№10-48

Σ	1	2	3	4	5	
21	7	7	7	0	0	Нечаева
21	7	7	7	0	0	Девятков

№1.

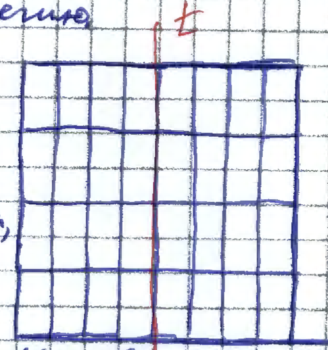
Ответ: 1567

Доказательство:

$(1+5+6+7)\cdot 1\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 19\cdot 1\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 133\cdot 30 = 3990$, ч.т.д.

№3.

Ответ: Дима имеет выигрышную стратегию.



Разделим поле 8×8 как показано ~~на~~ на рисунке. Прямую, параллельную левой стороне поля и делящую его пополам, назовём прямой t. Когда наступает ход Коли, он ставит крестик в прямоугольник (назовём его S) 2×1, где: 1) ещё нет крестиков. Тогда мы замощаем доминошкой 2×1 прямоугольник 2×1, в ~~которы~~ который симметричен прямоугольнику S относительно прямой t. Заметим, что мы всегда можем так сделать, т.к. иначе в этом прямоугольнике, симметричном S относительно t, был уже: ~~крестик~~ ровно один крестик, тогда в прямоугольнике S была доминошка 2×1, но Коля поставил туда крестик => такого быть не могло;

доминошка 2×1, тогда в прямоугольнике S уже был крестик, а тогда Коля поставил второй, значит, прямоугольник был непустой, что разберём в случае 2)

2) есть ровно один крестик. Тогда мы можем замостить прямоугольник S доминошкой 2×1, т.к. в нём стало два крестика.

Заметим, что после каждого хода Коли Дима сможет сходить => Коля рано или поздно сходить не сможет => => проиграет.

М 10-48

№2.

Допустим, числа в множествах A и B различны. Тогда в множестве C ($A \cup B = C$) все числа различны и в сумме дают число $2n^2$. Рассмотрим наименьшие $2n$ различных чисел, которые могут быть в C. Это числа от 1 до $2n$, а их сумма равна $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1) = 2n^2 + n > 2n^2$, т.к. $n > 0$. Если числа будут больше чем эти, то общая сумма будет больше $2n^2$, но она равна $2n^2$ => в C есть одинаковые числа. Рассмотрим два одинаковых числа: они не могут принадлежать одному из множеств (A и B) одновременно, т.к. по условию и в A, и в B различные числа => => одно число принадлежит A, другое – B, тогда у множеств A и B есть общее число, ч.т.д.

М10-48

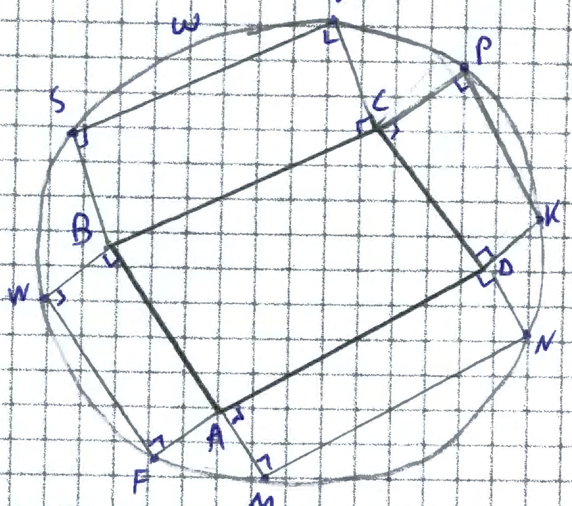
6	7	8	9	10	Σ	
7	7	0	0	0	14	
7	7	–	0	0	14	

№6

Первым шагом домножим $\cos x$ на $\cos x$, то есть, допишем $\cos^2 x$ на доску. Следующим шагом к $\cos^2 x$ прибавим $\cos x$, то есть, допишем $\cos^2 x+\cos x$. Заметим, что при $x = \pi$ $\cos^2 x = 1$, а $\cos x = -1$ $\Rightarrow \cos^2\pi + \cos\pi = 0$

Ответ: можно.

№7



Дано:

Выпуклый четырехугольник $ABCD$; $SLCB$, $PKCD$, $ADNM$, $AFWB$ – прямоугольники, построенные на сторонах $ABCD$ во внешнюю сторону; $S, L, P, K, N, M, F, W \in \omega$, где ω – окружность.

Доказать: $ABCD$ – вписанный

Доказательство:

Центр ω лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам WF, MN, KP и SL $\Rightarrow$ эти перпендикуляры пересекаются в одной точке. Заметим, что серединные перпендикуляры к AD и MN (а также CD и PK; WF и AB; SL и BC) совпадают, т.к. $ADMN$ – прямоугольник (т.к. они оба содержат среднюю линию $ADMN$, проведённую через середины AD и MN и т.к. эта средняя линия параллельна AM и DN по определению или перпендикулярна AD и MN, т.к. $(AM \parallel DN) \perp (AD \parallel MN)$) $\Rightarrow$ серединные перпендикуляры отрезков AB, BC, CD, AD тоже пересекаются в одной точке $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ – вписанный, ч.т.д.

М10-48

№10

Будем называть наши многочлены параболами, т.к. ax^2+bx+c – парабола, $bx+c$ – парабола с $a=0$, c – парабола с $a=0$ и $b=0$.

Ответ: $n=$ ~~[illegible]~~ 7.

Доказательство: чтобы определить параболу, нам потребуется хотя бы 3 значения в трёх различных точках. Если $n<5$, то Петя мог назвать два и менее значений для каждого из многочленов при названных Васей числах. Тогда $n\geq5$. Мы получили 5 значений, где хотя бы 3 из них принадлежат, ~~первой или второй параболе~~ ~~первому или второму многочлену~~ не умаляя общности, многочлену $f(x)$ (по принципу Дирихле). Тогда составим все возможные многочлены из данных 5 значений (их будет ровно ~~[illegible]~~ $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot2!}=10$), тогда хотя бы один из них будет являться либо $f(x)$, либо $g(x)$. Известно, что если два многочлена степени n принимают одинаковые значения в $n+1$ точке, то они совпадают. Тогда подставим в каждый из 10 полученных многочленов значения, которые Вася называл Пете. ~~Если Т.к. мы точно знаем, что среди этих 10 многочленов есть искомый, то рано или поздно у одного из многочленов будет хотя бы три значения из тех, которые назвал Петя. Если такой многочлен один, то он и есть искомый. Если таких многочленов несколько~~

Т.к. ~~у всех парабол хотя бы 3 общих значения с числами, которые назвал Петя~~ может не оказаться совпадающих парабол (когда у каждой из парабол ровно три значения совпадают с числами Пети), мы не можем наверняка назвать искомый многочлен. Тогда спросим у Пети ещё одно значение. Возьмём ~~четыре~~ значения, которые Петя уже говорил (~~a, b, c, d~~) и новое значение, построим по ним ~~10 многочленов. Если какой-то из них совпадает~~ новые $1\cdot5\cdot4:2=10$ многочленов.

~~Если новое значение, которое сказал Петя, принадлежит двум), то может возникнуть ситуация, что~~

М/10-48

Далее заметим, что ~~всегда~~ если хотя бы 4 из 5 первых названных Петей значений принадлежат $f(x)$, то из первых 10 образованных многочленов хотя бы два будут одинаковыми. Тогда достаточно 5 вопросов, эти одинаковые многочлены и будут $f(x)$. Тогда, если это не так, ~~только~~ ровно 3 из 5 первых названных Петей значений принадлежат $f(x)$. Если новое значение принадлежит ~~для~~ $f(x)$, то найдутся хотя бы два одинаковых многочлена, которые и являются искомыми (см. 1)). Если принадлежит $g(x)$, то у нас снова возникает ситуация, когда у всех многочленов ~~хотя бы~~ ровно 3 общих значения с числами, которые назвал Петя, и мы опять же не можем ничего сказать наверняка. Тогда ~~добавим~~ спросим у Пети ещё одно значение, итого 7. Заметим, что тогда хотя бы 4 значения принадлежат $f(x)$ (или $g(x)$). Тогда по новому значению и по старым образуем новые многочлены $(1 \cdot 6 \cdot 5/2 = 15)$.

1) Тогда заметим, что найдутся два, которые совпадут, т.к. они имеют по три значения от $f(x)$ (или $g(x)$) одновременно (но значения не полностью ~~за~~ совпадающие, т.к. всего их 4)

Тогда потребуется 7 ходов, ч.т.д.

№9.

Ответ: нельзя.

Доказательство: допустим, у нас получился ~~старший~~ ~~хороший~~ хороший многоугольник с нечётным количеством вершин. Обозначим его ~~ПАР~~ параллельные прямые за A_1A_2 и A_3A_4. Т.к. данный многоугольник правильный $\Rightarrow$ его можно вписать в окружность. $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \Rightarrow \smile A_1A_4 = \smile A_2A_3$ (не ~~умаляя~~ умаляя общности, пусть $A_1A_2A_3A_4$ выпуклый) $\Rightarrow$ на дугах A_1A_4 и A_2A_3 суммарно чётное кол-во вершин. Т.к. в рассматриваемом хорошем

1/10-48

многоугольнике нечётное кол-во вершин => либо на дуге A_1A_4 ~~н~~чётное кол-во вершин от хорошего многоугольника, либо на дуге A_2A_3.