М11-02

1

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	0	0	21

11.1. Решение:

1) Заметим, что число 77 можно представить в виде произведения 2-х целых чисел 4-мя способами: $7\cdot 11 = 77 = (-7)\cdot(-11) = 77\cdot 1 = (-77)(-1)$

~~рассмотрим [1] и [2]~~

~~2) Если $n > 3$, то 2 наименьших числа -11 и -7, а 2 наибольших 11 и 7 (при $n=2$ наименьшие и наибольшие совпадают, при $n=3$ данное условие не верно).~~

~~3) Пример набора из $n = 17$ чисел:~~

~~-11, ~~-10, -9, -8~~, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11~~

~~Если $n \geq 18$, тогда есть хотя бы одно число a удовлетворяющее одному из условий:~~

~~(1) $a < -11$ - тогда наим. число не $= -11$ ∅~~

~~(2) $a > 11$ - тогда наиб. число не $= 11$ ∅~~

~~(3) $-11 < a < -7$ - тогда 2-ое наим число $\neq -7$ ∅~~

~~(4) $7 < a < 11$ - тогда 2-ое наиб. число $\neq 7$ ∅~~

~~в данном случае чисел не больше 17.~~

2) Т.к. 77 можно представить в виде произв. 2 целых чисел 4-мя способами, то возможны ~~4·3 = 12~~ $4\cdot 4 = 16$ пар $(x, y) - (z, t)$, где x, y - наим. числа, z, t - наиб. числа

наим		наиб	
(1) -11	-7	1	77
(2) -11	-7	7	11
(3) -77	-1	7	11
(4) -77	-1	1	77

Табл. 1.

~~-11 7 -11 7~~

Среди них 4 пары совпадающими наиб. и наим. в этих случ. $n=2$ (т.е. наим $-11, -7$, а наиб. $-11, -7$)

Еще 4 пары $(-77, -1)$, $(-7, -11)$ и $(77, 1)$, $(7, 11)$
$(-7, -11)$, $(-1, -77)$, $(7, 11)$, $(77, 1)$

не удовлетворяют условию, в чем не трудно убедиться.

Оставшиеся 8 пар являются только 4-мя разл. т.к. при подсчете каждая пара $(x, y) - (z, t)$ подсчитана 2 раза как $(x, y) - (z, t)$ и $(z, t) - (x, y)$ см. табл. 1.

Чтобы увеличить n можно добавлять числа только ~~их~~ больше 2-ого наименьшего и меньше 2-ого наиб.

М-11-02 ②

① -11 -7 1 77 Можно добавить только целые числа $-7 > a > 1$, откуда $n \le 11$

② -11 -7 7 11 Можно добавить только целые числа $-7 > a > 7$, откуда $n \le 17$

③ -77 -1 7 71 Можно добавить только целые числа $-1 > a > 7$, откуда $n \le 11$

④ -77 -1 1 77 Можно добавить только целые числа $-1 > a > 1$, откуда $n \le 5$

Из всех этих нер-в получаем, что наибольшее возм. $n = 17$

Пример:

-11 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 11

11.2. Решение:

Пусть $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$, $B = \{b_1; b_2; \dots; b_n\}$, тогда

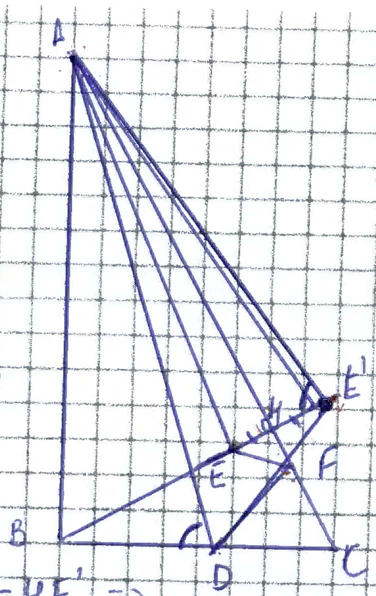
$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \\ b_1 + b_2 + \dots + b_n = n^2 \end{cases}$ Предположим, что все $a_i \ne b_j$ (i от 1 до n и j от 1 до n), тогда

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) \ge (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) + \dots + 2n =$

$= \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n > 2n^2$, но с другой стороны $(a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = 2n^2 \iff 2n^2 > 2n^2$ – противоречие* $\Rightarrow$ т.к. все числа a_i различны и все числа b_i – различны, то найдется такое a_i, что $a_i = b_j \iff$ найдётся такое число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B

* следовательно, все числа различными быть не могут.

Ч. Т. Д.

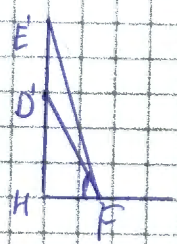


11.3. Решение

1) Продлим BH за точку H и отметим на продолжении точку E' такую, что $EH = E'H$.

2) Рассмотрим $\triangle EAE'$ – $AH \perp EE'$, $EH = HE'$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\triangle EAE'$ – равнобедренный. Аналогично доказывается, что $\triangle EFE'$ – равнобедренный.

3) Докажем, что $BH \cap DF = E'$. Предположим что это не так. Тогда $BH \cap DF = D'$, тогда $\angle HFD' \overset{*}{=} \angle DFC = \angle EFH$ (* как вертикальные), а с другой стороны $\angle EFH = \angle HFE'$, т.к. HF – б в равнобедр. $\triangle EFE'$, т.е. $\angle HFE' = \angle HFD'$, по аксиоме планиметрии от заданного луча (FH) в заданную полуплоскость можно ~~провест~~ отложить только 1 угол заданной градусной меры $\Rightarrow$ лучи FE' и FD' совпадают – это прямая DF, т.к. $BH \cap DF$ – ровно в одной точке (т.к. они не совпадают), то $D' = E'$.



4) ~~AH – б в $\triangle EAE'$, то $\angle EAC =$~~ $\triangle EAE'$ – равнобедр $\Rightarrow \angle E = \angle E' = 90° - \angle EAC$ (из $\triangle EAH$)

$\angle BDA \overset{*}{=} 90° - \angle BAD = 90 - \angle EAC = \angle E'$ (* из $\triangle ABD$) $\Rightarrow$ т.к. точки D и E' лежат в одной полуплоскости от прямой AB, и $\angle BDA = \angle BE'A$, то $ABDE'$ – вписанный $\Rightarrow \angle B + \angle AE'F = 180°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AE'F = 180° - \angle B = 180° - 90° = 90°$

5) $\angle AEF = \angle AE'F$ т.к. $\triangle AEF = \triangle AE'F$ (AF – общая, $AE = AE'$, $EF = FE'$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = 90°$ ч.т.д.

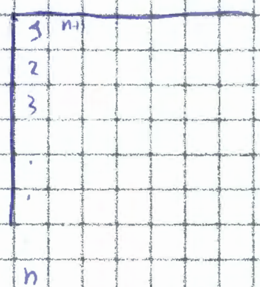
P.S. если $DF \parallel BH$, то $\angle DFC = \angle BHC = 90° = \angle AFE \Rightarrow F, D, E$ лежат на одной прямой, т.к. $\angle AFE + \angle CFD = 180°$, но $E \in BH \nparallel FD$ – противоречие.

11.5. Решение:

1) Переставим в таблице строки местами так, чтобы сверху вниз большие числа увеличивались. Пусть b_i — большее число i-ой (сверху) строки, тогда $b_1 \geq n$, $b_2 \geq 2n$, $b_i \geq in \Rightarrow$
$\Rightarrow b_1+b_2+\ldots+b_n \geq n(1+\ldots+n) = \frac{n^2(n+1)}{2}$

2) Переставим столбцы в таблице местами так, чтобы ~~мен~~ малые числа увеличивались слева направо. Пусть m_i — малое число i-ого столбца слева направо, тогда $m_1 = 1$, $m_2 \leq n+1$, $m_i \leq (i-1)n+1$, тогда $m_1+m_2+\ldots+m_n \leq$
$\leq n+n(1+\ldots+(n-1)) = n+n\cdot\frac{(n-1)n}{2} =$

Пример расстановки чисел.



В первом столбце сверху вниз расставляем числа от 1 до n
Во 2 столбце $n-1$ число от $n+1$ до $2n-1$
В i столбце расставляем числа от самого маленького неиспользованного числа по $n-i-1$ число. и так до последнего числа.
Остальные числа расставляем в строки. В клетке n-ой строки n-ого столбца число n^2
уменьш.

М11-47

1

ГАОУ ТО ДПО «ТОГИРРО»
625000, г. Тюмень,
ул. Советская, 56

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	5	0	~~13~~ 20

11.6. Решение:

Приведем алгоритм получения искомой функции:

1) $(x^3+1)(x+1) = x^4+x^3+x+1$

2) $(x^4+x^3+x+1)-(x^4+1) = x^3+x = x(x^2+1)$

Докажем, что $f(x)=x(x^2+1)$ удовлетворяет условиям:

1) При $x>0$ $f(x)=x(x^2+1)>0 \Rightarrow \forall x>0$ $f(x)>0$

2) При $x<0$ $f(x)=x(x^2+1)<0 \Rightarrow \forall x<0$ $f(x)<0$ +

Таким образом, $f(x)$ удовлетворяет условиям т.к. при $\forall x>0$ $f(x)$ принимает неотрицательные значения, $\forall x<0$ $f(x)$ принимает неположительные значения.

11.7. Решение:

Приведем алгоритм раскраски чисел требуемым образом в цвета a и в:

1) Будем красить все числа $x \underset{4}{\equiv} 1$ в цвет a, а все $x \underset{4}{\equiv} 3$ в цвет в. Заметим, что мы покрасили все нечётные числа. Докажем, что при такой раскраске из одноцветных чисел в сумме нельзя получить степень двойки. $2^n \equiv 0$ (4) при $n>1$ (когда $n=1$, степенью двойки является число 2, которое можно получить только $2=1+1$), тогда $x+y=2^n$ при $x \underset{2}{\equiv} 1$ и $y \underset{2}{\equiv} 1$ только в том случае если $x \underset{4}{\equiv} 1$ и $y \underset{4}{\equiv} 3$ или $x \underset{4}{\equiv} 3$ и $y \underset{4}{\equiv} 1$, но по ~~условия~~ разделению эти числа разноцветные. Очевидно, что все нечетные числа таким образом будут покрашены.

2) Далее для каждого $n>1$ будем красить числа $x \underset{2^n}{\equiv} 2^{n-1}$ в цвета a и в чередуя их, т.е. $2^{n}\cdot(2k-1)+2^{n-1}$ покрасим в цвет a, а $2^{n}\cdot 2k+2^{n-1}$ – в цвет в ($k \geq 1$ и $k \in N$). Докажем, что при данной раскраске будет выполняться условие задачи.

Сложим 2 числа (только что покрашенных) цвета a:

$2^{n}\cdot(2k-1)+2^{n-1}+2^n(2l-1)+2^{n-1} = 2^n(2(k+l)-2)+2^{n} = 2^n(2(k+l)-1) = 2^n \cdot z$, +

... $\Rightarrow$ число $2^n z$ – не является степенью

М11-47

2

двойки. Аналогично сложим 2 только что покрашенных в цвет в числа:

$2^n \cdot 2k + 2^{n-1} + 2^n \cdot 2l + 2^{n-1} = 2^n(2k+2l) + 2^n = 2^n(2k+2l+1) = 2^n \cdot z$, $k \geq 1$, $l \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z > 1$ и $z \underset{2}{\equiv} 1$ $\Rightarrow$ $2^n z$ - не явл. степенью двойки.

Проводим данную операцию последовательно для всех $n > 1$

Покажем, что используя данный алгоритм можно покрасить все натуральные числа. Заметим, что все нечетные числа, и все степени двойки покрашены. Тогда рассмотрим незакрашенное число. ~~Рассмотрим это число по модулю 2^n, где $2^n > x$ (x - незакрашенное число), тогда $x = 2^k($~~

Пусть это число $x \overset{*}{=} 2^k(2l+1)$, тогда $x = 2^{k+1} \cdot l + 2^k$, т.е.

$x \underset{2^{k+1}}{\equiv} 2^k$ $\Rightarrow$ по условию применения раскраски x должно быть

покрашено - противоречие $\Rightarrow$ все числа покрашены

(*) 2^k - максимальная степень двойки, содержащаяся в числе x, $2l+1$ - нечетное число, большее 1, т.к. иначе либо k - не максимальная степень, что противоречит выбору k, либо x - степень двойки, что также не возможно.

Таким образом, мы привели алгоритм раскраски требуемым в задаче образом и доказали, что покрашены будут все числа.

Ответ: можно.

11.8. Решение:

1) Пусть $\sin x + \cos y = \frac{a}{b} > 0$ и $\sin y + \cos x = \frac{c}{d} > 0$, тогда

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x \cos y = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \sin^2 y + \cos^2 x + 2\sin y \cos x = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \end{cases}$$ + (a, b, c, d - натуральные числа)

$2 + 2\sin(x+y) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2$

$\sin(x+y) = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 - 2}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin(x+y)$ - рациональное число

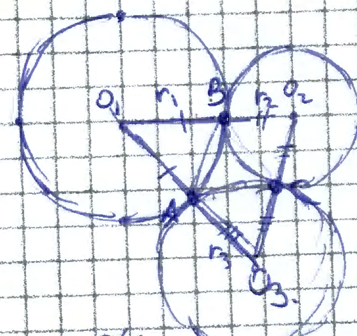
М11-47

3

11.9. Решение:

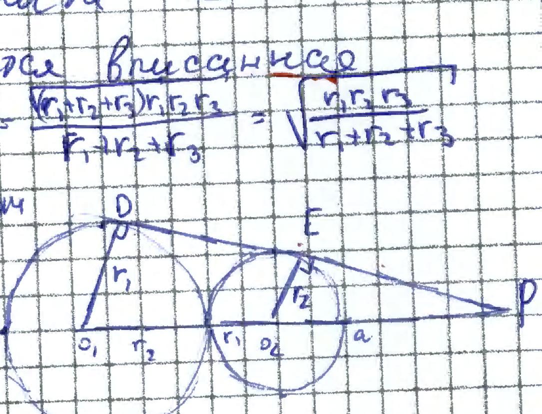
1) Заметим, что центры 2х окружностей и точка их касания лежат на одной прямой. Т.к. через ~~все~~ 3 точки можно построить плоскость, проведем плоскость через O_1, O_2, O_3 - центры сфер.

т.к. точки касания лежат на отрезках м/у центрами окр., то точки A, B, C - лежат на сторонах $\triangle O_1O_2O_3$. Заметим, что $O_1B = O_1A = r_1$, $O_2B = O_2C = r_2$, $O_3C = O_3A = r_3$ => точки A, B, C - точки касания вписанной в $\triangle O_1O_2O_3$ окружности



=> описанной окружностью $\triangle ABC$ является вписанная окружность $\triangle O_1O_2O_3$, откуда $R_{опис} = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(r_1+r_2+r_3)r_1r_2r_3}}{r_1+r_2+r_3} = \sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}}$

2) Пусть D - точка касания ~~окр.~~ сферы с радиусом r_1 и ~~сф~~ плоскости α, E - точка касания сферы с радиусом r_2. Если $r_1 \neq r_2$, то $DE \cap O_1O_2 = P$ (т.к. $O_1D \parallel EO_2$ - то O_1, O_2, D, E - лежат в одной плоскости) Пусть $r_1 > r_2$, тогда $\triangle O_2PE \sim \triangle O_1PD$ ($\angle D = \angle E$



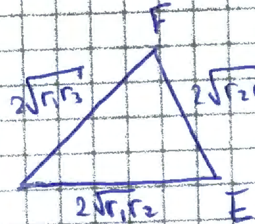
$\frac{a}{a+r_1+r_2}=\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow ar_1 = ar_2 + r_2(r_1+r_2) \Rightarrow a=\frac{r_2(r_1+r_2)}{r_1-r_2} \Rightarrow O_2P=\frac{r_2(r_1+r_2)}{r_1-r_2}$

$EP=\sqrt{PO_2^2-EO_2^2}=\sqrt{r_2^2\left(\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2}{(r_1-r_2)^2}-1\right)}=\frac{r_2}{r_1-r_2}\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2-r_1^2-r_2^2+2r_1r_2}=$

$=\frac{2\sqrt{r_1r_2}\cdot r_2}{r_1-r_2}$. (по т. Пифагора для $\triangle EPO_2$)

по т. Фалеса $\frac{DE}{EP}=\frac{O_1O_2}{O_2P} \Rightarrow DE=\frac{EP\cdot O_1O_2}{O_2P}=\frac{2\sqrt{r_1r_2}\cdot r_2\cdot(r_1+r_2)(r_1-r_2)}{(r_1-r_2)\cdot r_2(r_1+r_2)}=$

$=2\sqrt{r_1r_2}$, аналогично $DF=2\sqrt{r_1r_3}$, $FE=2\sqrt{r_2r_3}$



$R_{\triangle DEF}=\frac{abc}{4S}=\frac{8r_1r_2r_3}{4S}=\frac{2r_1r_2r_3}{S}$

Заметим, что $\begin{cases} r_1+r_2 \geq 2\sqrt{r_1r_2} \\ r_2+r_3 \geq 2\sqrt{r_2r_3} \\ r_1+r_3 \geq 2\sqrt{r_1r_3} \end{cases} \Rightarrow$ стороны $\triangle ABC$ больше сторон $\triangle FDE \Rightarrow S_{ABC} > S_{FDE}$ почему?

$R_{DEF}=\frac{r_1r_2r_3}{S_{DEF}} > \frac{r_1r_2r_3}{S_{ABC}} \overset{*}{=} \frac{S_{ABC}}{r_1+r_2+r_3}=R_{ABC}$ $O_1O_2O_3$

* $r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)=S_{ABC}^2$ из формулы Герона

$\Downarrow$

$R_{DEF}>R_{ABC}$ Ч.Т.Д.

11.10. Решение:

Покажем, что за $n \leq 5$ ходов нельзя определить многочлен.

1) Пусть $f(x)=const=t$, тогда за n ходов меньше 5 точек на прямой $y=t$ $\rightarrow$