

ГАОУ ТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

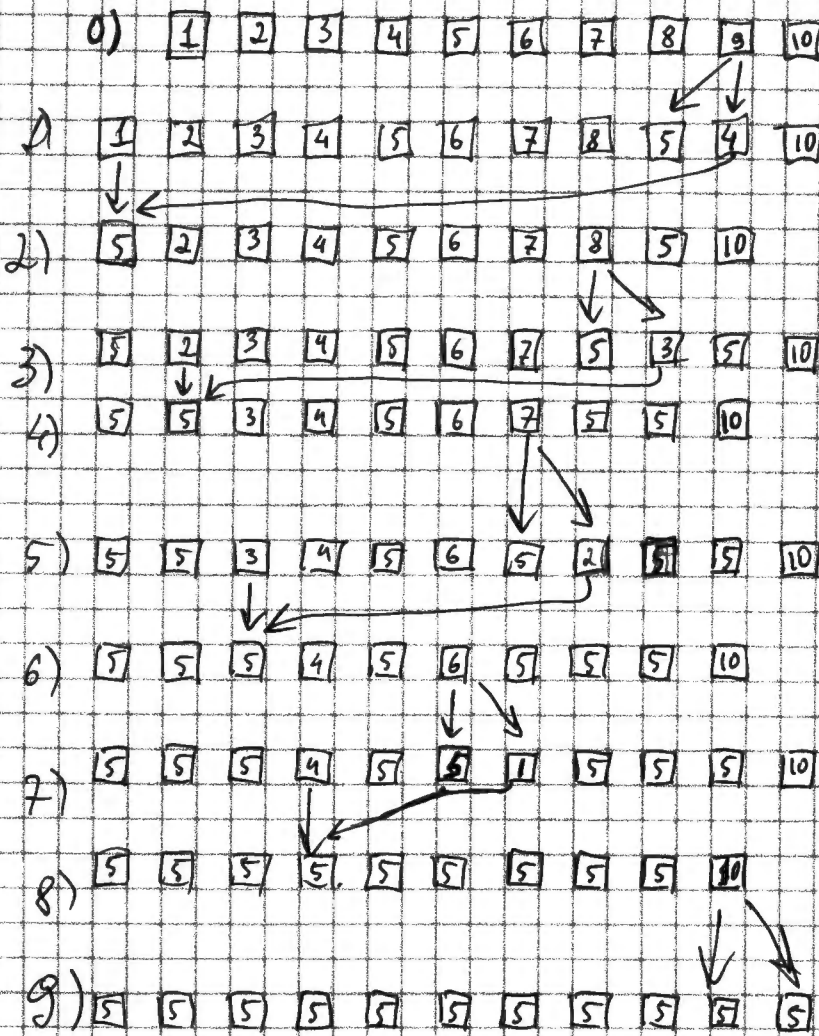
1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	0	-	
7	7	7	0	0	

*Eff*

9.1

Отвечать да, может.

Пример.



- ← Ситуация в канале
- На 1 минуте разбиваем 9 конфет на 5 и 4.
- На 2 минуте объединяем 1 конфету с 4.
- На 3 минуте разбиваем 8 конфет на 5 и 3.
- На 4 минуте объединяем 2 и 3 конфеты.
- На 5 минуте разбиваем 7 конфет на 5 и 2.
- На 6 минуте объединяем 3 и 2 конфеты.
- На 7 минуте разбиваем 6 конфет на 5 и 1.
- На 8 минуте объединяем 4 и 1 конфеты.
- На 9 минуте разбиваем 10 конфет на 5 и 5 и получаем 1 конфу по 5 конфет.

(+)



ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

**9.2**

Три наибольших числа -  $a, b$  и  $c$  ( $a < b < c$ )

Известно, что  $a^2 + b^2 + c^2 < 3000000$   $a > 0$

Тогда  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} < 1000000 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} < 1000$

По неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим  $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} < 1000$

$a+b+c < 3000$

$b \geq a+10$

$c \geq b+10, c \geq a+20$

$3000 > a+b+c \geq 3a+30$

$3a+30 < 3000$

$a < \frac{3000-30}{3}$

$a < 990 \Rightarrow a \leq 989$  ( $a, b, c$  - целые)

Рассмотрим наш ряд чисел на числовой прямой. Если тройка наибольших чисел пересекается с тройкой наименьших,  $n \leq 5$ .  
Если нет, то  $n = k+b$ , где  $k$  - кол-во чисел нашего ряда между наибольшим из тройки наименьших и наименьшим из тройки наибольших (между  $z$  и  $a$ ). Это кол-во зависит от расстояния между  $a$  и  $z$ . Оно максимально когда  $a$  максимально а  $z$  минимально (то к. а и  $z$  не зависят друг от друга).

Три наименьших числа -  $x, y, z$  ( $|x| > |y| > |z|$ )

$x^2 + y^2 + z^2 < 3000000$

$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} < 1000$

$1000 > \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{|x| + |y| + |z|}{3}$

$|x| + |y| + |z| < 3000$

$|y| \geq |z| + 10$

$|x| \geq |y| + 10, |x| \geq |z| + 20$

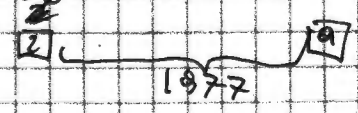
$3|z| + 30 \leq |x| + |y| + |z| < 3000$

$3|z| + 30 < 3000$

$|z| < 990 \Rightarrow |z| \leq 989 \Rightarrow z \geq -989$

Максимальное  $a = 989$ , минимальное  $z = -989$ .

Между  $a$  и  $z$  всего 1977 чисел. Чтобы считать максимально



будем считать, что каждое число занимает 10 мест, свое и еще 9 соседних.



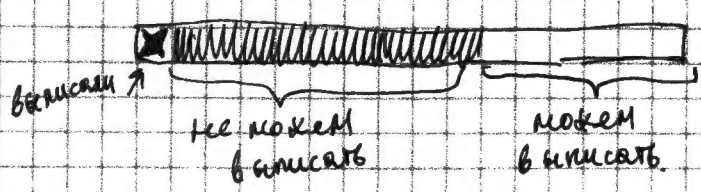
ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

Тогда если какое-то число  $n$  написано на доске, следующие 3 числа после него ( $n+1, n+2, \dots, n+3$ ) на доске быть

выписаны не могут. На доске уже написано число  $z$ , значит, следующие 3 числа после него выписаны быть не могут. ~~Тогда из нашего рассуждения следует~~

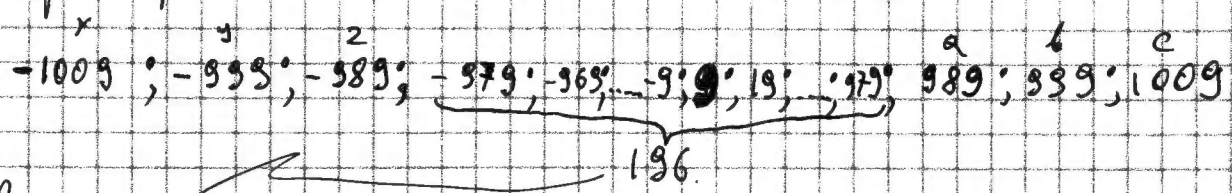
~~было~~ Тогда в нашем распоряжении остается ряд из 1968 чисел, которые могут быть выписаны на доске. На

практике, ~~каждое~~ одно ~~одно~~ ~~одно~~ выписанное число занимает 10 "число-мест", т.е. не даёт следующих 3 числам быть выписанными. Тогда всего мы можем



выписаться максимум  $\frac{1968}{10}$  чисел, из наших 1968, но т.к.  $k$  - целое,  $k \leq 196$ ,  
 $n = k + 6 \leq 202$ .

Пример на 202:



Всего мы взяли 196 чисел, т.к. мы взяли положительные числа, оканчивающиеся на 9, от 1 до 980 (всего их 98), и 98 отрицательных, равных им по модулю.

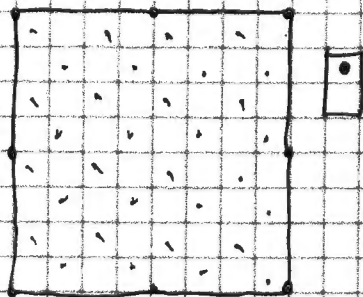
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (1000 - 11)^2 + (1000 - 1)^2 + (1000 + 9)^2 = \\ &= 1000000 - 22000 + 121 + 1000000 - 2000 + 1 + 1000000 + 18000 + 81 \\ &= 3000000 - 6000 + 203 < 3000000 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

9.3



Внешинная стратегия есть у Коля.

В начале игры Коля мысленно "раскрасивает" доску 8x8 в шахматном порядке, а затем ставит свои крестики только в "черные" клетки. Если крестики ~~только~~ Коля только в черных клетках, Дима не может накрыть

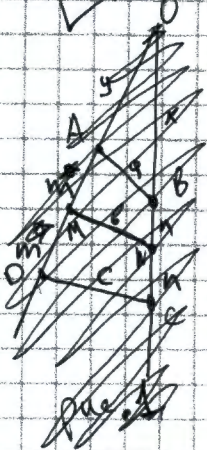
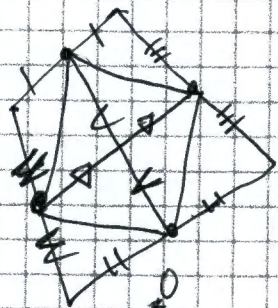
одной доминошкой две клетки с крестиками, т.к. доминошка накрывает черную и белую клетку. Тогда он вынужден искать две свободные соседние клетки. С каждым ходом свободных черных клеток становится на одну меньше (Коля ставит один крестик в черную клетку, Дима накрывает черную и белую клетки доминошкой). Т.к. количество черных клеток четное (32), а значит Дима, последний черную клетку закроет Коля своим крестиком. В этой ситуации Дима ходить не может, т.к. свободных пар соседних клеток не осталось (любые 2 соседние - черная и белая, черные все заняты), и двух соседних крестиков тоже нет, т.к. они все на черных клетках. Тогда Дима проиграл, а Коля выиграл.



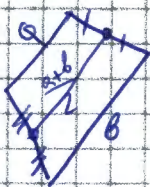
ГАОУ ТО ДНО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

9.5

Известен факт, что ~~соединяя~~ середины сторон произвольного вписанного пятиугольника образуют параллелограмм. Тогда отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, делят друг друга пополам.

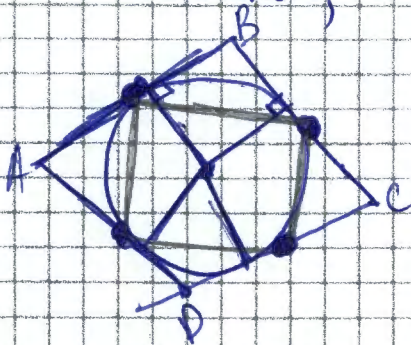


кв. диагональ



на диагональ

Также отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равен половине двух других сторон. Т.к. в описанном пятиугольнике суммы противоположных сторон равны, для него эти отрезки равны. При этом они делят друг друга пополам, значит, середины сторон вписанного пятиугольника образуют параллелограмм с равными диагоналями, т.е. прямоугольник.



Прямоугольник - фигура вписанная. При этом все вершины нашего прямоугольника лежат на вписанной окружности (или на ее границе), т.к. расстояние от центра вписанной окружности до любой точки, лежащей на стороне пятиугольника, не меньше ее радиуса (радиус - величина на сторону параллелограмма). Тогда описанная окружность (или ее часть) нашего прямоугольника вписывает в себя вписанную окружность (т.е.  $\omega$  лежит внутри  $\Omega$ ) или совпадает

нашего прямоугольника вписывает в себя вписанную окружность  $\omega$  (т.е.  $\omega$  лежит внутри  $\Omega$ ) или совпадает с ней



ГАОУ ТО ДНО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

Тогда диаметр  $\omega \geq$  диаметру  $\omega$ ,

А диаметр  $\omega$  равен ~~длине~~ диагонали  
прямоугольника, т.е. отрезку, соединяю-  
щему середины противоположных сторон.

Тогда наш отрезок  $\geq$  диаметру  $\omega$ , т.е.  $d$ .

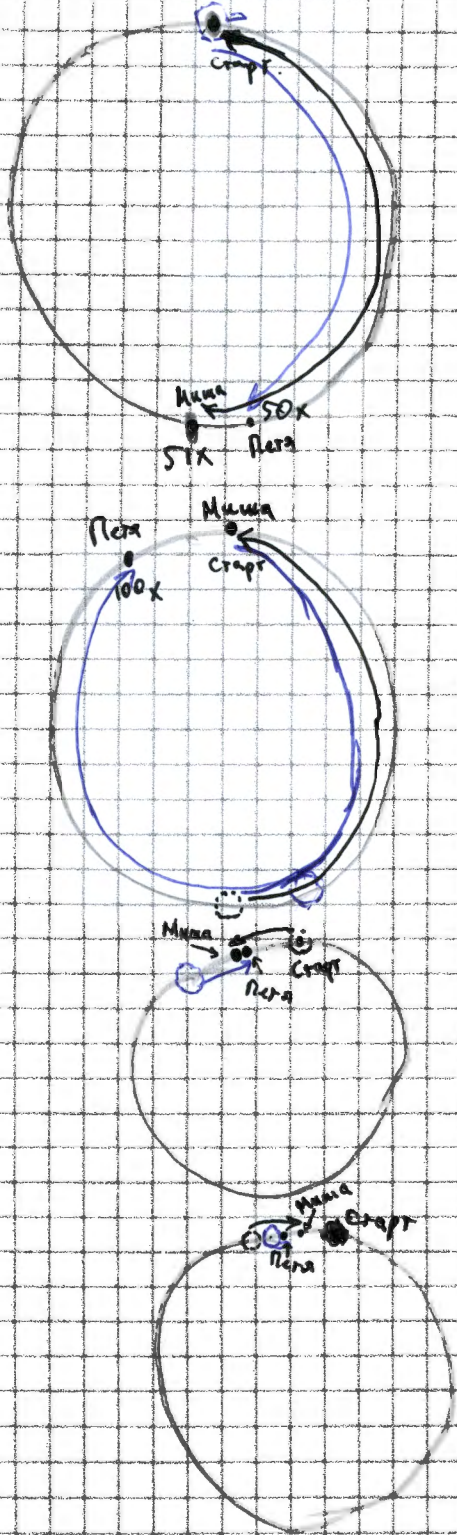
(Равенство достигается в случае, <sup>когда</sup> ~~если~~ ABCD-квадрат  
или прямоугольник, образо-  
ванный серединами  
сторон-квадрат)



ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

6	7	8	9	10	
+	+	-	+	0	$D_{in}$
7	7	0	7	0	21 days

9.6.



Пусть длина <sup>окружности</sup> ~~пути~~ 102x, тогда за то время, за которое Миша пробежит 102x, Петя пробежит 100x.

- Пусть Миша бежит первые колесо (51x) против часовой стрелки, за это время Петя пробегает 50x. На середине Миша разворачивается и бежит к старту, по пути встречая Петю в первый раз.

Когда Миша вернется на старт, Петя пробегает уже 100x. Теперь Миша бежит навстречу Петю, встречается с ним во второй раз и после этой встречи пробегает еще какое-то очень маленькое расстояние ~~пути~~ (достаточно малое, чтобы, пробежав его, развернуться и успеть в третий раз встретиться с Петей, пока он не дошел до места старта).

Таким образом, Миша встречается с Петей трижды, не считая момента старта.





ГАОУТО ДНО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

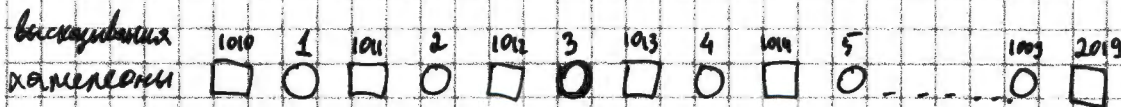
В. 7.

Предположим, что какие-то два изначально зеленых камелона высказались по раз, друг за другом. После высказывания зеленого камелона кол-во зеленых камелонов не изменяется, т.к. зеленые камелоны всегда говорят правду, эти два камелона должны называть одно и то же число, но среди ответов никакое число не повторяется дважды, значит, предположение неверно и зеленые камелоны не высказываются друг за другом.

Выстроим камелонов в ряд в порядке их ответов. Тогда никакие два зеленых камелона не стоят рядом в ряду всего 2019 мест, и между любой парой зеленых камелонов стоит хотя бы один <sup>коричневый</sup> ~~зеленый~~ <sub>изначально</sub>. Тогда наибольшее возможное кол-во изначально зеленых камелонов равно

1010

Пример на 1010



□ - изначально зеленые

○ - изначально ~~зеленые~~ коричневые



Коричневые камелоны называют числа от 1 до 1009 (по одному разу). (и это всегда ложь, т.к. зеленых изначально уже 1010).

Первый зеленый говорит 1010, как и следующий - на 1 больше (т.к. <sup>стоит</sup> перед ним коричневый камелон по зеленым).

Тогда зеленые говорят все числа от 1010 до 2019. но <sup>на</sup> <sub>бульвару</sub> <sup>в</sup> <sub>бульвару</sub>.

Ответ: 1010.



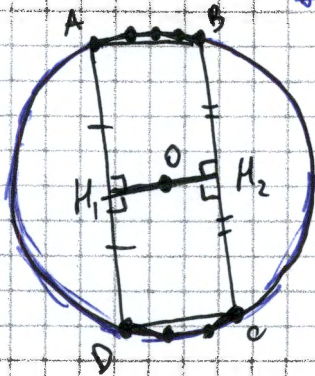
ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

§. 9. Предположим, что хороший многоугольник есть. Пусть наша четная кол-во сторон =  $2k+1$  (оно же равно количеству вершин в каждом многоугольнике).

$2k+1 \geq 5$ , т.к. для треугольников ответ очевидно нет, т.к. нет параллельных сторон.

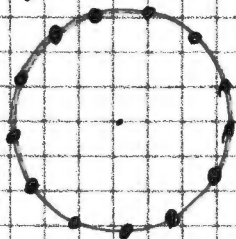
Рассмотрим все стороны наших многоугольников (после разрезания). Каждая из них - либо диагональ (целиком, т.к. диагонали не пересекаются), либо сторона исходного многоугольника. Тогда две параллельные стороны - либо пара диагоналей, либо диагональ и сторона, либо две стороны исходного многоугольника.

Каждая сторона исходного многоугольника является стороной ровно для одного многоугольника. Две диагонали (диагональ и сторона) ст.к. мы разъем по диагонали.



Правильный многоугольник - фигура вписанная, тогда наши диагонали AD и BC хорды в этой окружности. Перпендикуляры из центра делят их пополам, они параллельны (тогда оба перпендикуляра составляют один отрезок). Тогда ABCD - равнобедренная трапеция,  $(AB, H_1 = DC, H_2, H_1)$  и  $AB = CD$ . т.к. она вписанная.

Тогда  $\angle AOB = \angle COD$  и  $\angle OAB = \angle OCD$ . A, B, C и D - вершины



исходного многоугольника. Дуга между соседними вершинами правильного n-угольника =  $\frac{360}{n}$ ; тогда на дугах AOB и AOC

лежит она укладывается одинаковое целое количество раз. Тогда на этих дугах равное количество вершин ~~и у каждого многоугольника~~ и разрезания ~~плетное кол-во вершин.~~

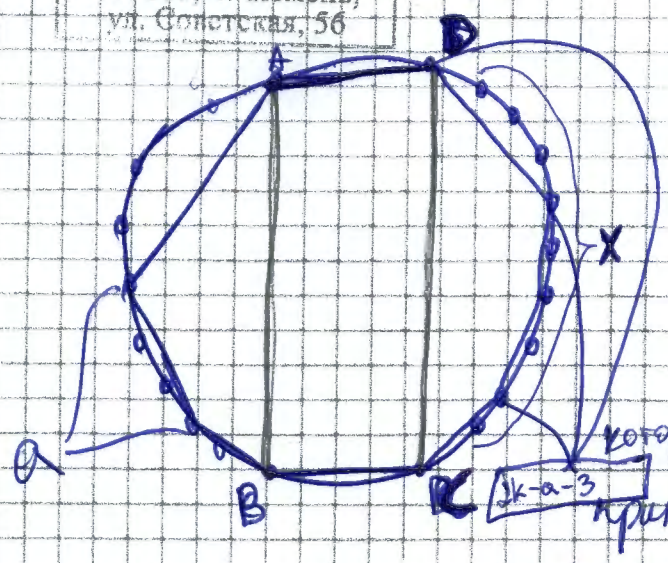
Противоположные. Аналогично разбирается случай, когда параллельные стороны = диагональ и сторона исходного многоугольника. (просто в рассуждениях меняем диагональ AC на сторону BC)



ГАОУТО ДПО ТОБИНРО  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

Вместо двух диагоналей в расщеплении можно подставить диагональ и сторону или две стороны каждого многоугольника без потери смысла решения.

Пусть между точками A и B дуги AB и точками D и E дуги DC лежит по x точек исходного n-угольника. У каждого многоугольника разрезания  $2k+1$  вершина

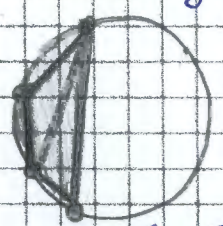


Пусть многоугольнику разрезания, которому принадлежат вершины A, B, C и D, принадлежит также a вершин между точками A и B и  $2k-3-a$  вершин между точками C и D (всего  $4 + a + 2k - 3 - a = 2k + 1$  вершин).

Между точками дуг AB и CD есть диагоналей (иногда они пересекут, как многоугольники).

Теперь рассмотрим все "незаконные" вершины на AB (их  $x-a$ ) и на DC (их  $x+a+3-2k$ ). "Незаконной" называем вершину, которая пока что не принадлежит ни одному из ~~многоугольников~~ изображенных многоугольников разрезания.

Вначале у нас изображен один многоугольник (ему принадлежат параллельные AD и BC). Теперь можно изображать многоугольники разрезания по следующим правилам: выбираем диагональ, которая является стороной только одного из изображенных многоугольников, и изображаем второй многоугольник с этой стороной. Точки V между концами этой диагонали "незаконны", т.к. если они замкнуты, то внутри части круга, которую отсекает эта диагональ, есть многоугольник разрезания.



Но чтобы его изобразить, как нужно было иметь внутри этой области уже проведенную диагональ, которая либо пересекала бы нашу отсекающую диагональ, либо являлась вместе с ней стороной какого-то

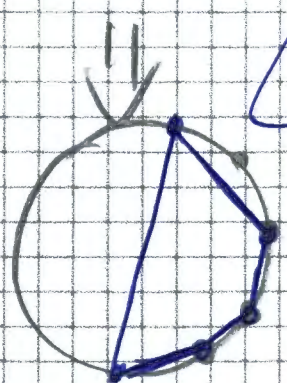
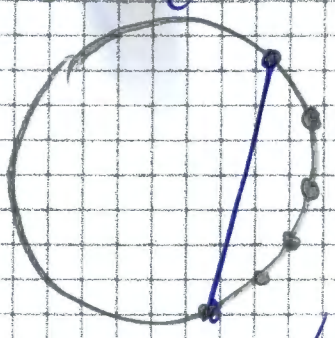
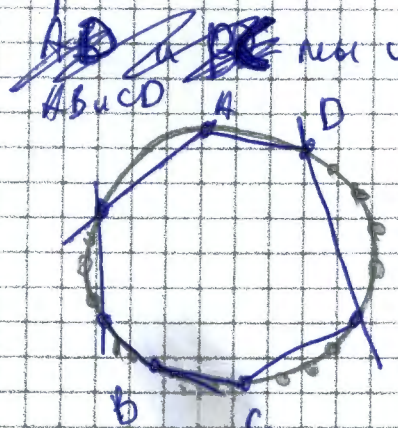
~~Но чтобы его изобразить, как нужно было иметь внутри этой области уже проведенную диагональ, которая либо пересекала бы нашу отсекающую диагональ, либо являлась вместе с ней стороной какого-то~~



ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
625000, г. Тюмень,  
ул. Советская, 56

многоугольника. Но это невозможно при ~~каждом~~ разрезании по углам вехи

прямой. Вначале внутри ~~каждой~~ из ~~дуг~~ дуг мы имеем несколько диагоналей, отска-



ющих дуги из "незаметных" точек, а при добавлении каждого нового многоугольника по прямой мы добавляем новые диагонали, которые внутри каждой из этих дуг отсекают дуги из "незаметных" точек или пустые.

Тогда при добавлении каждого нового  $2k+1$ -угольника мы занимаем  $2k-1$  новых точек.

Всего их на  $AB$   $x-a$ , на  $CD$   $x+a-3-2k$ . В конце разрезания все точки заняты. Тогда:

$$\begin{aligned} x-a & \geq 2k-1 \\ x+a-3-2k & \geq 2k-1 \end{aligned}$$

- т.к мы добавим целое число ~~многоугольников~~ многоугольников.

~~$$x+a-3-2k \geq 0$$~~

$$2k-3-a \geq 0$$

$$2k-3 \geq a$$

$$2k-2 \geq a+1$$

$$2x+3-2k \geq 2k-1$$

$$2x+3-2k+2k-1 \geq 2k-1$$

$$2x+2 \geq 2k-1$$

$$x+1 \geq 2k-1$$

$2k-1$  и  $2$  взаимно просты

$$x+1 - (x-a) = a+1 \geq 2k-1$$

$$a+1 \geq 2k-1$$

(+)

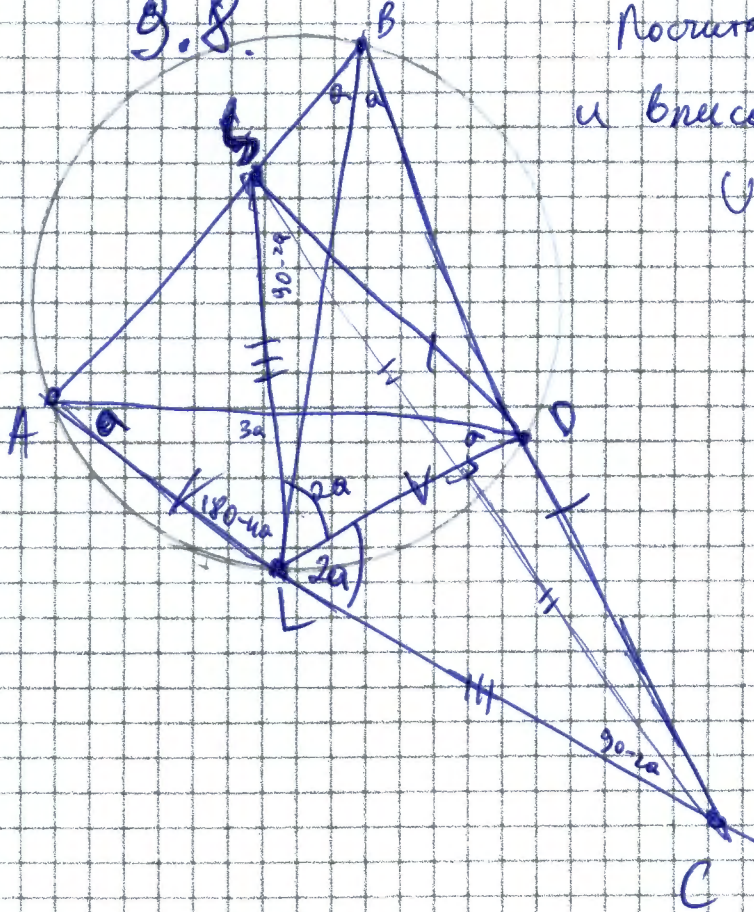
$$a+1 < 2k-1 \Rightarrow a+1=0, \text{ но } a \geq 0 \text{ и } a+1 \geq 1.$$

Противоречие. Значит, предположение о возможности существования



ГАОУТО ДПО «ТОГИРРО»  
 625000, г. Тюмень,  
 ул. Советская, 56

9.8.



Посчитаем углы, пользуясь симметрией  
 и вписанностью  $ABDL$ .

$$\angle A = \angle D$$

$$AS = DS$$

$$BS = CS \text{ (симметрия)}$$

$$CS = CL \text{ (симметрия)}$$