М9-29

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	0	28
7	7	7	7	0	

№9.1

Всего конфет – $1+\ldots+10=55$. Тогда после нечетной минуты должно быть 11 кучек, а на каждой четной – 10 (т.к. на нечетной кол-во кучек увеличивается на 1, а на четной уменьшается на один)

Значит, ~~в~~ в теории, после нечетной минуты возможно, что в каждой кучке по $55:11=5$ конфет

Пример

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 2 3 4 5 5 1 7 8 9 10

1 2 3 5 5 5 7 8 9 10

1 2 3 5 5 5 5 2 8 9 10

1 2 5 5 5 5 5 8 9 10

1 2 5 5 5 5 5 5 3 9 10

1 5 5 5 5 5 5 5 9 10

1 5 5 5 5 5 5 5 5 4 10

5 5 5 5 5 5 5 5 5 10

5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5.

№9.2

Упорядочим числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$

~~Заметим, что, если $a_n \geq 1010$, то $a_n \geq 10$~~

~~Где~~ Рассмотрим каждый вариант выбора ~~n~~ из n чисел, где n – не обязательно наибольшее для всех случаев.

Тогда, в каждом варианте ~~m~~ сделаем следующее: если даны числа $a_1 < a_2 \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$, то заменим их на $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-2}+10 < a_{n-2}+20$, ~~то~~

Заметим, что такой вариант тоже подходит, т.к. если a_{n-2} - ~~положительное~~ неотрицательное, то
$(a_{n-2})^2+(a_{n-2}+10)^2+(a_{n-2}+20)^2 \leq (a_{n-2})^2+(a_{n-1})^2+(a_n)^2 < 3000000$, т.к.
$a_{n-1}-a_{n-2} \geq 10$; $a_n-a_{n-2} \geq 20$.

Если a_{n-2} - отрицательное, $a_{n-2}<-20$, то
$(a_{n-2})^2+(a_{n-2}+10)^2+(a_{n-2}+20)^2<(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2<3000000$

Если же $0>a_{n-2}\geq -20$, то очевидно, что
$(a_{n-2})^2+(a_{n-2}+10)^2+(a_{n-2}+20)^2 < 3\cdot 20^2 < 3000000$

Заметим, что при такой замене n у каждого варианта измениться не могло, значит, можно найти наибольшее n при всех замененных вариантах.

Пример на 202

$-1009; -999; -989; \ldots -9; 9; 19; \ldots 989; 999; 1009.$

Оценка:

Возьмём 3 ~~последов~~ ~~целых~~ натуральных числа $x-10$; x; $x+10$.

Заметим, что, если

$(x-10)^2+x^2+(x+10)^2<3000000$

$3x^2+200<3000000$

$x<1000$; т.к. x - целое

Значит, $a_{n-1}<1000 \Leftrightarrow a_{n-1}\leq 999$

Пусть $n>202 \Leftrightarrow n\geq 203$

Тогда, $a_3\leq a_{n-1}-\overset{(n-4)\cdot 10}{\cancel{1990}}$ (т.к. a_i и a_{i+1} отличаются хотя бы на 10), а всего промежутков между a_3 и a_{n-1} ровно $n-4$)

Следовательно, $a_3\leq 999-\overset{1990}{\cancel{2040}}=\cancel{-1041}-991$

М9-29

Но, тогда

$3000000 < (-1011)^2 + (-1001)^2 + (-991)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Ответ: 202.

9.3.

Ответ: Коля

~~Ра~~ Раскрасим доску в шахматную раскраску. Тогда, заметим, что каждым ходом Дима убирает 1 клетку черную и ~~од~~ 1 белую.

Стратегия заключается в том, что Коля будет ставить крестик каждый раз на пустую клетку белого цвета. Заметим, что Дима не может накрыть ни один крестик, т.к. не будет, как минимум, ни одной клетки черного цвета с крестиком. Тогда, если есть хоть одна пустая клетка белого цвета, то мы не проиграем.

Заметим, что, т.к. Дима начинает первым, то ~~после~~ мы можем так играть до 16 хода, т.к. 16 + 16 = 32 (каждого цвета по 32). Но после нашего 16 хода Дима не сможет сделать ~~ходов~~, т.к. все оставшиеся белые с крестиком, а черные - без, т.е. в любой доминошке будет 1 крестик. Значит, т.к. до 16 хода Коля проиграть не мог, то Коля выигрывает.

М9-29

9.4

Пусть это неверно и такого y не существует.
Тогда при всех $1 \le y < \frac{p}{2}$, представим $py_i + 1$ как $py_i + 1 = a_i b_i$.
Заметим, что, т.к. $a_i; b_i > y_i$, то

$b_i = \frac{py_i+1}{a_i} < \frac{py_i+1}{y_i} \le p$, но, т.к. py_i+1 взаимнопросто с p, то $a_i; b_i < p$. ($a_i = \frac{py_i+1}{b_i} < \frac{py_i+1}{y_i} < p$)

Теперь пусть $a_i = a_j$ ($y_i = i$; для удобства)

$\begin{cases} py_i + 1 = a_i b_i \\ py_j + 1 = a_j b_j \end{cases}$

Но, тогда $p(y_i - y_j) = a_i(b_i - b_j)$, но $a_i < p$ и $b_i - b_j < p \Rightarrow$
$\Rightarrow b_i - b_j = 0 \Rightarrow y_i = y_j$

Значит, никакие a_i; a_j и b_i; b_j не совпадают.
Т.к. $1 \le y \le \frac{p-1}{2}$ ($p > 3$), то
$1 \le a_i; b_i \le p-1$ для всех i суммарно.
~~Значит, всего~~
Но, т.к. если $y_i p + 1 = a_i^2$, то
$y_i p = (a_i - 1)(a_i + 1) \Rightarrow$ т.к. $a_i \le p-1$, то $a_i + 1 = p$; $a_i - 1 = p - 2 = y_i$,
но, $p - 2 < \frac{p}{2} \Rightarrow p \le 3$, что неверно.
Значит, любые a_i и b_i различны.
Т.к. ~~$a_i \ne b_i$~~, всего a_i; b_i ровно ~~$y_i \cdot 2 = p$~~ $\frac{p-1}{2} \cdot 2 = p-1$, то и занимать они должны $p-1$ различное число из набора от 2 до $p-1$, но от 2 до $p-1$ всего $p-2$ числа $\Rightarrow$ какие два числа равны, противоречие.

М9-10

6	7	8	9	10	
+	+	+	∓	0	
7	7	7	2	0	23

Задача 9.~~8~~7.

Ответ: 1010

Пример

з к з к з к з к з ... к з

1010 1 1011 2 1012 3 1013 4 1014 ... 1009 2019

(з - зеленый хамелеон; к - ~~красный~~ коричневый; в примере хамелеоны упорядочены слева направо по очереди ответа; под каждым хамелеоном число, которое он ответил)

Пример верен, т.к. каждый к соврал, а каждый з сказал правду, т.к. во время любого ответа кол-во зеленых ≥ 1010; а после каждого к количество зеленых увеличивается на 1.

Оценка:

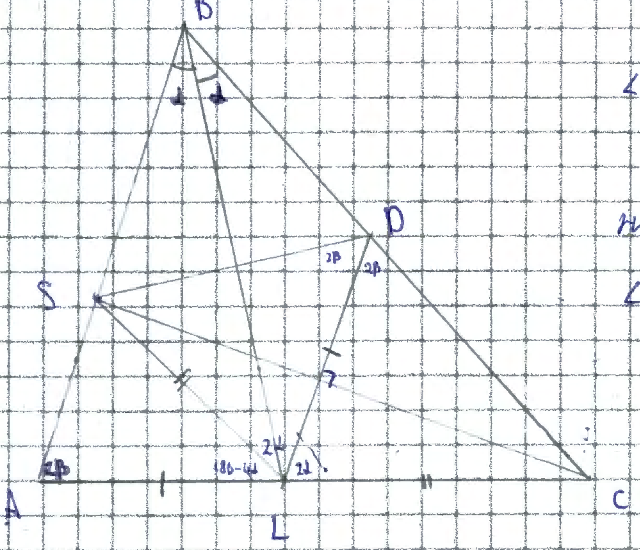
Пусть $a_i = 1$, если цвет хамелеона на i-ой позиции по очереди ответа ~~Пусть~~ зеленый и $a_i = 0$, если коричневый.

Объединим в пары a_1 и a_2; a_3 и a_4; a_5 и a_6; ... a_{2017} и a_{2018}.

Заметим, что если $a_i = a_{i+1} = 1$, при $i < 2019$, то i и $i+1$ хамелеоны сказали одно и то же, но все ответы должны быть различны. Тогда, в каждой паре есть хотя бы одно число равное 0. Следовательно, т.к. всего пар 1009, то зеленых не более, чем $2019 - 1009 = 1010$.

+

№9.8

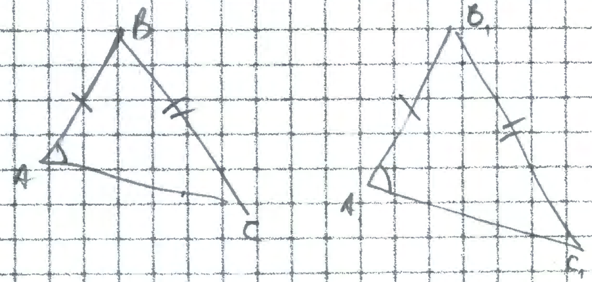


Пусть $\angle ABL = \angle LBC = \alpha$; $\angle BAC = 2\beta$

Тогда, т.к. $ABDL$ - вписанный, то $AL = LD$ и $\angle LDC = 2\beta$; $\angle DLC = 2\alpha$

При симметрии: $SL = LC$; $\angle SLD = \angle DLC = 2\alpha$

Лемма: даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Пусть $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. ~~Докажем~~ Тогда, либо $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$, либо $\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180°$



Доказательство: по теореме синусов:

$$\begin{cases} \dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \dfrac{AB}{\sin\angle BCA} \\ \dfrac{B_1C}{\sin\angle A_1B_1C_1} = \dfrac{A_1B_1}{\sin\angle B_1C_1A} \end{cases} \Rightarrow \cancel{\ldots};\ \frac{AB}{\sin\angle BCA} = \frac{A_1B_1}{\sin\angle B_1C_1A} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin\angle BCA = \sin\angle B_1C_1A_1$ ($\angle BCA, \angle B_1C_1A_1 < 180°$), значит

$$\left[\begin{array}{l} \angle BCA = \angle B_1C_1A_1 \\ \angle BCA = 180° - \angle B_1C_1A_1 \end{array}\right., \text{ ч.т.д.}$$

Тогда, рассмотрим $\triangle ASL$ и $\triangle CDL$. По лемме ($SL = LC$; $AL = LD$; $\angle BAC = \angle LDC$)
$$\left[\begin{array}{l} \angle SLA = \angle DLC \\ \angle SLA = 180° - \angle BDLC \end{array}\right.$$

Т.к. S и D – на сторонах, то $\angle ALS + \angle SLD + \angle DLC = 180^\circ \Rightarrow \angle ALS + \angle DLC < 180^\circ$

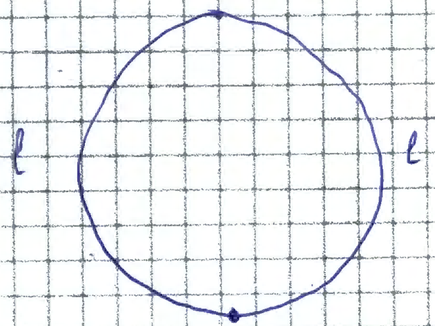
Значит, $\angle ALS = \angle DLC$. Т.к. $\angle DLC = 2\alpha = \angle SLD$, то $\angle ALS = 180^\circ - 4\alpha$

Тогда, $180^\circ - 4\alpha = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$

+

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$

№ 9.6.



Пусть длина дорожки – $2l$, $v_м$ – скорость Миши; $v_п$ – скорость Пети.

Пусть Миша сначала пробежал полкруга, т.е. l, тогда Петя за это время пробежал $l\frac{v_п}{v_м} < l$, т.к. $v_п < v_м$.

Значит, если ~~Петя~~ Миша развернется, то встретит Петю, тогда Миша уже 1 раз поравнялся с Петей.

Дальше, Миша побежит до начальной точки. Заметим, что когда Миша добежит до старта, то Петя ещё не пробежит круг – ему останется $2l - 2l\frac{v_п}{v_м} = 0{,}04l > 0$.

Пусть Миша будет бежать дальше до момент их встречи (2 раз поравнялся). На момент встречи они оба будут на расстоянии $\frac{v_м}{v_м + v_п} \cdot 0{,}04l = \frac{1{,}02}{2{,}02} \cdot 0{,}04l = S > 0$

Миша пробегает ещё очень малую часть пути, например $\frac{S}{10^{10}} > 0$. Осталось доказать, что теперь после разворота (на данный момент Миша проехал больше полкруга в одной направлений). Миша приедет к началу раньше Пети, или же, что $\frac{S+\frac{S}{10^{10}}}{v_м} < \frac{S-\frac{S}{10^{10}}\cdot\frac{v_п}{v_м}}{v_п} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{v_м} + \frac{S}{10^{10} v_м} < \frac{S}{v_п} - \frac{S}{10^{10} v_м}$$

$$\frac{S}{v_м} + \frac{2S}{10^{10} v_м} < \frac{S}{v_п}$$

$$\frac{1}{v_м} + \frac{2}{10^{10} v_м} < \frac{1}{v_п}$$

$$10^{10} v_п + 2 v_п < 10^{10} v_м$$

$$2 v_п < 10^{10} (v_м - v_п)$$

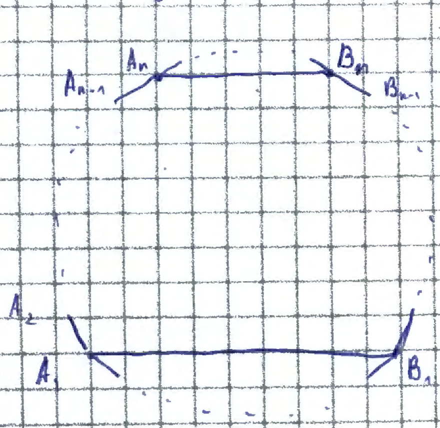
$$2 v_п < 10^{10} \cdot 0{,}02 v_п$$

$2 < 10^{10} \cdot 0{,}02$, что очевидно верно. +

№9.9

Ответ: нет.

Допустим, что нашёлся хороший многоугольник (в нем m вершин).



(„сверху" и „снизу" от параллельных прямых может и не быть вершин, но это неважно)

Пронумеруем вершины, как на картинке.

Заметим, что A_i и B_j будет поровну, т.к. если вписать правильный многоугольник в окружность, то параллельные прямые будут высекать равные дуги $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в A_i и B_i одинаковое число, т.к. ~~$A_1A_2 \ldots A$~~ все расстояния между последовательными вершинами равны.

Также, вершины всех полученных многоугольников лежат ~~на~~ в вершинах начального, потому что ~~все~~ у разрезов нет общих внутренних точек.

Также, очевидно, что все разрезы теперь не могут быть ~~только~~ между A_i и B_j, т.е. если разрез начался в A_i, то закончится только в A_j; в B_i, то закончится в B_j (если есть разрез A_iB_j, то многоугольника со сторонами A_1B_1 и A_nB_n быть не может), а многоугольник содержащий A_1B_1 и A_nB_n ~~со~~ оставшиеся вершины содержит только из $A_2, A_3 \dots A_{n-1}$ и $B_2, B_3, \dots B_{n-1}$.

Пусть $c_1, c_2, \dots c_a$ — количество подряд идущих точек не содержащихся в хорошем (выбранном нами) многоугольнике из $A_2, \dots A_{n-1}$, где $a-1$ ~~a~~ — количество ~~выбранных~~ содержащих в хорошем много-ке из $A_2, \dots A_{n-1}$ (c_i может быть равно 0). То же самое для $d_1, d_2, \dots d_b$ и b.

Заметим, что каждый c_i и d_i образует выпуклый (т.к. если выпуклый мн-ник разделить на 2 по диагонали, то получится 2 выпуклых) многоугольник из c_i+2 вершины и d_i+2 соответственно, каждый из которых нужно разделить на многоугольники по m вершин.

Лемма: при любом способе разреза n-угольника на m-угольники по диагоналям всегда получится $\frac{n-2}{m-2}$ m-угольника.

Док-во: Сумма углов n-угольника: $(n-2)180°$, тогда т.к. все вершины m-угольников в вершинах n-угольника, то $(n-2)180° = k(m-2)180°$, где k — кол-во разрезанных m-угольников, ч.т.д.

Мg-10

$d_i = l_i m - 2l_i \quad \left(l_i = \frac{d_i - 2 + 2}{m-2}\right)$

Тогда; $c_i = k_i m - 2k_i \quad \left(k_i = \frac{c_i - 2 + 2}{m-2}\right)$, значит

$\sum c_i = \sum k_i m - 2\sum k_i$

$\sum d_i = \sum l_i m - 2\sum k_i l_i$

Но, $\sum c_i + a + 2 = n = \sum d_i + b + 2$, тогда, т.к. m — нечетное, то каждый многоугольник добавляет равное число вершин.

дальше?

+