11-11-14

1

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

ГАОУ ТО ДПО «ТОГИРРО»
625000, г. Тюмень,
ул. Советская, 56

№ 11.1.

Существует 4 способа представить 77 в виде произведения двух целых чисел:

$$77 = \begin{cases} 7 \cdot 11 \\ (-7)\cdot(-11) \\ 1 \cdot 77 \\ (-1)\cdot(-77) \end{cases}.$$

1) Заметим, что положительных чисел среди данных n не больше 8;

если 2 наибольших 7 и 11, то кроме них положительные могут быть только числа от 1 до 6.

если 2 наибольших 1 и 77, то кроме них нет положительных чисел.

если 2 наибольших -7 и -11 или -1 и -77, то положительных нет.

2) Аналогично, отрицательных чисел не больше 8;

если 2 наименьших -7 и -11, то кроме них могут быть отрицательные только числа от -6 до -1.

если 2 наименьших -1 и -77, то кроме них нет отрицательных чисел.

если 2 наименьших 7 и 11 или 1 и 77, то отрицательных нет.

3) Значит, $n \le 17$ (≤ 8 положительных, ≤ 8 отрицательных, и 0).

Пример: -11; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11.

+

Ответ: n = 17.

М11-14

№ 11.2.

Предположим противное.

Пусть C – объединение множеств A и B.

Пусть S_c – сумма чисел, из которых состоит C.

По условию, $S_c = 2n^2$.

C состоит из $2n$ различных чисел (натуральных), значит,

$$2n^2 = S_c \geqslant 1 + 2 + \ldots + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n.$$

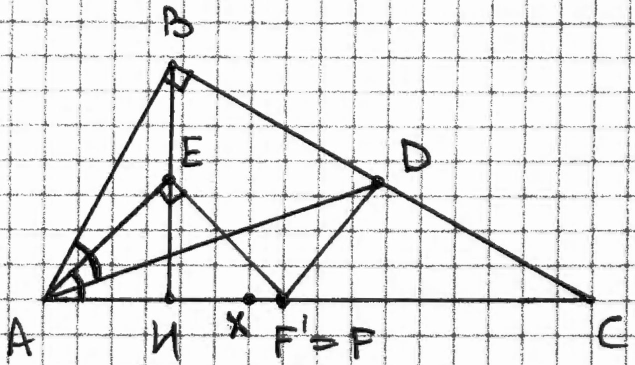
Получили $2n^2 \geqslant 2n^2 + n$, противоречие.

Значит, предположение неверно,

и найдется число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

Ч. Т. Д.

+



N11.3.

① Отметим точку F' на AC такую, что $\angle AEF' = 90°$.
(такая существует, т.к. $AE \not\perp AC$).

② $\triangle ABD \sim \triangle AEF'$ ($\angle ABD = \angle AEF'$, $\angle BAD = \angle CAE = \angle EAF'$).

Из этого следует, что $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF'}$.

③ т.к. $\angle BAD = \angle CAE$, то $\angle F'AD = \angle EAB$.

④ $\triangle ABE \sim \triangle ADF'$ ($\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF'}$, $\angle EAB = \angle F'AD$).

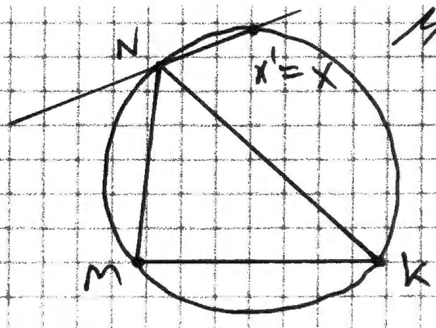
Из этого следует, что $\angle AEB = \angle AF'D$, откуда ~~180 - ∠AEB =~~ $\angle AEИ = 180 - \angle AEB = 180 - \angle AF'D = \angle CF'D$.

⑤ $\angle AEИ = \angle AF'E$ ($\triangle AEИ \sim \triangle AF'E$, т.к. $\angle AИE = \angle AEF'$, $\angle ИAE = \angle EAF'$).

Значит, $\angle AF'E = \angle CF'D$.

⑥ Покажем, что $F' = F$.

Лемма. Если в $\triangle MNK$ точка X – пересечение сер. перпендикуляра к MK и внешней биссектрисы $\angle MNK$, то X лежит на опис. окр. $\triangle MNK$.



Док-во: Пусть опис. окр. $\triangle MNK$ пересекает ~~внутр.~~ внешнего биссектрису $\angle MNK$ в точке X' (вторично).

Тогда, как известно, $MX' = KX'$.

Значит X' лежит также и на серпере к MK, $X' = X$.

Если повторного пересечения нет, то есть внешняя биссектриса касается окружности, $\triangle MNK$ — равнобедренный, и $N = X$.

Лемма доказана.

Переходим к решению задачи.

Пусть X — пересечение AC и серпера к ED.

Если $X \neq F$, $X \neq F'$, то по лемме, F и F' лежат на окружности EXD. +

Тогда $F = F'$ (иначе у окружности и прямой 3 точки пересечения).

Если X совпало с одной из точек F, F' — не умоляя общности, с F, — тогда $\triangle EFD$ — равнобедр., $\Rightarrow AC \parallel ED$. Так как в $\triangle EF'D$ $ED \parallel$ внешней биссектрисе $\angle EF'D$, то $\triangle EF'D$ также равнобедр., и $F = X = F'$. ЧТД.

Примечание: т.к. $EИ$ — высота из прямого угла $\triangle AEF'$, то $И$ лежит на отрезке AF', то есть, определяемая точка F' лежит на ~~[illegible]~~ луче $ИC$. $\angle AEB \geq 90^\circ$, $\Rightarrow AE < AB$. Тогда и $AF' < AD$ (из подобия $\triangle EAB$ и $\triangle F'AD$), $AD < AC$, $\Rightarrow AF' < AC$, $F' \in$ отрезку $ИC$.

№ 11.4.

1) Рассмотрим произвольный $y \in \mathbb{N}$, $y \in [1; \frac{p-1}{2}]$.
Пусть нашлись $a, b \in \mathbb{N}$; $a, b > y$:
$ab = py+1$.
Тогда: $b = \frac{py+1}{a} > y$; $py+1 > ay$.
Поделим на y, $p + \frac{1}{y} > a$, $\Rightarrow p \geq a$.
Аналогично, $p \geq b$.
Так как $(py+1) \not\vdots\, p$, то $a, b < p$.
Заметим, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$.

2) Найдем кол-во пар $a, b \in \mathbb{N}$; $a, b < p$:
$ab \underset{p}{\equiv} 1$. (пары a, b и b, a – одно и то же).

1) $a = b = 1$
2) $a = b = p-1$.
(если одно из a, b единица, то и другое; если одно из a, b $= p-1$, то и другое).

3) для $a \in [2; p-2]$, $a^2 \underset{p}{\not\equiv} 1$, и для такого a существует ровно не больше одного b такого, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$, $b \in [2; p-2]$.
(Пусть $ab_1 \underset{p}{\equiv} 1$; $ab_2 \underset{p}{\equiv} 1$; $\Rightarrow$
$\Rightarrow a(b_1 - b_2) \vdots\, p \Rightarrow (b_1 - b_2) \vdots\, p \Rightarrow$
$b_1 = b_2$).
Значит, пар a, b где ~~...~~ $a, b \in [2; p-2]$, ровно не больше $\frac{p-3}{2}$.

Значит, всего различных пар a, b $\left| \begin{array}{l} a, b < p \\ ; \end{array} \right.$ $ab \underset{p}{\equiv} 1$, не больше $\frac{p+1}{2}$.

Однако, при $a = b = 1$ $ab = 1 \neq py+1$ при $y \in \mathbb{N}$.

при $a = b = p-1$ $ab = (p-1)^2 = py+1$ только при $y = p-2 > \frac{p}{2}$.

Значит, пар $a, b \in \mathbb{N}$; $a, b < p$; таких, что $ab = py+1$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$, не больше $\frac{p-3}{2}$.

3) Пусть утверждение задачи неверно, и такого y не найдется.
Тогда для любого значения y от 1 до $\frac{p-1}{2}$ найдется пара $a, b \in \mathbb{N}$; $a, b < p$: $ab = py+1$.
Значит, таких пар хотя бы $\frac{p-1}{2}$ (y принимает столько значений).
Противоречие, $\frac{p-1}{2} > \frac{p-3}{2}$.

+

Значит, утверждение задачи верно, и такой y найдется.

Ч. Т. Д.

№ 11.5.

Ответ: $\frac{(N-1)(N^2+2)}{2}$

Пример:

В первом столбце поставим числа от 1 до N (сверху вниз).

В оставшихся клетках 1 строки поставим числа от N+1 до 2N-1 (слева на право).

В оставшихся клетках 2 строки поставим числа ~~от~~ от 2N до 3N-2 (слева на право), и т.д., ~~ставим оставшиеся числа слева на право в след. строке по порядку~~ ставим оставшиеся числа по порядку в оставшихся строках. (слева направо)

Тогда Σ малых $= 1 + (N+1) + (N+2) + \ldots + (2N-1))$.

Σ больших $= (2N-1) + (3N-2) + (4N-3) + \ldots + ((N+1)N - N)$.

Σ малых $= 1 + \frac{(N-1)\cdot 3N}{2}$.

Σ больших $= N(2+\ldots+(N+1)) - (1+\ldots+N) = \frac{N^2(N+3)}{2} - \frac{N(N+1)}{2}$

Искомая разность $= \frac{N}{2}\left(N(N+3) - (N+1) - 3(N-1)\right) - 1 =$

$= \frac{N}{2}\left(N^2 + \cancel{3N} - N - 1 - \cancel{3N} + 3\right) - 1 = \frac{N(N^2-N+2)}{2} - 1 =$

$= \frac{N^2(N-1) + 2(N-1)}{2} = \frac{(N-1)(N^2+2)}{2}$.

~~контр.~~ пример не [illegible] нашл.

Примеры для $n=2,3,4,5$:

1	3
2	4

1	4	5
2	6	7
3	8	9

1	5	6	7
2	8	9	10
3	11	12	13
4	14	15	16

1	6	7	8	9
2	10	11	12	13
3	14	15	16	17
4	18	19	20	21
5	22	23	24	25

М111-15

6	7	8	9	10	Σ
7	7	7	7	5	33

№ 11.6.

1) $(x^4+1)-(x^2+1)=x^2(x^2-1)$

2) $(x^3+1)-(x+1)=x(x^2-1)$

3) $x^2(x^2-1)\cdot x(x^2-1)=x^3(x^2-1)^2=f(x)$

Заметим, что $f(x)$ удовлетворяет условию

$\left((x^2-1)^2\geq 0,\quad x^3\geq 0 \text{ при } x\geq 0,\quad x^3\leq 0 \text{ при } x\leq 0\right)$.

№ 11.7.

Ответ: да.

Пример:

Все числа вида $2^\alpha(4k+1)$, где $\alpha, k\in\mathbb{Z}$, $\alpha, k\geq 0$, покрасим в 1 цвет.
Все остальные (то есть вида $2^\alpha(4k+3)$) — во 2 цвет.

1) Заметим, что все натуральные числа покрашены.

2) Если сумма 2-х чисел — степень двойки, то двойка входит в одинаковой степени в эти два числа

(пусть нет, $2^\alpha\cdot n+2^\beta\cdot m=2^\gamma$, $m, n \not\vdots\, 2$, $\alpha>\beta$,
$2^\beta(2^{\alpha-\beta}n+~~m~~\,m)=2^\gamma$, $2^{\alpha-\beta}n+m$ — нечетно, >1, противоречие).

3) Заметим, что двойку нельзя представить в виде суммы 2-х различных чисел

М11-15

3) Покажем, что другие ст. двойки получить нельзя.

а) Пусть $2^{\beta} = 2^{\alpha}(4k_1+1) + 2^{\alpha}(4k_2+1)$;

$2^{\beta} = 2^{\alpha}(4(k_1+k_2)+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(k_1+k_2)+2$ – ст. двойки, что возможно лишь при $k_1 = k_2 = 0$ (т.к. $4(k_1+k_2)+2 \equiv_4 2$)

но тогда $2^{\alpha}(4k_1+1) = 2^{\alpha}(4k_2+1)$, противоречие.

б) Пусть $2^{\beta} = 2^{\alpha}(4k_1+3) + 2^{\alpha}(4k_2+3)$;

$2^{\beta} = 2^{\alpha}(4(k_1+k_2)+6) \Rightarrow$

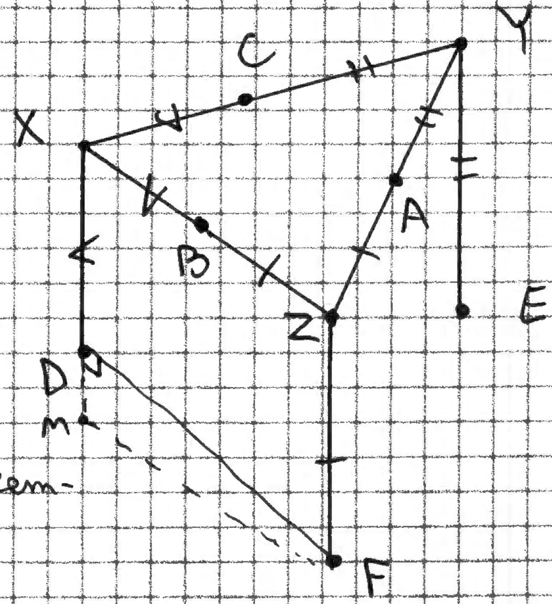
$\Rightarrow 4(k_1+k_2)+6$ – ст. двойки.

но $4(k_1+k_2)+6 \equiv_4 2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4(k_1+k_2)+6 = 2$, что невозможно, противоречие.

Пример верен.

М11-15



№11.9.

Пусть центры сфер, касающихся α в точках D, E, F – точки X, Y, Z соответственно.

A, B, C лежат на отрезках YZ, ZX, XY соответственно.

$XD = a$; $YE = b$; $ZF = c$.

1) Заметим, что A, B, C – точки касания впис. окружности $\triangle XYZ$ со сторонами. (т.к. $XB = XC$; $YC = YA$; $ZA = ZB$).

2) Пусть r – радиус опис. окр. $\triangle ABC$.

Тогда, $S_{\triangle XYZ} = r \cdot p$, где p – полупериметр.

$S_{\triangle XYZ} = \sqrt{p(p-XY)(p-YZ)(p-ZX)}$. (ф. ГЕРОНА)

Выражая стороны $\triangle XYZ$ через a, b, c, получим

$$S_{XYZ} = r \cdot (a+b+c)$$
$$S_{XYZ} = \sqrt{(a+b+c)\,abc},$$

откуда $r = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

3) т.к. $XD \perp \alpha$, $ZF \perp \alpha$, то $XD \parallel ZF$, и точки D, X, Z, F лежат в одной плоскости. Пусть M – точка на XD такая, что $FM \parallel ZX$. Тогда $FM = ZX$; $MD = |XD - ZF|$; $\angle MDF = 90^\circ$, откуда $DF^2 = ZX^2 - (XD - ZF)^2$.

М 11-15

$ZX = a+c$, $XD - ZF = a-c$, откуда

$DF^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$; $DF = 2\sqrt{ac}$.

Аналогично, $FE = 2\sqrt{bc}$, $DE = 2\sqrt{ab}$.

4) Пусть R – радиус опис. окр. $\triangle DEF$.
Тогда, как известно, $S_{\triangle DEF} = \frac{DE \cdot EF \cdot FD}{4R}$;

$$R = \frac{DE \cdot EF \cdot FD}{4 S_{\triangle DEF}} = \frac{8\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}}{4 S_{\triangle DEF}} = \frac{2abc}{S_{\triangle DEF}}.$$

5) DF – проекция отрезка XZ на l, откуда
$DF \leq XZ$.
Аналогично, $FE \leq ZY$; $DE \leq XY$.

Значит, $S_{\triangle DEF} \leq S_{\triangle XYZ}$ (следует из формулы Герона),

откуда $S_{\triangle DEF} \leq \sqrt{(a+b+c)\,abc}$ (из пункта 2).

6) Значит, $R = \frac{2abc}{S_{\triangle DEF}} \geq \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)\,abc}} = 2\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} =$
$= 2r$.

Получили, что $R \geq 2r > r$, ч.т.д.

М11-15

№ 11.10.

1) Докажем, что при $n = 9$ Вася может выиграть.

Пусть Вася назовет произвольные различные числа, например $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Так как ~~луч~~ чисел 9, ~~то в каком-то из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ Петя~~

то Петя сказал ≥ 5 значений одного из $f(x)$ и $g(x)$, пусть $f(x)$.

Вася для каждых трех полученных ~~точек~~ точек строит многочлен ст. не выше 2, который через них проходит.

Среди них точно есть многочлен, проходящий через 5 точек (т.к. среди них есть $f(x)$).

Пусть Вася выберет любой из таких, $f'(x)$.

Если $f'(x) \neq f(x), \neq g(x)$, то $f(x)$ и $g(x)$ пересекают $f'(x)$ хотя бы в 5 точках; при этом каждый из них пересекает $f(x)$ не больше чем в 2 точках, противоречие.

Значит, $f'(x)$ и есть искомый многочлен.

М11-15

~~Доказательство~~

В частности, из пункта 1 следует, что если Вася нашел многочлен не больше чем 2 степени, который проходит через 5 точек, то этот многочлен искомый.

2) Докажем, что $n \leq 7$ не хватит.
Докажем для $n = 7$.

Пусть Вася назвал числа $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$.
Рассмотрим произвольный многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

$f(x_1) = y_1, \ f(x_2) = y_2, \ f(x_3) = y_3, \ f(x_4) = y_4$.

Пусть l - прямая через точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.
Пусть l пересекает прямые $x = x_5, \ x = x_6$ в точках $(x_5; y_5), \ (x_6; y_6)$.
Кроме того, рассмотрим ~~...~~ точку $(x_7; y_7)$, где y_7 ~~...~~ такой, чтобы точки $(x_5; y_5), (x_6; y_6), (x_7; y_7), (x_3; y_3), (x_4; y_4)$ не лежали на прямой/параболе.

Заметим, что если Петя ~~...~~ загадал $f(x)$ и многочлен, проходящий через $(x_5; y_5), (x_6; y_6), (x_7; y_7)$, то ~~...~~ пусть он первые четыре числа подставит в $f(x)$, остальные в другой.
Тогда он скажет Васе набор чисел $(y_1, y_2 \ldots y_7)$, по порядку индексов.

M11-15

Если Петя загадал прямую l и многочлен, проходящий через $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$, $(x_7; y_7)$, то x_1 и x_2 он подставит в прямую l, ~~[illegible]~~ x_3 и x_4 в другой многочлен, x_5 и x_6 в l, x_7 в другой многочлен.

Тогда он опять же скажет Васе набор $y_1, y_2 \dots y_7$, по порядку индексов.

Значит, если Вася ~~[illegible]~~ озвучит числа $x_1 \dots x_7$ и получит в ответ $y_1 \dots y_7$, он не сможет однозначно определить пару многочленов, которая проходит через данные точки, ~~а все многочлены в парах~~ т.к. есть две различные пары, о которых упоминалось выше. Все многочлены в парах различны, а значит Вася не сможет однозначно определить ни один.

Утверждение доказано.

3) Остался случай $n = 8$.

№ 11.8.

1) $(\sin x+\cos y)^2+(\sin y+\cos x)^2=(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\sin^2 y+\cos^2 y)+$

$+2(\sin x\cos y+\sin y\cos x)=2(1+\sin(x+y))\in Q.$

Из этого следует, что $\sin(x+y)\in Q$.

~~2) $(\sin x+\cos y)(\sin y+\cos x)=\sin x\sin y+\cos x\cos y+$ $+\sin x\cos x+\sin y\cdot\cos y=\cos(x-y)+\frac{\sin 2x+\sin 2y}{2}=$ $=\cos(x-y)+\sin(x+y)\cos(x-y)=\cos(x-y)(1+\sin(x+y))$. $\in Q$.~~

~~Значит, так как $\sin(x+y)\in Q$, либо $\sin(x+y)=-1$, либо $\cos(x-y)\in Q$.~~

2) Пусть $\sin x+\cos y=q$; $\sin y+\cos x=p$.

$\cos y=q-\sin x$; $\sin y=p-\cos x$.

$\sin(x+y)\in Q$, $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x=$

$=q\sin x-\sin^2 x+p\cos x-\cos^2 x=$

$=q\sin x+p\cos x-1.$

Если $\sin(x+y)=Q$, то

$q\sin x+p\cos x=Q+1>0.$ (Если $Q=-1$, то противоречие с пунктом 1)

~~Пусть $q=\frac{m}{k}$; $p=\frac{n}{k}$, тогда~~

М11-15

Пусть $q = \frac{u}{k_1}$; $p = \frac{v}{k_2}$, $u, v, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$u k_2 \sin x + v k_1 \cos x = (Q+1) k_1 k_2.$$

~~Возьмем~~ $\cancel{u k_2 = m}$, $\cancel{v k_1 = n}$, $\cancel{m, n \in \mathbb{N}}$.

$\cancel{(Q+1) k_1 k_2}$

Домножим еще на знаменатель $(Q+1) k_1 k_2$;

Получим $m \sin x + n \cos x = N$,

где $m, n, N \in \mathbb{N}$.

Ч. Т. Д.