M11-07

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	0	2	16

№11.1 $77 = 7\cdot 11 = 77\cdot 1 = -7\cdot(-11) = -77\cdot(-1)$

Пусть два наиб. числа - это a и b, где $a > b$, а два наим - это c и d, где $d<c$. для a и b существует 4 варианта, перечисленных выше.

1) $a=11$, $b=7$, тогда c и d могут быть: 1.1) $c=11$, $d=7 \to n=2$ (здесь и далее n = макс)

1.2) $c=77$, $d=1 \to \varnothing$

1.3) $c=-7$, $d=-11 \to n=17$

$(11, 7, 6, 5, 4, \ldots, -4, -5, -6, -7, -11)$

1.4) $c=-1$, $d=-77 \to n=11$

$(11, 7, 6, 5, \ldots 0, -1, -77)$

2) $a=77$ $b=1$ $\to$ c и d: 2.1) $c=11$, $d=7 \to \varnothing$

2.2) $c=77$, $d=1 \to n=2$

2.3) $c=-7$, $d=-11 \to n=11$

$(77, 1, 0, -1, \ldots, -6, -7, -11)$

2.4) $c=-1$, $d=-77 \to n=5$

$(77, 1, 0, -1, -77)$

3) $a=-7$, $b=-11 \to$ c и d: 3.1) $c=11$, $d=7 \to \varnothing$

3.2) $c=77$, $d=1 \to \varnothing$

3.3) $c=-7$, $d=-11 \to n=2$

3.4) $c=-1$, $d=-77 \to \varnothing$

4) $a=-1$, $b=-77 \to$ c и d: 4.1) $c=11$, $d=7 \to \varnothing$

4.2) $c=77$, $d=1 \to \varnothing$

4.3) $c=-7$, $d=-11 \to \varnothing$

4.4) $c=-1$, $d=-77 \to n=2$

Ответ: макс $n = 17$

№11.2 Предположим, что такого числа нет.

Тогда: $a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n = n^2+n^2$ $(a_i \neq b_j,\ 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n,\ i\in\mathbb{Z},\ j\in\mathbb{Z})$

$a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n = 2n^2$

т.к. все слагаемые ~~сл~~ в левой части ур-я различные (по предположению) и натуральные, то минимальной будет сумма от 1 до $2n$, которая равна:

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{4n^2+2n}{2} = 2n^2+n > 2n^2$$, следовательно хотя бы одна пара слагаемых равна, но по условию $a_i \neq a_j$ при $i\neq j$ и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$, тогда есть хотя бы одна пара i, j, что $a_i = b_j$, ч.т.д.

№11.5 расположение:

$$\begin{matrix} 1 & & \\ 2 & n+1 & \\ \vdots & n+2 & 2n \ \ldots \\ n & 2n-1 & 3n-3 \ \ldots \end{matrix}$$

для 3:

$$\begin{matrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{matrix}$$

для 4:

$$\begin{matrix} 1 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 5 & 12 & 13 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{matrix}$$

и т.д.

Тогда разность сумм будет равна: $\sum_{k=1}^{n}(k^2) - n$

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	7	0	21

№11.6 Введу обозначения. Пусть число, обведённое в окружность, справа от функции, её номер, тогда ⓐ·ⓑ – произведение функций с номерами a и b, а ⓐ – ⓑ – разность функций с номерами a и b.

$x+1$ ①

x^2+1 ②

x^3+1 ③

x^4+1 ④

1) ②·③ $\to (x^2+1)(x^3+1) = x^5+x^3+x^2+1$ ⑤

2) ⑤–② $\to x^5+x^3+x^2+1-x^2-1 = x^5+x^3$ ⑥

3) ⑤–③ $\to x^5+x^3+x^2+1-x^3-1 = x^5+x^2$ ⑦

4) ⑥–⑦ $\to x^5+x^3-x^5-x^2 = x^3-x^2$ ⑧

5) ⑧–② $\to x^3-x^2-x^2-1 = x^3-2x^2-1$ ⑨

6) ①·④ $\to (x^4+1)(x+1) = x^5+x^4+x+1$ ⑩

7) ⑩–① $\to x^5+x^4+x+1-x-1 = x^5+x^4$ ⑪

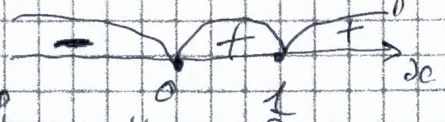
8) ⑩–④ $\to x^5+x^4+x+1-x^4-1 = x^5+x$ ⑫

9) ⑪–⑫ $\to x^5+x^4-x^5-x = x^4-x$ ⑬

10) ⑬–④ $\to x^4-x-x^4-1 = -x-1$ ⑭

11) ⑨–⑭ $\to x^3-2x^2-1+x+1 = x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$ ⑮

Функция номер 15 и будет искомой, т.к. при $x<0$ функция принимает не положительные значения, а при $x>0$ неотрицательные.



№11.7 Можно. Раскрашу числа $a_i \equiv 1 \pmod 4$ в один цвет, а числа $a_i \equiv 3 \pmod 4$ в другой. Из суммы двух различных натуральных чисел наименьшая степень двойки, которую можно получить – 4, т.к. мин сумма двух различных натуральных чисел $1+2=3$. Тогда замечу, что при сумме чёт и нечёт числа получится нечёт число, следовательно нечёт числа и чёт. можно рассматривать раздельно. Тогда нечёт. числа можно распределить так, как написано выше, т.к. сумма 2х чисел, остаток от деления каждого от которых на 4 равен 1 не будет делиться на 4, а все степени двойки больше первой делятся на 4, аналогично для чисел с остатками 3.

Тогда осталось распределить чётные числа.

Покрашу в один цвет числа вида $2^k + 2^{k+2} \cdot t$, где $t \in \mathbb{Z}, t \geq 0, k \in \mathbb{N}$

Во второй цвет покрашу числа вида $2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} t$, где $t \in \mathbb{Z}, t \geq 0, k \in \mathbb{N}$

Факт первый: сумма двух чисел одинакового вида не является степенью двойки.

Д-во: сумма двух чисел первого вида:

$$2^k + 2^{k+2} \cdot t_1 + 2^k + 2^{k+2} t_2 = 2^{k+1} + 2^{k+2}(t_1 + t_2), \text{ где } (t_1+t_2) \in \mathbb{N}$$ \ не ст. 2

или: $2^k + 2^{k+2} t_1 + 2^l + 2^{l+2} t_2$ – не ст. 2 ?

сумма двух чисел второго вида:

$$2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} t_1 + 2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} t_2 = 2^{k+1} + 2^{k+2}(t_1 + t_2 + 1), \ (t_1 + t_2 + 1) \in \mathbb{N}$$ \ не ст. 2

или: $2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} \cdot t_1 + 2^l + 2^{l+1} + 2^{l+2} \cdot t_2$ – не ст. 2 ?

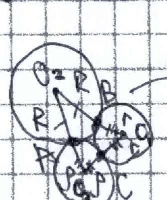
Факт второй: Все чётные числа можно представить в одном из этих двух видов.

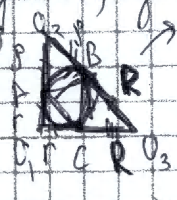
Замечу, что числа первого и второго видов есть ни что иное, как числа $a_i \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$ (ни одно $a_i = 2^k$) ? на все чётные числа $b_i \equiv 2^k \pmod{2^l}$ (ни одно $b_i = 2^k$), где $l > k$, $b_i \leq 2^l$ для каждого числа $k = const \rightarrow b_i \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$, и $b_i \equiv 2^k \pmod{2^{k+2}}$ и т.д., пока $b < 2^l$

~~т.к. k в формуле может быть, то $b_i = 2^k \rightarrow$~~

Всё. Были покрашены все натуральные числа и сумма любых двух чисел одного цвета не равна степени двойки, значит такое возможно.

№11.9.





1) → ABC – вписан. окр. в $O_1O_2O_3$ с радиусом r_0.

$$S_{\triangle O_1O_2O_3} = p r_0 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r_0 = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{(R+r+\rho)Rr\rho}}{R+r+\rho}$$

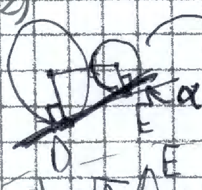
$p = R+\rho+r$

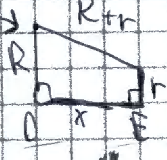
$a = R+\rho$

$b = R+r$

$c = r+\rho$.

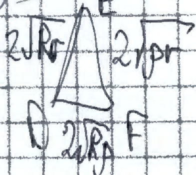
2)





$$x = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$ аналогично для EF и DF

3)



4) $$S_{\triangle DEF} = \frac{abc}{4R_0} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow R_0 = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$p = \sqrt{rR} + \sqrt{\rho R} + \sqrt{\rho r}$

$a = 2\sqrt{rR}$

$b = 2\sqrt{\rho R}$

$c = 2\sqrt{r\rho}$

5) $$R_0 = \frac{8R\rho r}{4\sqrt{-(R^2r^2 + R^2\rho^2 + \rho^2 r^2) + 2(R^2 r\rho + r^2 R\rho + \rho^2 Rr)}}$$

б) Нужно было доказать, что $R_0 > r_0$.

$$\frac{2Rr\rho}{\sqrt{-(R^2r^2+R^2\rho^2+r^2\rho^2)+2(R^2\rho r+\rho^2Rr+r^2R\rho)}} > \frac{\sqrt{(R+r+\rho)Rr\rho}}{R+r+\rho}$$

$$\underbrace{R>0,\ \rho>0,\ r>0}_{\Downarrow}$$

можно домножать и возводить в квадрат без изменения знака неравенства

$$\frac{2Rr\rho(R+r+\rho)}{\sqrt{Rr\rho(R+r+\rho)}} > \sqrt{-(R^2r^2+R^2\rho^2+r^2\rho^2)+2(R^2r\rho+r^2R\rho+\rho^2Rr)}$$

$$4Rr\rho(R+r+\rho) > 2(R^2r\rho+r^2R\rho+\rho^2Rr)-(R^2r^2+R^2\rho^2+r^2\rho^2)$$

$$4R^2r\rho+4r^2R\rho+4\rho^2Rr-2R^2r\rho-2r^2R\rho-2\rho^2Rr > -(R^2r^2+R^2\rho^2+r^2\rho^2)$$

$$\underbrace{B=2(R^2r\rho+r^2R\rho+\rho^2Rr)}_{B>0} > \underbrace{-(R^2r^2+R^2\rho^2+r^2\rho^2)=A}_{A<0}$$

$$\Downarrow$$

$B>A$, Ч.Т.Д.