М-11-30

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

Задача 1. Заметим, что произведение двух наибольших чисел положительно => они одного знака. Если они оба отрицательны, то при $n \geq 3$, пусть что у нас есть числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

$a_1 \cdot a_2 = 77$

$a_{n-1} \cdot a_n = 77$. $a_n < 0 \Rightarrow |a_1| > |a_{n-1}|, \ |a_2| > |a_n| \Rightarrow$

$|a_1 \cdot a_2| > |a_{n-1} \cdot a_n|$

$|77| > |77|$

$77 > 77 \Rightarrow$ противоречие => в этом случае $n \leq 2$.

Если же оба наибольших положительны, то $a_{n-1} \cdot a_n = 77$ (обозначения те же, что и в предыдущем случае)

$77 = 1 \cdot 77 = 7 \cdot 11$ и других разложений в $a_{n-1} \cdot a_n$ нет =>
кол-во пол-ных чисел на доске $\leq a_{n-1}+1$, поскольку все ост. пол-ые (кроме a_{n-1} и a_n) меньше $a_{n-1} \Rightarrow$ их $\leq a_{n-1}-1 \Rightarrow$
пол-ых чисел $\leq 7+1 = 8$ (при $a_{n-1} = 7$, если $a_{n-1} = 1$, кол-во пол-ых меньше). Если отр-ых ~~нет~~ ≤ 1, то общее кол-во $\leq 8 + 1 + 1 = 10$ (+1 отр-ое, нуль, пол-ые) =>

Если отр-ых хотя бы 2, то оба наим. числа < 0

$a_1 \cdot a_2 = 77$, $|a_1| \cdot |a_2| = 77 = 77 \cdot 1 = 11 \cdot 7$, по ан-ным причинам кол-во отр-ых $\leq |a_2| + 1 \leq 7 + 1 = 8$. => Всего чисел $\leq 8 + 1 + 8 = 17$ (отриц., нуль, пол.)

Во всех ост. случаях мы получаем $n < 17$.

Пример на $n = 17$.

$-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$

пр-ие 2 наим $= (-11) \cdot (-7) = 77$
2 наиб $= 7 \cdot 11 = 77$. => пример подх-ит.

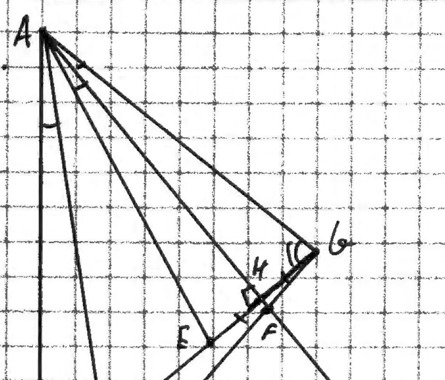
Ответ: $n = 17$.

М11-30

Задача 2. Пусть $A = \{a_1, \_\_, a_n\}$, $a_1 + \_\_ + a_n = n^2$
$B = \{b_1, \_\_, b_n\}$; $b_1 + \_\_ + b_n = n^2$.

$a_1 + \_\_ + a_n + b_1 + \_\_ + b_n = 2 \cdot n^2$
Мы знаем, что $a_i \neq a_j$ и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$
Пусть $a_i \neq b_j$ при $\forall\ i, j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i, j \leq n$, тогда в левой части все $2n$ слагаемых натуральны и различны $\Rightarrow$
их сумма $\geq 1 + \_\_ + 2n = \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} = 2n^2 + n$ $\Rightarrow$
$2n^2 \geq 2n^2 + n$; $n \leq 0$ — противоречие.
$\Downarrow$
$a_i = b_j$ при некоторых i и j $\Rightarrow$ есть число $(= a_i = b_j)$, пр-ее и A, и B ч.т.д.

Задача 3.



Точка G такова: $\vec{HG} = \vec{EH}$.
В $\triangle AEG$, AH - высота и медиана $\Rightarrow$ биссектриса ($\triangle AEG$ - равнобедренный)
$\Downarrow$
$\angle EAH = \angle HAG$.
Аналогично, $\angle EFH = \angle HFG$
$\parallel$ по доказ.
$\angle CFD$
$\Downarrow$
т.к. D и G в разных полуплоскостях отн-но AC, а $F \in$ отрезку CH,
D, F и G лежат на одной прямой.
$\angle AGB = 180° - (\angle AHG + \angle HAG) = 90° - \angle HAG = 90° - \angle BAD = \angle ADB \Rightarrow$
т.к. D и G по одну сторону от AB, $ABDG$ - вписанный $\Rightarrow$
$\angle BGD = \angle BAD = \angle EAF$
$\parallel$
$\angle EGF$
$\Rightarrow$ т.к. A и G по 1 сторону от EF, $AEFG$ - вписанный $\Rightarrow$

М-11-30

из вписанности ABDG

$\angle AEF = \angle AGF = \angle AGD \overset{\Downarrow}{=} \angle ABD = 90^\circ$. ч.т.д.

Задача 4. Предположим, что такой y не найдётся.

Пусть $p = 2k+1$, тогда:

$1 \cdot p + 1 = a_1 \cdot b_1$

$\vdots$

$\ell \cdot p + 1 = a_\ell \cdot b_\ell$

$\vdots$

$k \cdot p + 1 = a_k \cdot b_k$.

Где $a_i, b_i > i$.

Предположим среди a_i и b_j какое-то число c встретилось хотя бы дважды.

I c оба раза встретилось в разложении одного числа:

$\ell p + 1 = c \cdot c = c^2$.

$\ell p = c^2 - 1 = (c-1)(c+1) \Rightarrow$ хотя бы одна из скобок $c-1$ и $c+1$ $\vdots p$ (т.к. p - простое) $\Rightarrow \geq p \Rightarrow c+1 \geq p$, $c-1 \geq p-2$

$\frac{p}{2} \cdot p > \ell p = (c-1)(c+1) \geq (p-2) \cdot p$

$p > 2p - 4$; $p < 4 \overset{\text{т.к. } p\text{-простое}}{\Rightarrow} p \leq 3$, но $p > 3$ по условию.

противоречие.

II c встретилось в разложении для 2 различных чисел:

u и v $(u < v)$. $c \not\vdots p$, т.к. $(up+1) \not\vdots p$ $\Rightarrow u, v, u < c$.

$(up+1) \vdots c$ $\Rightarrow (v-u) \cdot p \vdots c \Rightarrow (v-u) \vdots c$, т.к.

$(vp+1) \vdots c$

(т.к. $c \not\vdots p$, $(c,p) = 1$)

Но $u < v < c \Rightarrow 0 < v - u < c \Rightarrow (v-u) \not\vdots c$ противоречие.

Значит, все эти числа a_i и b_j различны.

Докажем, что все они $\leq 2k$.

М11-30

$lp+1 = a \cdot b$, $a, b \geq l+1$

$2lk+l+1 = a \cdot b$

$a = \frac{2lk+l+1}{b} \leq \frac{2lk+l+1}{l+1} = \frac{2lk}{l+1} + 1 < \frac{2lk}{l} + 1 = 2k+1 \Rightarrow a \leq 2k$

(т.к. a - целое)

$\Downarrow$

Ч число из a_i и b_j $\leq 2k$, их $2k$ штуки и они все различны. $a_i, b_j > i \geq 1 \Rightarrow$ все они $\geq 2 \Rightarrow$ у них есть только $2k-1$ вариант значений: $2, 3, \ldots, 2k$, но их $2k$ и они все раз-ны $\Rightarrow$ противоречие.

$\Downarrow$

Итог: y из условия найдётся. ч.т.д.

Задача 5.

Пусть наименьшее число в i-ом столбце $= a_i$. Мы можем переставить столбцы так, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n = x$. (при пер-ках столбцов и строк исследуемая разность не изменяется).

Заметим, что $\begin{cases} a_i \leq 1+(i-1) \cdot n \\ a_i \leq x-(n-i) \end{cases}$ – поскольку все числа меньшие a_i могут находиться только в столбцах $1, \ldots, i-1 \Rightarrow$ их $\leq n(i-1)$.

поскольку $a_i \leq a_{i+1}-1 \leq a_{i+2}-2 \leq \ldots \leq a_n-(n-i)$.

Часть a_i оценим первым неравенством, часть - вторым, ~~так чтобы~~ („меньшим" из них), посмотрим, где проходит граница.

$1+(k-1) \cdot n \leq x-(n-k)$

$1+nk \leq x+k$

$k \leq \frac{x-1}{n-1} \Rightarrow k = \left[\frac{x-1}{n-1}\right]$

Тогда сумма малых чисел $\leq 1+0 \cdot n + \ldots + (1+(k-1)n) +$

$+ (x-(n-k-1)) + \ldots + \cancel{(x-0)} (x-(n-n)) =$

$= k + n \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} + (n-k) \cdot x - \cancel{(k-1)k} \frac{(n-k-1)(n-k)}{2}$

11-30

Оценим сумму больших чисел.

~~Рас-им последний столбец, в нём все числа~~ $\geq a_n$.
~~Перет в первой строке число b_1, в i-ой — b_i, в n-ой — b_n.~~
~~Переставим строки. $b_1 < b_2 < \_\_ < b_n$~~
$\quad\;\; \overset{\vee\!|}{a_n}$

Пусть наиб. число в i-ой строке $= b_i$, т.к. каждая строка содержит число из пос-го столбца $\geq a_n$, $b_i \geq a_n$.
Пер-им строки так, что $b_1 < b_2 < \_\_ < b_n$.

Запишем неравенства b_i:
$$\begin{cases} b_i \geq x + i - 1, \text{ т.к. } b_i \geq b_{i-1} + 1 \geq \_ \geq b_1 + i - 1 \geq a_n + i - 1 \\ b_i \geq n^2 - (n-i)\cdot n = i\cdot n, \text{ т.к. все числа большие } b_i \text{ — в строках } \\ \text{с } i+1 \text{ по } n \Rightarrow \text{их (чисел)} \leq (n-i)\cdot n, \text{ а наиб. число } = n^2. \end{cases}$$

Опять же оценим „лучшей" (в данном случае „большей") оценкой.
Посмотрим, когда происходит „переход"

$$x + l - 1 \leq n^2 - (n-l)\cdot n = l\cdot n.$$
$$l \leq \frac{x-1}{n-1} \Rightarrow l = \left[\frac{x-1}{n-1}\right] = k$$

Тогда сумма больших $\geq (x+0) + \_\_ + (x+k-1) + \cancel{(n^2 - (n-k))}(k+1)\cdot n + \_ + n\cdot n =$

$$= kx + \frac{(k-1)\cdot k}{2} + n\cdot(n-k)\cdot\frac{n+k+1}{2}$$

Тогда сумма больших − сумма малых $\geq$

$$\geq kx + \frac{(k-1)\cdot k}{2} + n(n-k)\frac{n+k+1}{2} - k - n\cdot\frac{(k-1)k}{2} - (n-k)x + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2} =$$

$$= x(2k-n) + \frac{n}{2}\left(n^2 - k^2 + n - k - k^2 + k\right) - k + \frac{k}{2}(k - 1 - 2) + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2} =$$

$$= x(2k-n) + \frac{n}{2}\left(n^2 - 2k^2 + n\right) + \frac{k(k-3)}{2} + \frac{n^2 - nk - nk - n + k(k+1)}{2} =$$

$$= x(2k-n) + \frac{n}{2}\left(n^2 - 2k^2 + n\right) + \frac{n^2 - 2nk - n - 2k + 2k^2}{2} = x(2k-n) + \frac{1}{2}\left(n^3 - 2k^2 n + 2n^2 - 2nk - n - 2k + 2k^2\right) =$$

$$= x(2k-n) + \frac{n}{2}\left(n^2 + 2n - 2k^2 - 2k - 1\right) - k + k^2$$ докажем, что это $\leq \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$, что равносильно.

$x(2k-n)+n(n-k^2-k) \le 0.$ $-k+k^2$

$\cancel{x(2k-n) \le n(k^2+k-n)}.$

$\cancel{k=\left[\frac{x-1}{n-1}\right]} = \left[\frac{x-n+n-1}{n-1}\right] = \left[\frac{x-n}{n-1}\right]+1$

$nk^2+k(n-2x)+nx-n^2 \ge 0.$

$\cancel{nk^2+k(n-2x)+nx-n^2=0}$

$\cancel{k=\frac{2x-n\pm\sqrt{n^2-4nx+4x^2+4n^3-4n^2x}}{2n}}$

$X(2k-n)+n(n-k^2-k) \le 0$ $k+k^2$

$k=\left[\frac{x-1}{n-1}\right]$

$x-1=k\cdot(n-1)+r,\ 0\le r\le n-2$

$x=kn-k+r+1.$

$(kn-k+r+1)(2k-n)+n^2-nk^2-nk \le 0$ $k+k^2$

$2k^2n-2k^2+2kr+2k-kn^2+nk-nr-n+n^2-nk^2-nk \le 0$

$k^2n-2k^2+2kr+2k-kn^2-nr-n+n^2 \le 0.$

$k^2(n-2)+k(2r+2-n^2)-nr-n+n^2 \le 0.$

проверим значения на границах доп-ых значений для $k \Rightarrow$ т.к. это парабола ветвями вверх или прямая (мы полагаем $n \ge 2$), то покажем для всего промежутка для k.

$x \ge n \Rightarrow k \le 1$

$X \le n^2-n+1 \Rightarrow k \le n$ ок.

$k=1:$ $n-2+2r+2-n^2-nr-n+n^2 \le 0.$

$r(2-n) \le 0 \Rightarrow$ т.к. $n\ge 2,\ r\ge 0$ — всё верно.

$k=n.$ $n^3-2n^2+2rn+2n-n^3-nr-n+n^2 \le 0.$

М 11-30

$rn + n - n^3 \le 0$ при $r = 0$ – верно (если $k = n$, то сос-ся только $r = 0$)

$r + 1 - n \le 0$, $r \le n - 1$ – верно.

Тогда мы показали, что при $n \ge 2$, разность $\ge \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$

Приведём пример:

$1 \; n+1 \; \dots \; (n-1)n+1$

$2 \; n+2$

$\vdots$

$n \; 2n \; \dots \; n^2$

$$n\frac{n^2+n^2-n+1}{2} \cdot n - n - n\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n^3+n^2+n-2n-n^3+n^2}{2} = \frac{n^3-n}{2}$$

Тогда малые числа: $1, n+1, \dots, (n-1)\cdot n+1$.

~~Если k~~ большие: $n^2, \dots, (n-1)\cdot n+1$.

Пример подходит.

Теперь проверим $k = n - 1$

$(n-1)^3 + (n-1)(2r+1-n^2) - nr - n + n^2 \le 0$

~~раз-ть $= 0$, т.к. это крайний случай раз-ой оценки.~~

$n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 2rn + n - n^3 - 2r - 1 + n^2 - nr - n + n^2 \le 0$

$-n^2 + 3n - 2 + nr - 2r \le 0$.

$r(n-2) \le n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$.

Т.к. $n - 2 \ge 0$ и $r \le n - 1$ – это верно.

Для $n = 1$ ответ очевидно $= 0$,

$\boxed{1}$

(Крайние точки $k = 1$ и $k = n-1$, $k = n$ – разобран отдельно.)

Ответ: min разность $= \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$
(для 1 это также верно)

6	7	8	9	10	Σ
−	+	+	+	+	
0	7	7	7	7	26

М11-06

$(x^2+1)+(x^2+1)$? опрац. вычит. и умнож.?

Задача 11.6 запишем на доску $2(x^2+1) = 2x^2+2$ и $(-1)\cdot(x+1) = -x-1$ это как?

Теперь вычтем из x^3+1, $2x^2+2 \Rightarrow$ на доске x^3-2x^2-1

Теперь из пол-ой функции вычтем $-x-1 \Rightarrow$ на доске будет x^3-2x^2+x

Покажем, что эта функция $f(x)$ нам подходит:

1) она ненулевая

2) $x^3-2x^2+x = x\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} \Rightarrow$ при $x<0$, $f(x) \leq 0$, а при $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$

—

$\Downarrow$

Мы показали как получить требуемую функцию. Это и требовалось.

Задача 11.7 Да, можно. Определим, как мы покрасим число $n = 2^\alpha \cdot k$, где k нечёт, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$; если $k \equiv_4 1$, n - синее, если $k \equiv_4 3$, n - красное (мы красим в синий и красный цвета)

Теперь рас-им $\forall$ сумму одноцветных $n = 2^\alpha \cdot k$, $m = 2^\beta \cdot l$

$n+m = 2^\alpha \cdot k + 2^\beta \cdot l$, если $\alpha \neq \beta$, то степень вхождения двойки в $n+m = \min(\alpha, \beta) = \gamma$, но $2^\alpha \cdot k + 2^\beta \cdot l \geq 2^\gamma \cdot k + 2^\gamma \cdot l = 2^\gamma(k+l) > 2^\gamma \Rightarrow$ $n+m$ - не степень двойки.

Если $\alpha = \beta$, $n+m = 2^\alpha(k+l)$ т.к. они одного цвета $\left[\begin{array}{l} k+l \equiv 1+1 \equiv 2\ (4) \\ k+l \equiv 3+3 \equiv 2\ (4) \end{array}\right.$?

~~$k+l$~~

$k+l \equiv 2 \pmod 4$, $k+l$ (они различны) и $k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow k+l \geq 1+2 = 3 \Rightarrow$ ~~у $k+$~~ $k+l$ - не степень двойки (т.к. ≥ 3 и $\nmid 4$) $\Rightarrow 2^\alpha(k+l)$ - не степень дв-ки $\Rightarrow n+m$ - не степень двойки.

+

Мы рас-ли оба случая, и в обоих ~~$n+m$~~ ∀ сумма с одноцветными не подходит $\Rightarrow$ наша раскраска подходит.

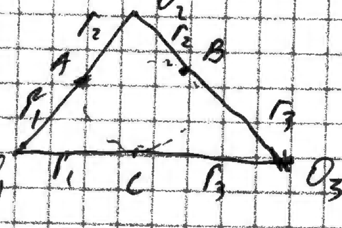
Ответ: да, можно.

(см. 11.8 в конце)

М11-06

Задача 11.9. Пусть центр i-ой сферы — O_i, а радиус $= r_i$

Рас-им треугольник $\{O_1, O_2, O_3\}$.



(Нетрудно понять, что A, B и C лежат на соответствующих отрезках)

p — полупериметр $p\triangle O_1O_2O_3$, $p = r_1 + r_2 + r_3$.

$O_1C = r_1 = \frac{O_1O_2 + O_1O_3 - O_2O_3}{2} \Rightarrow C$ — точка касания впис. окр. $\triangle O_1O_2O_3$ и O_1O_3.

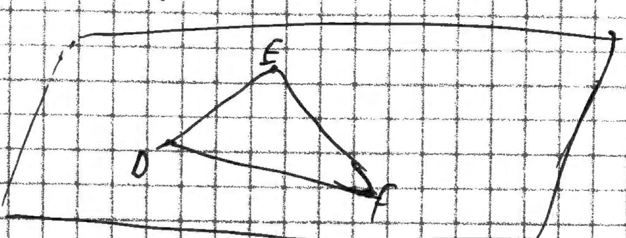
Аналогично, A и $B \Rightarrow$ радиус окружности, описанной около $ABC =$ радиусу вписанной окр. $\triangle O_1O_2O_3 = r$.

$S_{O_1O_2O_3} = pr$

$r = \frac{S_{O_1O_2O_3}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-O_1O_2)(p-O_2O_3)(p-O_3O_1)}}{p} = \frac{\sqrt{(r_1+r_2+r_3-r_1-r_2)(r_1+r_2+r_3-r_2-r_3)(r_1+r_2+r_3-r_3-r_1)}}{p} =$

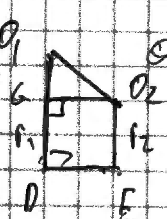
$= \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1+r_2+r_3}}$.

Теперь рас-им плоскость α и $\triangle DEF$ на ней



Заметим, что O_1, O_2, O_3 по одну сторону от α (иначе они не смогли попарно касаться внешним образом)

($O_1D, O_2E, O_3F \perp \alpha$ и прямым в ней лежащим)



O_1 — на r_1 выше D

O_2 — на r_2 выше E

O_3 — на r_3 выше F

равенство ос-ся верно при O_1G или $O_1 = G$

$DE = GO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - GO_1^2} =$

$= \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$EF = 2\sqrt{r_2 \cdot r_3}$

$FD = 2\sqrt{r_3 \cdot r_1}$

$\boxed{R_{DEF} = R}$

$S_{DEF} = \frac{DE \cdot EF \cdot FD}{4 \cdot R} = \frac{8 r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{4 \cdot R} = \frac{2 r_1 r_2 r_3}{R}$, $R = \frac{2 r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{S_{DEF}}$

М11-06

$$q = \frac{DE+EF+FD}{2} = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1}.$$

$$S_{DEF} = \sqrt{q(q-2\sqrt{r_1r_2})(q-2\sqrt{r_2r_3})(q-2\sqrt{r_3r_1})}$$

$$q - 2\sqrt{r_1r_2} = \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} - \sqrt{r_1r_2} = 2x > 0$$

$$q - 2\sqrt{r_2r_3} = \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_1\cdot r_2} - \sqrt{r_2\cdot r_3} = 2y > 0$$

$$q - 2\sqrt{r_3r_1} = \sqrt{r_1\cdot r_2} + \sqrt{r_2\cdot r_3} - \sqrt{r_3\cdot r_1} = 2z > 0$$

$\Downarrow$

~~$q = 2x + 2y + 2z.$~~

$$3q - 2(\underbrace{\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2\cdot r_3} + \sqrt{r_3\cdot r_1}}_{q}) = 2x + 2y + 2z.$$

$$q = 2x + 2y + 2z.$$

$$2x + 2y + 2z - 2\sqrt{r_1r_2} = 2x$$

$$\sqrt{r_1r_2} = y + z.$$

Ан-но $\sqrt{r_2\cdot r_3} = z + x$; перемножим $\Rightarrow$ $r_1r_2r_3 = (x+y)(y+z)(z+x).$

$$\sqrt{r_3\cdot r_1} = x + y.$$

$$r_1r_2 = (y+z)^2 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1\cdot r_2} = \frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{(y+z)^2}.$$

$$r_1 = \frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{(z+x)^2}; \quad r_1 + r_2 + r_3 = r_1\cdot r_2\cdot r_3\left(\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right).$$

$$r_2 = \frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{(x+y)^2}; \quad S^2_{DEF} = 2(x+y+z)\cdot 2x\cdot 2y\cdot 2z.$$

Нам надо док-ть $r < R \iff r^2 < R^2$.

$$\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r_1+r_2+r_3} \overset{(!)}{<} \frac{4\cdot r_1^2\cdot r_2^2\cdot r_3^2}{16(x+y+z)\cdot xyz}$$

$$4(x+y+z)\cdot xyz \overset{(!)}{<} r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3) =$$

$$= r_1^2r_2^2r_3^2\left(\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right) = (x+y)^2(y+z)^2 + (z+x)^2(x+y)^2 + (y+z)^2(z+x)^2,$$

+

$$4x^2yz + 4xy^2z + 4xyz^2 \overset{(!)}{<} y^4 + x^4 + z^4 + 2y^3x + 2y^3z + 2x^3y + 2x^3z +$$

$$+ 2z^3x + 2z^3y + 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 3z^2x^2 + 8x^2yz + 8xy^2z + 8xyz^2$$

Мы получили симметричное нер-во четвертой степени => можем применить нер-во Мюрхеда. Т.к. (1, 1, 1) - мажорируется любым другим набором ст с ~~суммой~~ 4, с

$2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 < y^4 + x^4 + z^4 + 2y^3x + 2xy^3 + 2z^3x + 2x^3z + 2y^3z + 2z^3y$

Тогда нер-во верно => ч.т.д.

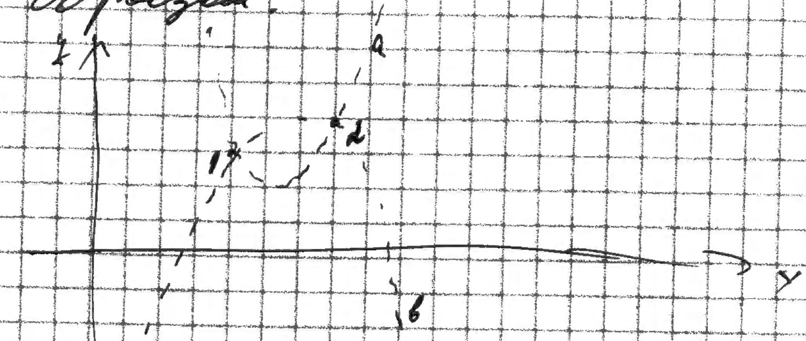
и будем отмечать после каждого хода т. $(t, f(t))$ на графике.

Задача 11.10. Будем считать, что Вася никогда не называл одно и то же t (иначе Петя каждый раз отвечал одно и тоже а Вася просто терял ходы).

Покажем, что $n \geq 8$, указав, что должен отвечать Петя ~~при~~ на каждый запрос Васи.

М11-06

Первые два хода можно считать отвечены следующим образом

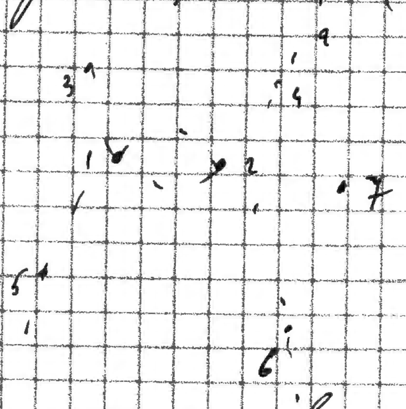


Проведём через 1 и 2 две не совпадающие параболы. (a и b)

~~С третьего по 6 запрос~~

Третьим и четвёртым запрос вернём точку с a, пятым и шестым — ~~с~~ b.

На седьмой запрос вернём точку не с этих двух парабол. (a и b запрещают ≤ 2 точек для зад-го x).



Тогда Вася не может опр-ть, какая пара многочленов была у Пети: пара из многочлена для a и проходящего через 5, 6, 7 или пара b; 3, 4, 7

(Так как точек 3 и у них ~~есть~~ разные абсциссы, есть многочлен степени ≤ 2, график которого проходит через всех них.)

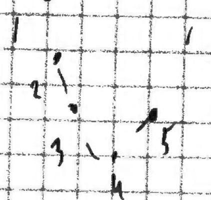
Т.к. 1, 2, 7 ∉ a, b; ни-единого многочлена 3, 4, 7 ≠ a и 5, 6, 7 ≠ b.

То есть ~~если у А Петя~~ Вася не смог за 7 ходов его определить

ни один Васин мн-ен. А у него[Васи] может быть одна из двух указанных пар; ⇒
$n \geq 8$.

Покажем, что $n=8$ хватает.

Пусть Петя случайным образом сделает первые 7 ходов. Если после этого найдутся 5 точек, лежащих на ~~этой~~ одной кривой (параболе или прямой), то многочлен задающий эту кривую однозначно есть у Пети. (~~т.к. любой~~ ну докажем это. $1 \Rightarrow S(x)$.



~~$A(x)$~~ У Пети $f(x)$ и $g(x)$. $f(x)$ и $S(x)$ сов-ют в ≤ 2 точках. $g(x)$ и $S(x)$ — тоже (т.к. они ~~все~~ все $\deg \leq 2$) ⇒ не более 4 из 5 отмеченных точек могли появиться, противоречие.

~~Тогда~~ Пусть ~~на доске~~ нет из 7 отмеченных точек нет 5 лежащих на одной кривой ⇒ на одной Петиной кривой должно лежать 4 точки (т.к. $3 \cdot 2 < 7$).

Переберём все возможные 4, лежащие на одной кривой (их конечное число $\leq C_7^4$). Они однозначно задают пару Петиных многочленов (т.к. он-ие 3ой на также однозначно воз-ет многочлен который её содержит) ⇒ у Васи есть k вариантов (с точностью до пор-ка f и g) Петиных мн-ов.

$f_1(x)$, и $g_1(x)$

⋮

$f_k(x)$ и $g_k(x)$. Среди f_i и g_i могут быть сов-ие, это не важно (считаем их как один возможный многочлен).

У нас есть конечное число различных возможных многочленов — у них конечное число точек пересечения.

М11-06

Тогда выберем абсциссу x такую, что в ней все воз-ные многочлены принимают различные значения (т.к. $x \in \mathbb{R}$ — бесконечно много вариантов, а зак-но конечное — из пересечений и q: 7 уже упомянутых). Тогда возвращённое Петей значение од-но задаёт возможный многочлен ⇒ он заведомо выбран Петей ⇒ за $n = 8$ ходов, Вася сможет узнать 1 искомый многочлен.

Ответ: $n = 8$.

Задача 11.8.

$\xi_1 = \sin x + \cos y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) =$

$= \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} +$

$+ \cancel{\cos} \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2} =$

$= \boxed{\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)\left(\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)} \in \mathbb{Q}_+$

$\xi_2 = \sin y + \cos x = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) =$

$= \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} -$

$- \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2} =$

$= \boxed{\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)\left(\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}\right)} \in \mathbb{Q}_+$

т.к. $\xi_1 > 0$ и $\xi_2 > 0$, $\xi_1 \in \mathbb{Q}$, $\xi_2 \in \mathbb{Q}$, $\frac{\xi_1}{\xi_2} > 0$ и $\in \mathbb{Q}$
$\xi_2 \neq 0$.

$\dfrac{\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}} \in \mathbb{Q}_+$

~~$\left(\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\right)^2$~~ ~~$\left(\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\right)\left(\cos\frac{x-y}{2} - \sin\right.$~~

$1 + 2\dfrac{\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}} \in \mathbb{Q}_+$

$\dfrac{\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}} \in \mathbb{Q}.$

М11-06

$2\sin x\cdot\cos y + 2\cos x\cdot\sin y = 2\sin(x+y)$.

$\sin x + \cos y \in \mathbb{Q}_+$

$\sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y \in \mathbb{Q}_+$

$\sin y + \cos x \in \mathbb{Q}_+$

$\sin^2 y + \cos^2 x + 2\sin y\cos x \in \mathbb{Q}_+$

$+$

$2 + 2\sin(x+y) \in \mathbb{Q}_+$

$1+\sin(x+y) \in \mathbb{Q}_+$

$\xi_1 = \left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) \in \mathbb{Q}_+$

$\xi_1^2 = \underbrace{(1+\sin(x+y))}_{\in\mathbb{Q}_+}\underbrace{(1+\sin(x-y))}_{\in\mathbb{Q}_+} \in \mathbb{Q}_+$.

$\mathbb{Q}_+ \ni \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}} \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\underbrace{1+\sin(x-y)}_{\in\mathbb{Q}_+}} \Rightarrow$

$\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \in \mathbb{Q}_+$.

$\cos\frac{x-y}{2}$ $\boxed{\cos(x-y) \in \mathbb{Q}_+}$.

~~$(\cos x + \sin y)\cdot\sin x + (\cos y + \sin x)\cdot\cos x \in \mathbb{Q} =$~~

$=$

~~$\xi_1\cdot\xi_2 \in \mathbb{Q}_+$~~

$\sin y + \cos x \in \mathbb{Q}_+$

$\sin x + \cos y \in \mathbb{Q}_+$.

$(\sin y + \cos x)(\sin x + \cos y) \in \mathbb{Q}_+$.

$+$

$\cos x\cdot\sin x - \sin y\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y) =$

$= \frac{1}{2}(\sin((x+y)+(x-y)) - \sin((x+y)-(x-y))) =$

$= \frac{1}{2}(2\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)) \in \mathbb{Q}$

М11-06

~~$\sin y \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin y$~~

$\underbrace{(\sin x + \cos y)}_{\in \mathbb{Q}_+ \,=\, \frac{p}{q}} \cdot \sin x + \underbrace{(\sin y + \cos x)}_{\in \mathbb{Q}_+ \,=\, \frac{s}{t}} \cdot \cos x =$

$= 1 + \sin(x+y) = \frac{r}{u} \in \mathbb{Q}_+$

$\frac{p}{q} \cdot \sin x + \frac{s}{t} \cdot \cos x = \frac{r}{u} \quad | \cdot utq$

$\underbrace{put}_{\in \mathbb{N}} \cdot \sin x + \underbrace{squ}_{\in \mathbb{N}} \cdot \cos x = \underbrace{rqt}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$

~~нет~~ $n = put$; $m = squ$. ч. т. д.

+