11.1. Пусть наши числа – $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
$(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$.

Тогда $a_1 \cdot a_2 = a_{n-1} \cdot a_n = 77 = 7 \cdot 11$.

Если $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$ и $xy = 77$, ~~и $x<y$~~ $(x<y)$, то пара $(x; y)$ может иметь 4 варианта: $(-77; -1)$, $(-11; -7)$, $(1; 77)$ или $(7; 11)$.

Значит, пара (a_{n-1}, a_n) может ~~иметь одно из этих~~ быть только одним из этих 4-х вариантов. Аналогично для пары (a_1, a_2).

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28

1) $a_{n-1} = -77$, $a_n = -1$

Тогда $a_1 < a_2 < a_{n-1} = -77 \Rightarrow a_1 a_2 > 77$.

Значит, такой вариант невозможен.

2) $a_{n-1} = -11$, $a_n = -7$.

Тогда $a_1 < a_2 < a_{n-1} = -11$. $\Rightarrow (a_1; a_2)$ не может быть подходящей парой (в каждой паре есть число > -11).

Значит, такой вариант невозможен.

3) $a_{n-1} = 1$, $a_n = 77$.

В этом варианте $a_i > 0$ ровно 2, т.к. $a_{n-2} < a_{n-1} = 1$, $a_n = 77$.

4) $a_{n-1} = 7$, $a_n = 11$.

Здесь $a_i > 0$ может быть ≤ 8.

~~Если~~ Т.к. в паре $(a_{n-1}; a_n)$ оба числа могут быть только >0, в паре $(a_1; a_2)$ оба числа <0. (если это не так, среди чисел a_1, a_2 хотя бы одно $\geq 11 \Rightarrow a_{n-1}$ и $a_n > 11$, что невозможно) (если $a_1 \neq a_{n-1}$, $a_2 \neq a_n$ в этом случае $n=2$)

Аналогично рассматривая пару $(a_1; a_2)$, мы получаем, что если $a_1 = -77$ и $a_2 = -1$, то ~~чисел~~ $a_i < 0$ ~~в~~ среди чисел ровно 2, а если $a_1 = -11$ и $a_2 = -7$, их ≤ 8.

Значит чисел >0 ~~в~~ среди a_i ≤ 8, чисел <0 – ≥ 8 и может быть число 0, т.е. чисел всего ≤ 17.

Пример: $-11, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$.

Ответ: $n = 17$.

11.2. Пусть ни одно число из множества A не совпадает ни с одним числом из множества B. Значит, в обоих множествах по n различных чисел $\Rightarrow$ в множестве A и B, состоящем из всех чисел из ~~на~~ множеств A и B, $2n$ чисел. ~~[illegible]~~

$S(K)$ = сумма чисел в множестве K. 11-11-26

$S(A) = S(B) = n^2$

$S(A+B) = S(A) + S(B) = 2n^2$.

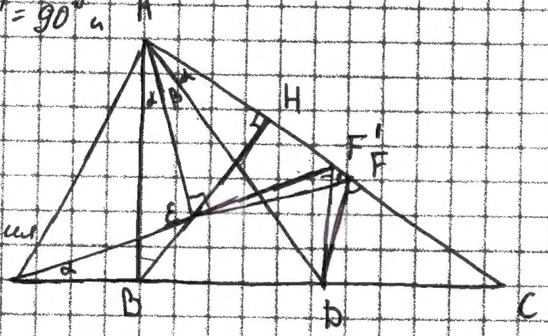
Минимальная возможная $S(A+B)$ равна сумме чисел от 1 до $2n$ (т.к. все числа в множестве $A+B$ различные) $= \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n = 2n^2$.

Значит, $n = 0$. Но условие подразумевает, что $n \geq 1$ (т.е. множества A и B не пустые). Противоречие.

Значит, наше предположение неверно, и в множествах A и B есть хотя бы одно ~~[illegible]~~ совпадающее число.

ч.т.д.

11.3. Построим точку F' такую, что $\angle AEF' = 90°$ и $F' \in AC$. Пусть прямая $F'E \cap BC = P$



$\angle BAD = \angle CAE \Rightarrow \angle BAE = \angle CAD = \alpha$, $\angle EAD = \beta$.

Тогда $\angle BAD = \alpha + \beta$ (в зависимости от расположения точек E и D β может быть со знаком + или −)

$\angle AF'E = 90° - \angle F'AE = 90° - (\alpha + \beta)$

$\angle AF'E = \angle F'CP + \angle F'PC$ (как внешний) $\Rightarrow \angle F'PC = \angle AF'E - \angle F'CP$

$\angle F'CP = \angle ACB = 90° - \angle CAB = 90° - 2\alpha - \beta$, $\angle F'PC = 90° - (\alpha + \beta) - 90° + 2\alpha + \beta = \alpha$.

$\angle F'PC = \angle EPB = \angle BAE$ ($\Rightarrow PBEA$ - вписанный) $= \angle F'PD = \angle F'AD$ ($\Rightarrow PDF'A$ - вписанн.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AF'P = \angle ADP = \angle DAC + \angle ACD$ (внешний) $= 90° - \alpha - \beta$

Из вписанности $PBEA$ $\angle APE = \angle ABE = \angle ABH = 90° - 2\alpha - \beta \Rightarrow \angle APB = \angle APE + \angle EPB = 90° - 2\alpha - \beta + \alpha = 90° - \alpha - \beta = \angle DF'C$ (т.к. $PDF'A$ - впис.)

$\angle AF'P = 90° - \alpha - \beta = \angle DF'C$.

$\angle AFE = \angle CFD$ и $\angle AF'E = \angle CF'D \Rightarrow$ точки F и F' совпадают, т.к. если они не совпадают, то (пусть F' лежит ближе к A, чем C. В противоположном случае аналогично) $\angle EF'A = \angle EFA + \angle F'EA > \angle EFA$, а $\angle CF'D = \angle CFD - \angle FDF' < \angle CFD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EF'A > \angle EFA = \angle CFD > \angle CF'D$, но $\angle EF'A = \angle CF'D$

Т.к. точки F и F' совпадают, $\angle AEF' = \angle AEF = 90°$.

ч.т.д.

11.4. Рассмотрим все возможные $1+py$.
Это арифметич. прогрессия с шагом $= p$.
$1+p,\ 1+2p,\ 1+3p,\ \dots,\ 1+\frac{p-1}{2}p$.

Каждый её член $\underset{p}{\equiv} 1$.

Всего вариантов перемножения остатков чисел по mod p, таких, что их произведение $\underset{p}{\equiv} 1$, $\frac{p+1}{2}$? Один из этих вариантов – остаток 1 · остаток 1. ~~вариант Но этот вариант не могло получиться ни одно число из $1+py$, кроме $1+p$, т.к.~~

Пусть i-тое число нашей прогрессии $= 1+pi$ ($i \in [1; \frac{p-1}{2}]$, $i \in N$)

~~Тогда если~~ Предположим, что нужного нам y не найдётся. Тогда $1+pi = x_i y_i$ ($x_i, y_i \in N$), причём ~~x_i~~ $i < x_i \le p$ (т.к. если $x \ge p$, $x \ge p+1$, $(p+1)i = pi+i$, что $< pi+1$, если $i \neq 1$. Но этот случай рассмотрим позже) Аналогично $i < y_i \le p$.

~~Тогда если~~ $1+p$ могло получиться с помощью $1\cdot(p+1)$, но если у него нет другого разложения, тогда наше предположение неверно. Значит, его можно разложить на $x_1 \cdot y_1$, где ~~x~~ $1 < x_1 < p$ и и $1 < y_1 < p$.

Т.к. все наши x_i и $y_i \le p$, мы можем рассматривать их как остатки по модулю p. Тогда каждое $1+pi$ могло получиться лишь одним разложением на x_i и y_i (т.к. для каждого x_i есть только одно y_i такое, что $x_i y_i \underset{p}{\equiv} 1$ и x_i и $y_i < p$ => если для каких-то разных i x_i совпали, то совпали и y_i => эти числа равны, что неверно).

Всего у нас $\frac{p+1}{2}$ вариантов выбора x_i (по нему y_i определяется однозначно), но вариант, где $x_i \underset{p}{\equiv} 1$ и $y_i \underset{p}{\equiv} 1$ не подходит (если одно из них $=1$, а другое $= p+1$, разбирались выше, а оба они не могут быть на 1 (т.к. $p > 3$), ни $p+1$ ~~Также~~ вариант $x_i = y_i = p+1$ не подходит, т.к. $(p+1)^2 > 1+\frac{p-1}{2}p$.

Вариант $x_i \underset{p}{\equiv} -1$ и $y_i \underset{p}{\equiv} -1$ предполагает, что $x_i = y_i = p-1$, т.е. $(p-1)^2 = x_i y_i$, что больше любого возможного $1+pi$.

Значит, у нас только $\frac{p-3}{2}$ варианта остатков => хотя бы два числа совпали => наше предположение неверно. Ч.т.д.

М11-50

11.6.

1) $(x^2+1)(x+1) = x^3+x+x^2+1$. Дописываем эту функцию.

2) $(x^3+x+x^2+1) - (x^2+1) = x^3+x$.

~~x^3+x~~ При $x>0$ $x^3+x>0$, при $x<0$ $x^3+x<0$.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	1	0	0	15

11.7. Раскрашиваем числа следующим образом:

Все числа, сравнимые с $1 \cdot 2^{k-2}$ по модулю 2^k, красим в цвет x, а все числа $\equiv 3 \cdot 2^{k-2}$ красим в цвет y. $(k \in N,\ k \geq 2)$.

Мы покрасим все числа, т.к. рассматривая по порядку все возможные k, мы будем закрашивать все числа (т.е. если число не было покрашено на пред. шаге, оно будет покрашено на ~~следующем~~ одном из следующих)

2 числа из одной группы в сумме не будут давать степень двойки, т.к. при сложении двух чисел вида $a \cdot 2^t + 1 \cdot 2^{t-2}$ или $a \cdot 2^t + 3 \cdot 2^{t-2}$ $(a \in \mathbb{Z}, a \geq 0)$, например, $a \cdot 2^m + 1 \cdot 2^{m-2} + b \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-2}$, если (пусть $m \geq n$):

1) $m \geq n+2$, $a \cdot 2^m + 2^{m-2} \vdots 2^n$, $b \cdot 2^n \vdots 2^n$, но $2^{n-2} \not\vdots 2^n$. Т.к. нужное число $\geq 2^n$ – оно $\not\vdots 2^n$, оно не степень двойки.

2) $m = n+1$. $\underset{\vdots 2^{n-1}}{a \cdot 2^{n+1}} + \underset{\vdots 2^{n-1}}{1 \cdot 2^{n-1}} + \underset{\vdots 2^{n-1}}{b \cdot 2^n} + \underset{\not\vdots 2^{n-1}}{1 \cdot 2^{n-2}} \not\vdots 2^{n-1}$ => это аналогично не степень двойки.

3) $m = n$. $a \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-2} + b \cdot 2^n + 1 \cdot 2^{n-2} \underset{2^n}{\equiv} 2 \cdot 2^{n-2}$ => это не степень двойки (т.е. $\not\vdots 2^n$)

Значит, мы раскрасили все числа, ~~и~~ и все условие выполнено.

Ответ: можно.

11.8. $(\sin x + \cos y)^2 + (\sin y + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x \cos y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\sin y \cos x = 2 + 2(\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 2 + 2\sin(x+y)$ = сумма квадр. рац. чисел, т.е. рац. число => $\sin(x+y)$ – рац.

(т.к. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$(\sin x + \cos y + \sin y + \cos x)^2 = \left(2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 =$

$= \left(2\cos\frac{x-y}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 = 4\cos^2\frac{x-y}{2}\left(\sin^2\frac{x+y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right) =$

$= 4\cos^2\frac{x-y}{2}(1 + \sin(x+y))$ = квадр. суммы рац. чисел, т.е. рац. число.

$1 + \sin(x+y)$ – рац. => $4\cos^2\frac{x-y}{2}$ – рац. => $\cos^2\frac{x-y}{2}$ – рац.

$\cos^2\frac{x-y}{2} = \frac{\cos(x-y)+1}{2}$ – рац. => $\cos(x-y)$ – рац.

М11-50

$(\sin x + \cos y)(\cos x + \sin y) = \sin x \cos x + \cos y \cos x +$

$+ \sin y \sin x + \sin y \cos y = \sin x \cos x + \sin y \cos y + \underbrace{\cos(x-y)}_{рац.}$ - рац.

$\Downarrow$

$\sin x \cos x + \sin y \cos y$ - рац.

Пусть $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\sin y = c$, $\cos y = d$.

$ab + cd$ - рац.

$\sin(x+y) = ad + bc$ - рац.

$\cos(x-y) = ac + bd$ - рац.

$(a+b)(c+d)$ - рац.

$\Downarrow$

$(a+b)^2(c+d)^2$ - рац. $= (1+2ab)(1+2cd) =$

$= 1 + \underbrace{2ab + 2cd}_{рац.} + 4abcd$ - рац. $\Rightarrow$ $4abcd$ - рац.

$ab + cd = \sin x \cdot \cos x + \sin y \cos y$

Если $a+b$ - рац., то $a+b = \frac{k}{l}$, тогда $al + bl = k \in N$, т.е. можно найти такие m и n. Если $c+d$ - рац., то, т.к. $(a+b)(c+d)$ - рац., $(a+b)(c+d) = \frac{m}{n}$, $(a+b)(nc+nd) = m \in N$, аналогично. $\Leftarrow$ $c+d=0$?

Значит, остался случай, когда $a+b$ - иррац. и $c+d$ - иррац. При этом $(a+b)(c+d)$ - рац., $ab+cd$ - рац., $abcd$ - рац. $\Rightarrow$ ab - рац., cd - рац. $\Rightarrow$ $(a+b)^2$ - рац. $(= a^2+b^2+2ab = 1+2ab)$,

~~Значит, $(a+b)(a+b)(c+d)$~~

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 1-2 = -1$

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2}) = 2$

Т.к. $ab+cd$ - рац., $(a+b)(c+d)$ - рац., $ad+bc$ и $ac+bd$ - рац., $abcd$ - рац., найдутся такие m и n.

ч.т.д.