М-11-14

1	2	3	4	5	Σ
6	7	7	0	0	20

№ 11.1

По условию, произведение двух наибольших и двух наименьших равно 77.

$77 = 7 \cdot 11$

Значит такое возможно, если произведение двух наибольших: $(7 \cdot 11)$ или $(1 \cdot 77)$

А двух наименьших: $((-7)\cdot(-11))$ или $(-1)\cdot(-77)$

А если это [illegible] один. числа?

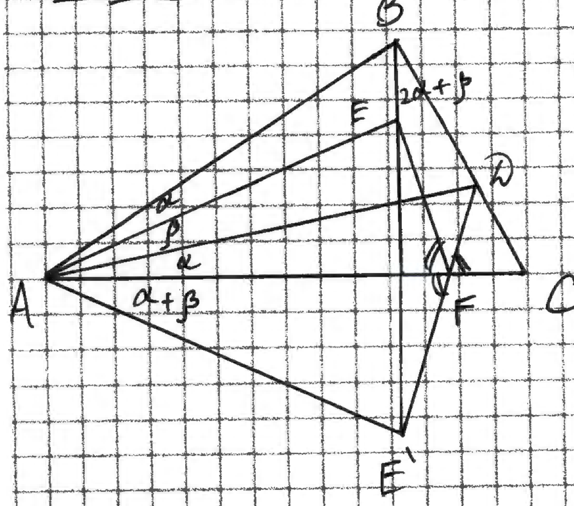
Максимум n − числа членов этой группы − достигается при условии максимума количества чисел между предпоследними с обеих концов этой группы, расставленной по возрастанию.

Это выполнимо если 2 наименьших числа − это (-7) и (-11), а 2 наибольших числа − это 7 и 11.

Тогда n в этом случае равно количеству целых чисел на промежутке $[-7; 7]$, плюс 2 − за (11) и (−11). Тогда $n = 2 + 15 = 17$.

Ответ: $n = 17$

№ 11.3



① Пусть $\angle BAE = \alpha$

$\angle EAD = \beta$

Тогда по условию:

$\angle BAD = \angle EAC$

$\angle BAE + \angle EAD = \angle EAD + \angle DAC$

$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAE = \alpha$

2. $\angle BAC = 90 - \angle BCH = \angle HBC = 2\alpha + \beta$
т.к $\angle BHC$ – прямой.

3. Отразим E – отн-но AC, тогда
$\Delta AEF = \Delta AE'F$
~~По углу~~ $\Rightarrow \angle AFE' = \angle EFA$
По условию: $\angle AFE = \angle DFC$
$\Rightarrow \angle AFE' = \angle DFC$ – вертикальные
$\Rightarrow E', F, D$ – лежат на одной прямой

4. $\angle DAE' = \angle DBE' = 2\alpha + \beta$
($\angle FAE' = \alpha + \beta$ в силу симметрии)
$\Rightarrow ABDE'$ – вписанный четырёхугольник.
$\Rightarrow \angle AE'D = 180° - \angle ABD = 90°$

5. $\Delta AEF = \Delta AE'F$ (по доказанному)
$\Rightarrow \angle AEF = \angle AE'F = 90°$ ■

+

№ 11.2

Поскольку сумма из n чисел равна n^2, можно сделать вывод, что каждая из последовательностей представима в виде:

A: $n+a_1$; $n+a_2$; $n+a_3$; ... ; $n+a_n$.

B: $n+b_1$; $n+b_2$; $n+b_3$; ... ; $n+b_n$.

Где a_i и b_i – отклонения от среднего значения в A и в B соответственно.

При этом:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 0$$

$\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n = 0$ (1)

Заметим, что $\{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n\} \geq -n+1$ т.к n – натуральное.
Пусть в множествах A и B нет таких j и k, что, $a_j = b_k$, тогда все a_i и b_i попарно различны. Поскольку чисел n, то всего a_i и b_i в сумме $2n$ штук.
Расположим все a_i и b_i на промежутке от $-n+1$ до n (в сумме ровно n чисел) в целых значениях. Тогда их сумма будет равна:

$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n = (-n+1) + (-n+2) + \ldots + n = n \neq 0$ (2)

При переносе одного из элементов в сторону больших значений увеличит их сумму, а перенос в сумму меньших невозможен, т.к все числа в A и B - натуральные, значит мы пришли в противоречие между выражениями (1) и (2), значит обязательно ~~в одн и том же множестве~~ найдётся число, которое принадлежит и A, и B.

+

№11.4

p – простое число, большее 3

$\Rightarrow$ $p-1$ чётно.

Тогда y можно представить как:

$$y = \frac{p-1}{2} - n = \frac{p}{2} - \frac{2n+1}{2} \quad (n \geq 0)$$

Тогда:

$$A = py + 1 = p\left(\frac{p}{2} - \frac{2n+1}{2}\right) + 1 = \frac{p^2}{2} - \frac{2n+1}{2}p + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(p^2 - (2n+1)p + 2)$$

Тогда: $D = (2n+1)^2 - 8$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(p - \frac{2n+1-\sqrt{D}}{2}\right)\left(p - \frac{2n+1+\sqrt{D}}{2}\right)$$

Если D – не точный квадрат, то $py+1$ заведомо не представимо в виде произведения двух целых чисел. почему? D нужен для поиска корней!

Если D – точный квадрат, то $n = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot(p-1)(p-2)$$

$(p-2)$ – нечетно, значит если $py+1$ и представимо в виде произведения целых чисел, то одно из них – $\frac{p-1}{2} > y$, а другое $p-2 > y$

Тогда если восприниметь y, как $y = \frac{p}{2} - \frac{2n+1}{2}$ при этом $n \neq 1$, то число не не будет представимо в виде произведения целых чисел, каждое из которых больше y.

M11-17

№11.5

Заметим, что 1 и N^2 не зависимо от взаимного расположения будут ~~бо~~ МАЛЫМ и БОЛЬШИМ соответственно. Тогда для оптимизации ~~выражения~~ значения разности разведём их в противоположные стороны таблицы. Тогда ~~в~~ в одном столбце с 1 можно разместить больше по-настоящему маленьких чисел, а в одной строке с N^2 больше больших.
Далее заполним всю таблицу следующим образом:

1) в нижней строке справа налево внесём числа от N^2 до N^2-N+1

2) Затем поочерёдно сверху вниз слева направо заполним оставшиеся пустые клетки числами от 1 до N^2-N.

Тогда по описанным в условии способам, найдём, что ~~вся~~ ~~вся~~ вся — верхняя строка — это малые числа, а весь правый столбец — это большие числа.

и почему это наим. разность?

Сумма всех малых образует арифметическую прогрессию:

$$S_M = \frac{1+(N^2-2N+2)}{2} N$$

—

M11-17

Сумма всех больших представима в виде:

$$S_Б = N^2 + \frac{(N^2-N)+(N^2-2N+2)}{2}(N-1)$$

Тогда: $S_Б - S_М =$

$$= N^2 + \frac{2N^2-3N+2}{2}(N-1) - \frac{N^2-2N+3}{2}N =$$

$$= N^2 + N^3 - N^2 - \frac{3}{2}N^2 + \frac{3}{2}N + N - 1 - \frac{N^3}{2} - N^2 + \frac{3}{2}N =$$

$$= \frac{N^3}{2} - \frac{5}{2}N^2 + 4N - 1 = \frac{N^3-5N^2+8N-2}{2}$$

Это и будет наименьшей возможной разностью между суммой всех больших и суммой всех малых чисел таблицы.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	1	0	16

№11.6

Пусть:

$f_1(x) = x+1$

$f_2(x) = x^2+1$

$f_3(x) = x^3+1$

$f_4(x) = x^4+1$

Тогда: $g(x) = \cancel{f_2(x) - f_1(x) = x^2+1 - (x}$

$f_1^2(x) - f_2(x) = (x+1)^2 - (x^2+1) =$

$= 2x$

Таким образом, мы получим из имеющихся у нас функций другую, которая удовлетворяет условиям задачи: 1) при $x \geq 0$, $y \geq 0$

2) при $x \leq 0$, $y \leq 0$.

Из неё, в свою очередь можно получить ещё сколь-угодно много функций, также удовлетворяющих условиям задачи. Для этого достаточно возвести в нечётную степень $g(x)$. $g^{2n+1}(x)$ также выполняет условия.

№11.7

Прежде, чем перейти к доказательству, рассмотрим, что мы можем расставить ряд натуральных чисел вплоть до 16, не запутываясь, так, чтобы выполнялось условие задачи для всех степеней двойки, которые можно получить из этих чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

При этом стоит заметить, что вплоть до 2^n, мы не можем однозначно закрасить числа вида 2^{n-1}, потому что ни с одним из чисел на промежутке от 1 до 2^n, кроме его, не дадут в сумме степень двойки.
Далее перейдём к методу математической индукции.
База индукции: До 2^n, при $n = 2, 3, 4$, возможно закрасить все числа двумя цветами так, чтобы никакие 2 одноцветных не давали в сумме степень двойки.
Шаг индукции:
Пусть при n – это верно, а у числа 2^{n-1} при этом определён цвет случайным образом. Нам не важно какого это цвета, так как со всеми числами на промежутке от 1 до 2^n оно не дают в сумме двойку. Тогда для чисел вида $2^n + k$, где $<k<2^{n+1}$, зададим цвет противоположный цвету числа $2^n - k$, тогда для всех чисел от 1 до 2^{n+1} выполнимо утверждение базы (для 2^{n+1} зададим цвет случайным образом)

[redacted]

М11-19

№11.8

Сначала рассмотрим, могут ли одно или оба слагаемых в каждой из сумм быть иррациональными. ~~Нам~~ известно, что сумма чисел a и b — ~~a+b~~ $a+b$ положительное и рациональное.

1) Предположим, что оба они иррациональны, тогда в сумме они будут также иррациональны, за исключением случая, когда $a+b=0$, но тогда это противоречит тому, что их сумма положительна. (Можно показать, что условие $a+b=1$ и $a+b=2$ также невыполнимы)

2) Предположим, что ~~оба~~ одно из них рационально а другое иррационально, но сумма рационального и иррационального чисел, будет иррациональной. Значит каждое из слагаемых в суммах — рационально.

~~Пусть A — сумма~~

Пусть $\sin x + \cos y = p$, $\cos x + \sin y = q$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos y)^2 + (\cos y + \sin x)^2 = p^2 + q^2$$

$$2 + 2(\cos x \sin y + \sin x \cos y) = p^2 + q^2$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) = \frac{p^2+q^2}{2} - 1$$ — ~~рационально~~

$$\frac{p^2+q^2}{2} - 1 \geqslant \frac{(p-q)^2}{2} - 1 \geqslant 0$$

$\Rightarrow \sin(x+y)$ — положительно и рационально.

Отсюда получим, что:

$$2\pi k \leqslant x+y \leqslant \pi + 2\pi k \quad , где\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leqslant \pi + 2\pi k - x \\ y \geqslant 2\pi k - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\sin x \geqslant \cos y} \\ 0 \leqslant \sin x + \cos y \leqslant \cos x + \sin x \\ 0 < \sin y + \cos x \leqslant \cos x - \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \cos x - \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \quad , где\ n \in \mathbb{Z}$$

На этом промежутке:

$$\sin x > |\cos x| > 0.$$

Из условия рациональности $\sin x$ и $\cos x$, их можно представить в виде отношения двух целых чисел, которое можно определить по формуле Евклида: $\sin x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; $\cos x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

В силу вышедоказанного:

$$\sin x > |\cos x|$$

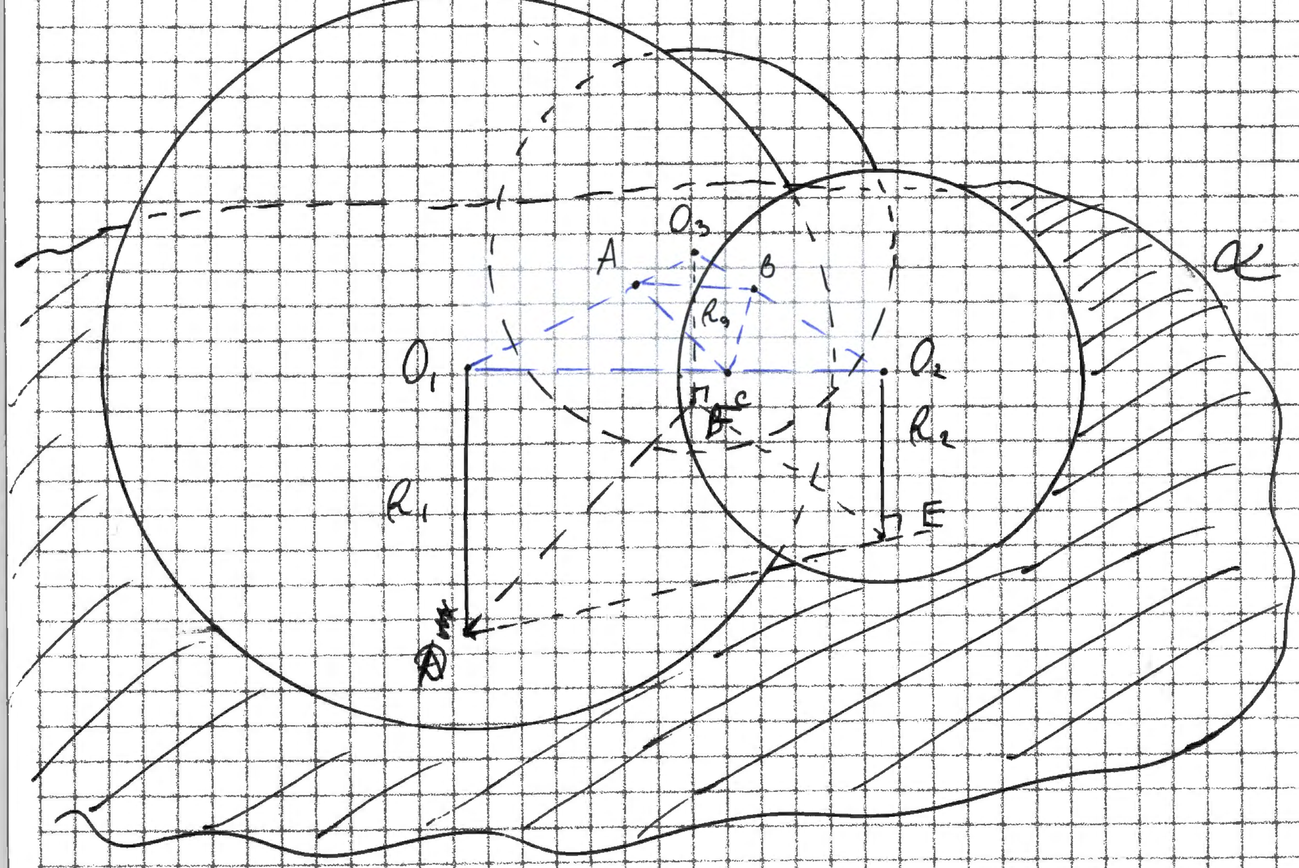
Отсюда получим, что $|a| > |b|$

Тогда, если домножить сумму $\sin x$ и $\cos x$ на a^2+b^2, получим:

$$a^2+b^2(\sin x + \cos x) = a^2 - b^2 + 2ab > 0$$

Т.к. a и b – целые, тогда и это выражение;

№ 11.9



Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер, тогда:

$$\left.\begin{aligned} AO_1 &= O_1C \\ AO_3 &= O_3B \\ BO_2 &= O_2C \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ ~~ABC — вписанная окружность треугольник~~ A,B,C — точки касания вписанной окружности $\triangle O_1O_2O_3$.

А вписанная окр-ть $\triangle ABC$ совпадает с вписанной окруж-тью $\triangle O_1O_2O_3$.

Её радиус найдём, через площадь:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}}$$

где R_1, R_2, R_3 – радиусы окр-тей.

Найдём длины перпендикулярных проекций на плоскость (DEF) сторон $\Delta O_1O_2O_3$. Это и будут стороны ΔDEF, так как окр-ти касаются плоскости α.

$$DF = \sqrt{(R_1+R_3)^2-(R_1-R_3)^2} = 2\sqrt{R_1R_3}$$

$$DE = \sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2} = 2\sqrt{R_1R_2}$$

$$EF = \sqrt{(R_2+R_3)^2-(R_2-R_3)^2} = 2\sqrt{R_2R_3}$$

$$\Rightarrow S_{DEF} = \sqrt{(\sqrt{R_1R_3}+\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3})(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}-\sqrt{R_1R_3})\cdot(\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_2R_3})(\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_2})}$$

~~Применим неравенство Коши о средних для каждой из скобок.~~

$$\sqrt{R_1R_3}+\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3} \geq \sqrt[4]{R_1R_2R_3}\left(\sqrt[4]{R_1}+\sqrt[4]{R_2}+\sqrt[4]{R_3}\right)$$

$$\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_2R_3}-\sqrt{R_1R_3} \geq 2\sqrt[4]{R_2}\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_3} = \sqrt[4]{R_1R_3}\left(2\sqrt[4]{R_2}-\sqrt[4]{R_1R_3}\right)$$

~~Аналогично:~~

$$\sqrt{R_1R_2}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_2R_3} \geq \sqrt[4]{R_2R_3}\left(2\sqrt[4]{R_1}-\sqrt[4]{R_2R_3}\right)$$

$$\sqrt{R_2R_3}+\sqrt{R_1R_3}-\sqrt{R_1R_2} \geq \sqrt[4]{R_1R_2}\left(2\sqrt[4]{R_3}-\sqrt[4]{R_1R_2}\right)$$

М11-19

~~Таким образом:~~

$$\cancel{S_{DEF} \geqslant \sqrt{\sqrt[4]{R_1^3R_2^3R_3^3}\left(\sqrt[4]{R_1}+\sqrt[4]{R_2}+\sqrt[4]{R_3}\right)\left(2\sqrt{R_1}-\sqrt[4]{R_2R_3}\right)\left(2\sqrt{R_2}-\sqrt[4]{R_1R_3}\right)\left(2\sqrt{R_3}-\sqrt[4]{R_1R_2}\right)} = S'}$$

~~Сравним S' и S_A.~~

№11.10

Пусть первое, что спросит Вася – это дважды по „0", тогда он узнает свободные члены Петиных многочленов.

Затем пусть он спросит дважды 1. Тогда он узнает сумму $a+b$ для Петиных многочленов.

После того, пусть он спросит дважды -1. Тогда он узнает $a-b$ Петиных многочленов.

Отсюда можно выразить 4 возможных варианта a и b, а также восемь вариантов записи для двух многочленов.

~~Тогда осталось лишь отсеять ненужные.~~

~~Пусть Вася спросит дважды некоторое число, например 2. Тогда он может отсеять как минимум 4 многочлена, которые~~

Рассчитав для каждого из них нули, абсциссу и ординату, Петя сможет получить

М11-19

ещё по 3-ем значениям нам мономы один из многочленов, то есть $n = 9$.
Предположим, что ~~Петя~~ Вася чего-то не сказал, тогда ему не будет хватать каких-то числовых значений для получения точного результата, ведь заранее мы не знаем в какой из многочленов подставляет числа Петя.

Ответ: $n = 9$.