорость Пети — v, а Миши — $1{,}02v$ (по условию задачи)

Тогда t_1 — время, за которое Миша пробежал полкруга (длина дорожки $= S$).

$t_1 = \frac{S}{2{,}04v}$. За это время Петя пробежал $vt_1 = \frac{S}{2{,}04}$. Разворачиваем Мишу и заставляем бежать обратно полкруга т.к. Миша был дальше Пети, то они в ближайшее время встретятся.



Значит, когда Миша ~~ока~~ окажется в отправной точке, Петя пробежит еще $\frac{S}{2{,}04}$; т.е. суммарно $2\frac{S}{2{,}04} = \frac{S}{1{,}02}$; т.е. расстояние между парнями $= S - \frac{S}{1{,}02} = \left(\frac{0{,}02}{1{,}02}\right)S$.

Через $t_2 = \frac{\left(\frac{0{,}02}{1{,}02}\right)S}{2{,}02v}$ они встретятся, двигаясь друг к другу, причем ~~Петя~~ Петя в это время будет на расстоянии $\cancel{\frac{0}{1{,}02}}$ $S - \left(\frac{S}{1{,}02} + vt_2\right) = S\left(1 - \left(\frac{1}{1{,}02} - \frac{0{,}01}{1{,}02 \cdot 1{,}01}\right)\right)$ от

М9-22

финиша, что равно
$S\left(1-\frac{1}{1{,}02\cdot 1{,}01}\right)<S$.

Тогда, заставим Мишу развернуться через минимальное время после второй встречи (он уже пробежал $>\frac{S}{2}$ по часовой стрелке) такое, чтобы он смог догнать Петю до финиша (иначе, пусть Пете осталось бежать t_3 времени. Развернув Мишу через $\Delta t=\left(\frac{t_3}{10^{1000}}\right)$ времени, он не будет в этот момент вплотную к Пете, расстояние между ними будет $\Delta S=\Delta t\cdot 2{,}025$, а через $t_4=\frac{\Delta S}{0{,}025}=\frac{\Delta t\cdot 1{,}01}{0{,}01}=$
$=101\Delta t$ Миша нагонит Петю в свой третий раз, но т.к. $t_3>101\Delta t$, $\Rightarrow$ это произойдёт до момента финиша Пети. +

Задача №9.7

Ответ. 1010.

Т.к. все числа различные, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ два изначально зелёных хамелеона не могут стоять рядом друг с другом (они должны тогда назвать равные числа). Заметим

может быть не больше $\left[\frac{2019}{2}\right] + 1 = 1010$ (2018 — это 1009 пар рядом ~~стоящих~~ отвечающих хамелеонов). +

Пример: зелёные хамелеоны ~~стоят~~ ~~называют~~ отвечают через одного, начиная с первого, а ответы всех были такие:

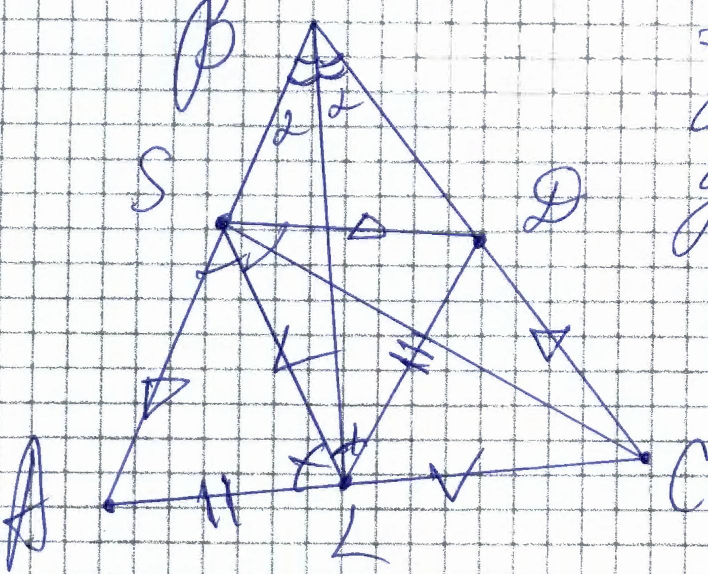
~~1009, 1, 1010, 2, ..., (1008+k), k, ..., 2016, 1008, 2017, 2019, 2018~~

1010; 1; 1011; 2; ... (1009+k); k; ... 2017; 1008; 2018; 1009; 2019.

Пояснение: первый называет число всех зелёных хамелеонов, а следующий — число предыдущего (−1009), т.е. 1. Тогда ~~следую~~ третий называет на 1 больше числа первого, т.к. второй стал зелёным; и т.д. 2019-ый хамелеон называет «2019», т.к. все уже позеленели.

Ответ: 1010. +

Задача 9 8



Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Тогда, т.к. BL — биссектриса $\angle ABD$, $\Rightarrow$ $AL = LD$, т.к. стягивают равные дуги и лежат на одной окружности.

Т.к. S симметрична C относ. DL, $\Rightarrow$ $SD = DC$; $SL = LC$. Однако, $\angle CDL = \angle BAL$ (т.к. $ABDL$ — впис. четырёхугольник), а $\angle CDL = \angle SDL$; $\Rightarrow$ $\angle SAL = \angle SDL$. Тогда, если D не совпадает с B, то по теореме синусов $\frac{SL}{\sin\angle SAL} = 2R_{ASL}$, а $\frac{SL}{\sin\angle SDL} = 2R_{SDL}$; т.е. раз $\angle SAL = \angle SDL$ $\Rightarrow$ $R_{ASL} = R_{SDL}$. Тогда $\frac{AL}{\sin\angle ASL} = \frac{DL}{\sin\angle DSL}$; $\Rightarrow$ раз $AL = DL$, $\Rightarrow$ $\sin\angle ASL = \sin\angle DSL$; $\Rightarrow$ если $\angle ASL \neq \angle DSL$, то $\angle ASL + \angle DSL = 180^\circ$; $\Rightarrow$ D совпадает с B.

Значит, $\angle ASL = \angle DSL$; $\Rightarrow$ $\angle ALS = \angle SLD$ (~~2 у~~ по 2 угла уже известные); $\Rightarrow$ $\triangle ASL = \triangle DSL$; $\Rightarrow$ $AS = SD$. Тогда $\triangle ALS = \triangle DLC$ по 3-м сторонам. ~~Значит~~

Значит, $\angle ALS = \angle DLC$, $\angle ALS =$

М9-22

$= \frac{(180 - \angle ABD)}{2} = 90 - \alpha$;

а $\angle DLC = \angle ABC = 2\alpha$; $\Rightarrow$ $90 - \alpha = 2\alpha$; $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$; $\Rightarrow$ $\angle ABC = 2\alpha = 60^\circ$.

Раз точка D не совпадает с B, то второго случая быть не может; а при $\angle ABC = 60^\circ$ есть пример — равносторонний треугольник (в нём DL будет средней линией; ⇒ симметрия точки C относительно прямой DL попадёт на AB). +

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$.

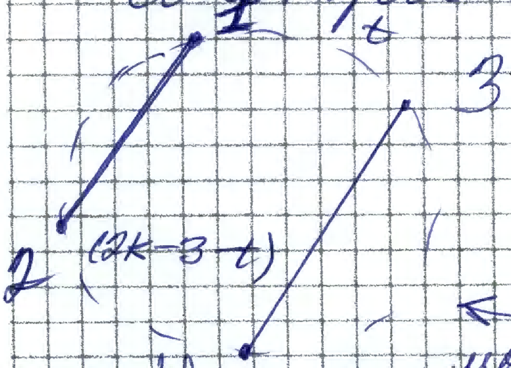
(на всякий случай $\angle CDL < 90^\circ$, т.к. $\angle BAC < 90^\circ$; аналогично $\angle DLC < 90^\circ$)

Задача 9.9

~~Пред~~

Ответ: ~~нет да~~. нет.

Предположим, что может тогда (т.к. стороны многоугольников это диагонали или стороны исходного, то в хорошем многоуг. есть 2 параллельные стороны или диагонали (или сторона и диагональ). Рассмотрим их.



Пусть все многоугольники разбиения имеют $(2k+1)$ вершину (т.к. равное кол-во сторон)

многоугольник

М9-22

Значит, между вершинами 1 и 3 1 и 2 многоугольника есть t принадлежащих ему, а ~~с дру~~ между 2 и 4 3 и 4 — $(2k-3-t)$.
Тогда, очевидно, что
$(2k-3-t) \not\equiv t \pmod 2$, т.к. $2k-3 \equiv 1$, а $1-t \not\equiv_2 t$, т.к. $2t \equiv_2 0 \not\equiv_2 1$. Значит, $t \neq (2k-3-t)$.
Теперь, чтобы не морочить голову, будем считать, что $f = 2k+1$. Тогда, между 1 и 3 1 и 2 ? у нас образуется (~~t~~+1)? больших ~~мн~~ многоугольника, которые нужно разбить на ~~многоуг.~~ f-угольники; а между 2 и 4 3 и 4 ? — $(f-3-t)$?
Пусть есть многоугольник с "а" вершинами и, проведя в нём "r" рёбер мы смогли ~~разбит~~ разбить его на "f"-угольники.
Тогда, каждой вершине припишем кол-во ~~многоугол~~ f-угольников, в которые она входит. Тогда сумма всех чисел равна $a+2r$, т.к. очередное ребро бьёт какой-то многоугольник, ~~в~~ его содержащий, на 2: т.е. к концам ребра добавляется по "1". С другой

стороны, это число равно $(r+1)f$; где $(r+1)$ — число f-угольников:

$a+2r=(r+1)f=fr+f$; $a=fr-2r+f$;

$(f\geq 3)$

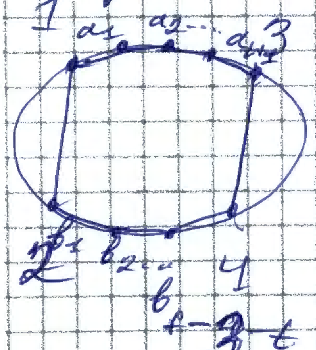
$r=\frac{a-f}{f-2}$. т.к. $r\geq 0$, то либо

$a=f$; ~~либо~~ (иначе говоря $(a-2)=(f-2)$) либо $(a-f)\vdots(f-2)$, т.е.

$(a-f)+(f-2)\vdots(f-2)$; $\Rightarrow (a-2)\vdots(f-2)$

(если $(a-2)=(f-2)$, то $(a-2)\vdots(f-2)$).

$\boxed{\text{Значит, необходимое условие разбиения — } (a-2)\vdots(f-2)}$ +



Пусть многоугольники, которые надо разбить, состоят из $a_1; a_2; \ldots a_{t+1}$ вершин и $b_1; b_2; \ldots b_{f-3-t}$ вершин

Т.к. кол-во вершин между 1 и 3 равно? кол-ву вершин между 2 и 4 => вычитая все повторения, запишем равенство.

каким образом? (следует из правильности многоугольника)

$a_1+a_2+\ldots+a_{t+1}-t-2=b_1+\ldots+b_{f-3-t}-(f-4-t)-2$. Теперь, для $\forall_i\in[1;t+1]$:

$A_i=a_i-2$, и для $\forall_j\in[1;f-3-t]$:

$B_j=b_j-2$. Перепишем равенство:

$A_1+\ldots+A_{t+1}+t=B_1+\ldots+B_{f-3-t}+(f-4-t)$.

$-(f-4-t)-2+2\cdot(f-3-t)=f-4-t$

№9-22

Очевидно, что если разбиение верное, то (т.к. $A_i ; B_j \vdots (f-2)$).
$\boxed{A_1 + A_2 + \ldots + A_{t+1} \equiv B_1 + \ldots + B_{f-3-t} \equiv 0 \pmod{(f-2)}}$. Значит,
$t \equiv f-4-t \pmod{(f-2)}$; а т.к. $(f-4) \equiv -2 \pmod{(f-2)}$; $\Rightarrow t \underset{(f-2)}{\equiv} -(t+2)$; $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2t \underset{(f-2)}{\equiv} -2$, $\Rightarrow 2(t+1) \vdots (f-2)$. Раз $f \vdots 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (f-2) \vdots 2$; т.е. $(t+1) \vdots (f-2)$. Но тогда $t \geq f-3$; но, как мы знаем, $t \leq f-4$; противоречие. (т.к. $(t+1) \geq ($
Значит, f либо 1, либо 3, но 1-угольника не существует, а 3 у треугольника никакие 2 стороны не параллельны.
Значит, разбиения с „хорошим" многоугольником не существует.

Задача 10

Перенесём в левую часть
$-x_3$, $-x_4$, ... $-x_2$. Что-же будо сделаем, и должно всё ~~получиться~~ получиться