М11-29

№ 11.1

1	2	3	4	5	Σ=28
7	7	7	7	0	

Ответ: $n=17$.

Пример: $-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$

Действительно: 2 наибольших — 7 и 11, 2 наименьших — -7 и -11.

~~Пусть~~ Предположим, что существует $n \geq 18$ чисел, удовлетворяющих условию. Пусть 2 наибольших числа — a и b $(a>b)$, 2 наименьших — c и d $(c>d)$. (Ни одно из них не равно другому $(n \geq 18)$) Тогда в ~~каждой~~ парах (a,b) и (c,d) числа одного знака, иначе их произведение ≤ 0. Также, если все 4 числа одного знака, ~~то $ab>cd$, т.к~~ то $ab \neq cd$ (т.к $cd \neq 0$). Действительно, если $a>b>c>d \geq 0$, то $ab>cd$, аналогично, если ~~$0<a<b<c<d$~~ $0>a>b>c>d$, то $cd>ab$ $(|c|>|a|, |d|>|b|, |cd|=|c|\cdot|d|, |ab|=|a|\cdot|b|)$. Таким образом, $a>b>0>c>d$, все оставшиеся числа лежат между b и c (иначе либо (a,b) — не наиб., либо (c,d) — не наим.)

т.к. $n \geq 18$, то одно из чисел b или c по модулю больше 7 (иначе макс. число чисел между b и c $= 6+1+6=13$ и $n \leq 17$). Пусть, не умаляя общности, это b: $b>7$. Но тогда $b \geq 11$ (Все делители положительные числа $77 = 7\cdot 11$ — $77, 11, 7, 1$), $a \leq \frac{77}{b} = 7$. $b>a$ — противоречие.

Аналогично, если $c<-7$, $c \leq -11$, $d \geq \frac{77}{-11} = -7$, $d>c$ — противоречие.

Значит, наше предположение неверно, и макс $n=17$.

№ 11.2

Предположим, искомое число не найдётся. Рассмотрим общий набор всех чисел. Т.к. в нём нет равных чисел (иначе есть число $\in A$ и $\in B$. противоречие), упорядочим все числа:

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n}.$$

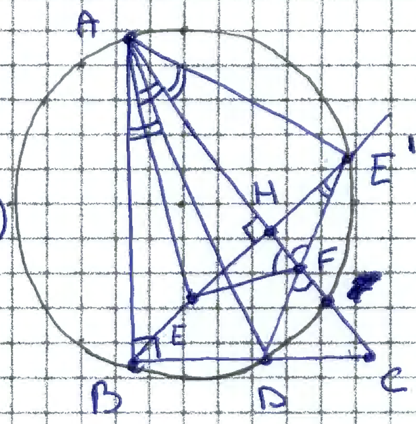
Докажем, что $a_i \geq i$. Действительно: $a_1 \geq 1$. Пусть k — первое такое, что $a_k < k$. Тогда $a_{k-1} \geq k-1$, $a_k > a_{k-1} \Rightarrow$ $a_k \geq a_{k-1}+1 \geq k-1+1 = k$. Противоречие. Значит, таких k нет.

Тогда сумма всех чисел $\geq 1+2+\ldots+2n = \frac{(2n+1)2n}{2} = (2n+1)n = 2n^2+n > 2n^2$.

Противоречие, т.к. сумма чисел равна $2n^2$. Значит, наше предположение неверно и существует число, принадлежащее обоим множествам.

ч.т.д.

№ 11.3.



Пусть E' симметрична E относительно AC, тогда $E' \in EH$, т.к. $\angle AHE = 90^\circ$ и $\angle AHE' = 90^\circ$ (при этой симметрии $A \to A$, $H \to H$) $\Rightarrow$ их сумма 180°.

$$\begin{cases} \angle EAH = \angle E'AH = \angle BAD \\ \angle AHE' = 90^\circ = \angle ABD \end{cases} \Rightarrow \angle ADB = \angle AE'H$$

Тогда т.к. лучи DC и DE' лежат по одну сторону от AB, A, B, D, E' лежат на одной окружности.

$\angle BAD = \angle BE'D = \angle BE'F$, т.к. E', F, D лежат на одной прямой ($\angle HFE' = \angle CFD$). $\angle HFE' = \angle EFH$ $\Rightarrow$ $\angle EFH + \angle FAE = 90^\circ$, т.к. $\angle FAE = \cancel{\ldots} = \angle FAE'$. $\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ$.

ч.т.д.

№ 11.4.

Рассмотрим все пары чисел (a, b) таких, что $ab = kp+1$ для некоторого $k > 0$ и $k < \frac{p}{2}$ и $a > k$ и $b > k$. Тогда для заданного a в пару с ним вступает максимум одно b. ~~Действительно~~

Предположим обратное и $ab \underset{p}{\equiv} 1$ и $ab' \underset{p}{\equiv} 1$.

$a(b - b') \equiv 0$

$$\begin{cases} a \,\vdots\, p \Rightarrow a \underset{p}{\equiv} 0 \text{ (иначе } ab \underset{p}{\equiv} 0) \\ b \underset{p}{\equiv} b' \text{ и } b' \geq b + p, \text{ если } b' \text{ − наибольшее из } (b, b'). \end{cases}$$

$ab' \geq ab + ap = kp + 1 + ap = p(k+a) + 1$, но $a < a + k$ $(k > 0)$. Противоречие, т.к. для пары (a, b') $k' > a$.

Если существует пара (a, b) для числа a, то существует пара (b, a) для числа b, и т.к. она максимум одна, то различных пар не больше $\frac{p-3}{2} + 2$. Действительно, пар таких, что $a = b$ максимум две − $(1, 1)$ и $(p-1, p-1)$, т.к.

M11-29

~~Если $a^2 \underset{p}{\equiv} 1$, то $(a-1)(a+1) \underset{p}{\equiv} 1$ и либо $(a-1) \vdots p$, либо $(a+1) \vdots p$.~~

~~Но если $a \equiv 1$ и $a>1$, то $a \geq p+1$ и $a^2 \geq p^2+2p+1 > p^2/2+1 = p\cdot p/2+1 \Rightarrow k \geq p/2$ ⊥~~

~~Аналогично если $a \equiv p-1$ и $a > p-1$, то $a \geq 2p-1$ и $a^2 \geq 4p^2-4p+1 > \frac{p^2}{2}+1$, $k > p/2$ ⊥.~~

~~Но для каждой пары (a,b), подбирается пара (b,a), но мы считаем эти пары за одну.~~

Действительно, каждое из чисел a, b не больше p, т.к. иначе (пусть $b > p$ не умаляя общности) $\underset{kp+1}{ab} > ap$ ~~$kp+1$~~

$kp \geq ap$

$k \geq a$ ⊥.

Но если нам подходит 2 пары (a,b), (a,b'), то

$$\begin{cases} ab \underset{p}{\equiv} 1 \\ ab' \underset{p}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow a(b-b') \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \underset{p}{\equiv} 0 \text{ ⊥, иначе } ab \underset{p}{\equiv} 0 \\ b \underset{p}{\equiv} b',\ b'-b \geq p \text{ (если } b'>b) \Rightarrow \\ b' > p \text{ ⊥} \end{array}\right.$$

Если в паре два числа равны, то это может быть только одна из пар $(1,1)$ или $(p-1, p-1)$, т.к. если $a^2 \underset{p}{\equiv} 1$, то

$$(a-1)(a+1) \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \underset{p}{\equiv} 1 \\ a \underset{p}{\equiv} p-1 \end{array}\right., \text{ но } a < p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = p-1 \end{array}\right.$$

Но ни одна из них не подходит: $1\cdot 1 = 1$ — случай соответствует $y=0$, но $y>0$.

$(p-1)(p-1) = p^2-2p+1 > p\cdot\frac{p}{2}+1 > py+1$ при любом y ($y < p/2$)

$\Updownarrow$

$\frac{p^2}{2}-2p+1 > 0 \Leftrightarrow p^2-4p+2>0 \Leftrightarrow (p-2)^2 > 2$, но $p>3 \Rightarrow p \geq 5 \Rightarrow (p-2)^2 \geq 9$.

Тогда ~~...~~ все оставшиеся пары разбиваются на пары (a,b), (b,a), которые мы считаем одинаковыми, и их $p-3$, т.к. $a \not\equiv 1$, $a \not\equiv p$ ($a \not\equiv 0$), $a \not\equiv p-1$

т.к. $ab \equiv 1$ имеет 1 реш. для $a \underset{p}{\equiv} 1$: $b \underset{p}{\equiv} 1$ т.к. $ab \equiv 1$ имеет 1 реш. для $a \underset{p}{\equiv} p-1$: $b \underset{p}{\equiv} p-1$

Таким образом, различных пар макс. $\frac{p-3}{2} < \frac{p-1}{2}$, различных y для них $\leq \frac{p-3}{2} < \frac{p-1}{2}$ ⇒ найдётся $y < p/2$ (один из $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$) искомый

ч.т.д.

M11-29

№11.5.

Ответ: $\frac{N^3-N}{2}$

Пример:

N^2	N^2-1	N^2-2	$\ldots$	N^2-N+1
N^2-N	N^2-N-1	N^2-N-2	$\ldots$	N^2-2N+1
			$\vdots$	
N	$N-1$	$N-2$	$\ldots$	1

Т.о. сумма больших чисел равна $N^2+N^2-N+\ldots+N=$
$=N(N+N-1+\ldots+1)=$
$=\frac{(N+1)N^2}{2}$, т.к. первое число в строке больше других в строке, и сумма малых равна $1+\ldots+N=\frac{(N+1)N}{2}$, т.к. нижнее число в столбце меньше других в столбце. $\frac{(N+1)N}{2}(N-1)=\frac{N^3-N}{2}$.

Заметим, что эта сумма не может превосходить N^2-N.

Действительно, если мы упорядочим все большие числа, а также все меньшие числа, то (набор a – большие, набор b – ~~меньшие~~ малые)

$a_1>a_2>\ldots>a_N$, $a_1=N^2$, $a_2\geq N^2-N$, $a_3\geq N^2-2N$, …, $a_i\geq N^2-(i-1)N$,

$b_1<b_2<\ldots<b_N$, $b_1=1$, $b_2\leq N+1$, $b_3\leq 2N+1$, …, $b_i\leq (i-1)N+1$.

Действительно, $a_1\geq N^2-(1-1)N=N^2$. Пусть k – наим. такое, что $a_k<N^2-(k-1)N$, ~~тогда $a_{k-1}\geq N^2-(k-2)N$~~. Рассмотрим все ~~столбцы~~ строки соотв. $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_N$. Всего чисел в них $=N(N-k+1)$, но каждое $<N^2-(k-1)N$, т.к. наиб. в строке соотв. k меньше $N^2-(k-1)N$, наиб. всех остальных меньше a_k. Противоречие, т.к. среди $N(N-k+1)$ различных натуральных чисел найдется число $\geq N(N-k+1)=N^2-(k-1)N$.

Значит, таких k нет и $a_i\geq N^2-(i-1)N$.

Аналогично $b_i\leq (i-1)N+1$. Действительно, пусть существует такое k, что $b_k>(k-1)N+1$. Рассмотрим столбцы соотв $k, k+1, \ldots, N$. В них суммарно $(N-k+1)N$ чисел, причем каждое больше $(k-1)N+1$ т.к. наименьшее k-ого столбца $<$ любого числа в столбцах $k, k+1, \ldots, N$, но натуральных чисел больших $N(k-1)+1$ и не больших N^2 ровно $N^2-N(k-1)-1=N(N-k+1)-1$. Противоречие. Значит $b_i\leq(i-1)N+1$ для всех $i=1,\ldots,N$.

Тогда искомая разность сумм не меньше ~~$N^2+N^2-N+\ldots+N^2-(N-1)N-$~~

N11-29

не меньше $n^2+n^2-n+\ldots+n-\left(1+(n+1)+\ldots+(n^2-n)+1\right)=$

$=n(1+\ldots+n)-\left(n+n(1+\ldots+n-1)\right)=$

$=\dfrac{n^2(n+1)}{2}-n\left(1+\dfrac{n(n-1)}{2}\right)=\dfrac{n^2}{2}(n+1-n+1)-n=$

$=n^2-n.$

6	7	8	9	10	Σ
+	+	+	∓	∅	24
7	7	7	3		

М11-02

№ 11.6.

Запишем на доске функции $x(x-1)$ и $x^2(x-1)$ $\left(x(x-1) = x^2+1-(x+1)\right.$, $x^2(x-1) = x^3+1-(x^2+1)\left.\right)$. Запишем функцию, полученную операцией умножения этих функций: $x^3(x-1)^2$, тогда эта функция искомая. Действительно, если $x>0$, $x^3>0$ и $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ значение неотрицательно, если $x<0$, $x^3<0$ и $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ значение неположительно.

+

№ 11.7.

Ответ: да, можно.

Будем раскрашивать натуральные числа по порядку: 1 покрасим в 1-ый цвет, число же $n>1$ будем красить следующим образом: если n чётно, то цвет числа n совпадает с цветом числа $n/2$, если n нечётно, цвет числа n отличается от цвета числа $n-2$. ~~Первые~~ Таким образом, раскраска будет выглядеть следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	2	1	1	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1

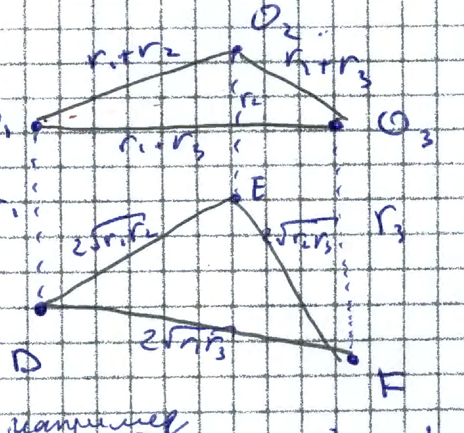
Докажем, что различные числа одного цвета не могут в сумме давать степень двойки. Т.к. числа не могут в сумме быть равны 2, то если $a \neq b$ (a и b одного цвета) и $a+b=2^n$, то $n \geq 2$ и $(a+b) \vdots 4$.

Но если a и b нечётные, то ~~одно~~ ~~число~~ сравнимы по модулю 4 с одним и тем же числом (~~число~~ нечёт. так числа с цветом 1 сравнимы с 1 по модулю 4, с цветом 2 — с 3). Действительно, пусть a — первое нечётное число, для которого не выполняется это правило и пусть не умаляя общности $a \equiv_4 1$. Тогда ← $a>2$, т.к. для числа 1 правило верно $(a-2) \equiv_4 1$ (т.к. для числа $a-2$ правило выполняется), но тогда $a-(a-2) \equiv_4 0$ и $2 \not\equiv_4 0$. Противоречие. (Если $a \equiv_4 3$, то $(a-2) \equiv_4 3$ и $2 \not\equiv_4 0$). Таким образом $a+b \equiv_4 2$, т.к. $a+b \equiv_4 3+3 \equiv_4 2$, либо $a+b \equiv_4 1+1 \equiv_4 2$, но $a+b \vdots 4$. Противоречие.

Таким образом, любые 2 нечётных числа из одной группы они могут давать в сумме степень двойки. Нечётное и чётное число так же не могут давать в сумме степень двойки (1 не может быть получена в сумме) т.к. их сумма нечётна. Докажем, что чётные числа из одной группы (одного цвета) также не могут быть в сумме равны 2^n для $n \geq 2$. Пусть a — первое такое, что существует $b < a$ ~~одного цвета~~ одного цвета с a | $a+b=2^n$, тогда $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=2^{n-1}$, но $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ имеют цвет a и b. Противоречие, т.к. $\frac{b}{2} < \frac{a}{2} < a$ и $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=2^k$, $k \geq 1$, т.к. либо мы нашли меньшее a, либо 2 числа с суммой 2). Таким образом, числа одного цвета не могут в сумме быть равны степени двойки в нашей раскраске. +

№11.9

Пусть 3 центра сфер — O_1, O_2, O_3, — центры сфер $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соотв. $\omega_1 \cap \omega_2 = A$, $\omega_2 \cap \omega_3 = B$, $\omega_3 \cap \omega_1 = C$. $\Rightarrow$ O_1, O_2, A лежат на одной прямой, аналогично тройки (O_2, O_3, B), (O_3, O_1, C) лежат на одной прямой. $\Rightarrow$ A, B, C лежат в плоскости $(O_1O_2O_3)$ так, что $O_1A = O_1C$, $O_2B = O_2A$, $O_3C = O_3B$ $\Rightarrow$ A, B, C — точки касания вписанной в тр-ник $O_1O_2O_3$ окружности с его сторонами $\Rightarrow$ окружность, описанная около ABC — окружность, вписанная в $O_1O_2O_3$.



Т.к. ω_1 касается (DEF), то $DO_1 \perp (DEF)$, аналогично $EO_2 \perp (DEF)$ и $FO_3 \perp (DEF)$ $\Rightarrow$ DEF — проекция $O_1O_2O_3$ на (DEF).

Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы шар. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$O_1O_2 = r_1+r_2$, $O_2O_3 = r_2+r_3$, $O_1O_3 = r_1+r_3$.

$O_1D = r_1$, $O_2E = r_2$, $O_3F = r_3$.

$DE = 2\sqrt{r_1r_2}$, $EF = 2\sqrt{r_2r_3}$, $DF = 2\sqrt{r_1r_3}$, т.к. например $DE^2 + (O_1D - O_2E)^2 = O_1O_2^2$ (если мы проведём через O_2 прямую $\parallel DE$ и пересечём её с O_1D (они лежат в одной плоскости)) и запишем т. Пифагора)

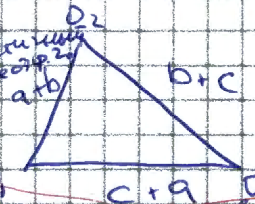
Таким образом, необходимо доказать, что вписанная в $O_1O_2O_3$ окружность имеет радиус меньше, чем описанная около DEF окружность. Тогда если r_0 – радиус впис. окр. в $O_1O_2O_3$, r_{DEF} – ~~радиус~~ впис. окр. DEF и R – радиус опис. окр. около DEF, и

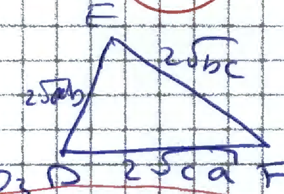
$r_0 < 2r_{DEF}$, то $r_0 < R$, т.к. $2r_{DEF} \le R$ по т. Эйлера. формуле?

$$r_0 = \frac{S_{O_1O_2O_3}}{p_{O_1O_2O_3}} = \frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c} = \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a+b+c}}$$

$\cancel{r_{DEF} = \frac{S_{DEF}}{p_{DEF}}}$ Но радиус окр. впис. в тр-ник со ст. $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ac}$ $\geq$ радиус окр. впис. в тр-ник $a+b$, $b+c$, $a+c$. откуда это?

гомотетичный с коэф. 2 тр-ник DEF





п. 8.

$\sin x + \cos y = \frac{t}{r} > 0$, $r\sin x + r\cos y = t > 0$ $\quad t, p, r, q \in \mathbb{N}$

$\sin y + \cos x = \frac{p}{q} > 0$, $q\sin y + q\cos x = p > 0$

$rp\sin x + rp\cos y = pt = tq\sin y + tq\cos x$. ~~подставим это~~

$qr\sin x + qr\cos y = qt$. – возьмём как m,

$qr\sin y + qr\cos x = pr$. – возьмём как n

$$m\sin x + n\cos x = qr\sin^2 x + qr\sin x\cos y + qr\cos^2 x + qr\sin y\cos x =$$
$$= qr + qr(\sin x\cos y + \sin y\cos x) = qr(1+\sin(x+y)).$$

~~Предположим искомые m и n не найдутся и при любых рациональных a, b>0 $a\sin x + b\cos x$ нерац. (иначе домножим a, b, $a\sin x + b\cos x$ на НОК их знаменателей).~~

Но $\sin(x+y) = \dfrac{\left(\frac{t}{r}\right)^2 - \sin^2 x - \cos^2 y + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - \sin^2 y - \cos^2 x}{2} =$

$$= \frac{\left(\frac{t}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2}{2} = \frac{t^2q^2 + p^2r^2}{2r^2q^2} - 1 > -1$$ – рационально

$qr(1-1) > 0$

Таким образом, $m\sin x + n\cos x = qr(1+\sin(x+y))$ – рационально и равно k/l, тогда возьмём ~~такие~~ пару ml и nl вместо m и n и получим натуральное k

ч.т.д.

+