Критерии проверки развернутых ответов

ВАРИАНТ №1151

Задание 13

а) Решите уравнение $9^{\cos x}+9^{-\cos x}=\frac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

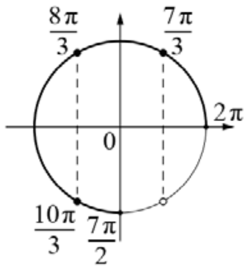
Решение.

а) Пусть $t=9^{\cos x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$, откуда $t=3$ или $t=\frac{1}{3}$.

При $t=3$ получим: $9^{\cos x}=3$, откуда $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

При $t=\frac{1}{3}$ получим: $9^{\cos x}=\frac{1}{3}$, откуда $\cos x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
$\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

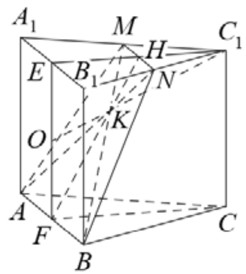
Задание 14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка M – середина ребра A_1C_1, а точка O – точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1.

а)Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB, лежит на отрезке OC_1.

б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB.

Решение.



а) Пусть плоскость AMB пересекает прямую B_1C_1 в точке N. Тогда сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB — четырёхугольник $AMNB$.
Плоскость AMB пересекает плоскости AB_1C_1 и BA_1C_1 по прямым AN и MB соответственно, а плоскости AB_1C_1 и BA_1C_1 пересекаются по прямой OC_1. Значит, точка пересечения плоскостей AMB, AB_1C_1 и BA_1C_1 принадлежит каждой из прямых AN, MB и OC_1, то есть точка пересечения диагоналей четырёхугольника $AMNB$ лежит на отрезке OC_1.

б) Пусть прямые AN, MB и OC_1 пересекаются в точке K, а плоскость COC_1 пересекает прямые AB, A_1B_1 и MN в точках F, E и H соответственно. Поскольку O — точка пересечения диагоналей прямоугольника ABB_1A_1, точки F и E являются серединами отрезков AB и A_1B_1 соответственно. Следовательно, прямые OF и CF перпендикулярны прямой AB. Значит, плоскость COC_1 перпендикулярна прямой AB и содержащей её плоскости AMB. Таким образом, искомый угол равен углу C_1KH.
Прямые A_1B_1 и MN параллельны, следовательно, MN — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, а значит, точка H — середина отрезка EC_1.
В треугольнике EFC_1 медианы пересекаются в точке K. Имеем:

$$C_1H=\frac{\sqrt{3}}{2},\ C_1K=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{EF^2}{4}+C_1E^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ KH=\frac{1}{3}\sqrt{EF^2+\frac{C_1E^2}{4}}=\frac{7\sqrt{3}}{6};$$

$$\cos\angle HKC_1=\frac{KH^2+C_1K^2-C_1H^2}{2\cdot KH\cdot C_1K}=\frac{13}{14}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{13}{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15

Решите неравенство $\log_2\left((x-1)\left(x^2+2\right)\right)\le 1+\log_2\left(x^2+3x-4\right)-\log_2 x$

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_2\left((x-1)\left(x^2+2\right)\right)\le 1+\log_2\left((x-1)(x+4)\right)-\log_2 x;$$

$$\log_2(x-1)+\log_2\left(x^2+2\right)\le 1+\log_2(x-1)+\log_2(x+4)-\log_2 x.$$

Неравенство определено при $x>1$, поэтому при $x>1$ неравенство принимает вид:

$$x^2+2\le\frac{2x+8}{x};\ \frac{x^3-8}{x}\le 0;\ \frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x}\le 0,$$

откуда $0<x\le 2$. Учитывая ограничение $x>1$, получаем: $1<x\le 2$.

Ответ: $(1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

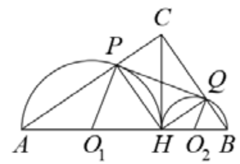
Задание 16

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $(tg\angle ABC)^4$.

б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH, вторично пересекающей отрезок AC в точке P, а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH, вторично пересекающей отрезок BC в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2, если $AC=12$, $BC=10$.

Решение.



а) Заметим, что $\angle ACH=90°-\angle CAB=\angle ABC$.

Отношение площадей кругов, построенных на отрезках AH и BH, равно квадрату отношения их диаметров:

$$\left(\frac{AH}{BH}\right)^2=\left(\frac{AH\cdot CH}{BH\cdot CH}\right)^2=\left(\frac{AH}{CH}\cdot\frac{CH}{BH}\right)^2=$$

$$=\left(\operatorname{tg}\angle ACH\cdot\operatorname{tg}\angle ABC\right)^2=\left(\operatorname{tg}\angle ABC\right)^4.$$

б) Точки P и Q лежат на окружностях диаметрами AH и BH соответственно, значит, $\angle APH=\angle HQB=90°$.

Следовательно, четырёхугольник $PCQH$ — прямоугольник. Значит, площадь S_{PQH} треугольника PQH равна половине площади S_{CPHQ} прямоугольника $CPHQ$. Поскольку PO_1 и QO_2 являются медианами треугольников APH и HQB соответственно, площадь S_{O_1PH} треугольника O_1PH равна половине площади S_{APH} треугольника APH, а площадь S_{O_2QH} треугольника O_2QH равна половине площади S_{HQB} треугольника HQB.

Следовательно, площадь четырёхугольника O_1PQO_2 равна

$$S_{O_1PH}+S_{PQH}+S_{O_2QH}=\frac{1}{2}S_{APH}+\frac{1}{2}S_{CPHQ}+\frac{1}{2}S_{HQB}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{AC\cdot BC}{4}=30.$$

Ответ: б) 30.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17

В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на сумму 177 120 рублей. Условие его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на *25%* по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года).

Решение.

Пусть сумма кредита составляет $S = 177\,120$ (рублей), а ежегодные выплаты X рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ \frac{5}{4}\cdot S - X,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2 S - \frac{5}{4}\cdot X - X,\ \left(\frac{5}{4}\right)^3 S - \left(\frac{5}{4}\right)^2 X - \frac{5}{4}\cdot X - X,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4 S - \left(\frac{5}{4}\right)^3 X - \left(\frac{5}{4}\right)^2 X - \frac{5}{4}\cdot X - X = 0,$$

откуда

$$X = \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{4}-1\right)}{\left(\left(\frac{5}{4}\right)^4 - 1\right)}\cdot S = \frac{625}{1476}\cdot S.$$

Получаем $X = 75\,000$ (рублей). Значит, банку будет выплачено 300 000 рублей.

Ответ: 300 000.

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 18

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $x^2 - a(a+1)x + a^3 = 0$, для которых выполнено условие $2 + x - x^2 > 0$.

Поскольку

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 = (x-a)\left(x-a^2\right),$$

уравнение $x^2 - a(a+1)x + a^3 = 0$ задаёт на плоскости Oxa параболу $x = a^2$ и прямую $x = a$, пересекающиеся в точках $(0;0)$ и $(1;1)$. Значит, это уравнение имеет один корень при $a = 0$ и $a = 1$ и имеет два корня при остальных значениях a.

Координаты точек параболы $x = a^2$, удовлетворяющие неравенству $2 + x - x^2 > 0$, являются решениями системы:

$$\begin{cases} 2+x-x^2>0, \\ x=a^2; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+1)<0, \\ x=a^2; \end{cases} \begin{cases} \left(a^2-2\right)\left(a^2+1\right)<0, \\ x=a^2; \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}, \\ x=a^2. \end{cases}$$

Координаты точек прямой $x = a$, удовлетворяющие неравенству $2 + x - x^2 > 0$, являются решениями системы:

$$\begin{cases} 2+x-x^2>0, \\ x=a; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+1)<0, \\ x=a; \end{cases} \begin{cases} (a-2)(a+1)<0, \\ x=a; \end{cases} \begin{cases} -1<a<2, \\ x=a. \end{cases}$$

Следовательно, условие $2+x-x^2>0$ выполнено для всех корней уравнения $x^2-a(a+1)x+a^3=0$ при $-1<a<\sqrt{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-1<a<0$; $0<a<1$; $1<a<\sqrt{2}$.

Ответ: $-1<a<0$; $0<a<1$; $1<a<\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$ и / или $a=1$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получен или промежуток $(-1;2)$, или промежуток $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ множества значений a, возможно, с исключением точек $a=0$ и / или $a=1$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых и параболы (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Задание 19

Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q=34$. Найдите все возможные значения p.

б) Пусть $p+q=22$. Найдите все возможные значения q.

в)Пусть $q^2-p^2=2812$.Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Решение.

а) Пусть a и b — натуральные корни уравнения $x^2+px+q=0$, причём $a<b$. Тогда

$$p=-a-b,\ q=ab.$$

Поскольку $q=34$, либо $a=1$, $b=34$, тогда $p=-35$, либо $a=2$, $b=17$, тогда $p=-19$.

б) Если $p+q=22$, получаем:

$$ab-a-b=22;\ (a-1)(b-1)-1=22;\ (a-1)(b-1)=23.$$

Значит, $a=2$, $b=24$, тогда $q=48$.

в) Заметим, что $2812=2\cdot 2\cdot 37\cdot 19$, а числа $p-q$ и $p+q$ имеют одинаковую чётность. Следовательно, поскольку $q^2-p^2=(q-p)(q+p)$ и $p<0$, получаем два случая.

В первом случае:

$$\begin{cases} q-p=2\cdot 37\cdot 19, \\ q+p=2; \end{cases} \begin{cases} q=704, \\ p=-702. \end{cases}$$

Значит, исходное уравнение принимает вид $x^2-702x+704=0$. Заметим, что $1^2-702\cdot 1+704>0$, а $2^2-702\cdot 2+704<0$. Следовательно, уравнение $x^2-702x+704=0$ не имеет двух натуральных корней. Этот случай не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае:

$$\begin{cases} q-p=2\cdot 37, \\ q+p=2\cdot 19; \end{cases} \begin{cases} q=56, \\ p=-18. \end{cases}$$

Значит, исходное уравнение принимает вид $x^2-18x+56=0$ и имеет корни $a=4$ и $b=14$.

Ответ: а) -35; -19; б) 48; в) 4; 14.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ №1152

Задание 13

а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

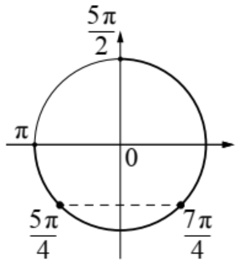
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$6 - 6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0;\ \left(2\sin x + \sqrt{2}\right)\left(3\sin x - 4\sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14

Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M – середина образующей SA конуса, а точки N и B лежат на основании конуса, причем прямая MN параллельна образующей конуса SB.

а) Докажите, что $\angle ANO$ – прямой.

б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB=8$.

Решение.

а) Поскольку точка M — середина образующей SA, а прямая MN параллельна образующей SB, точка N — середина отрезка AB (рис. 1). Медиана NO равнобедренного треугольника AOB является его высотой. Таким образом, $\angle ANO = 90°$.

б) Пусть точка H — середина отрезка AO (рис. 2). Средняя линия MH треугольника ASO параллельна высоте конуса SO, а значит, прямая MH перпендикулярна плоскости основания конуса. Следовательно, угол между прямой BM и плоскостью основания конуса равен углу MBH.

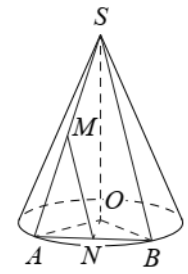


Рис. 1

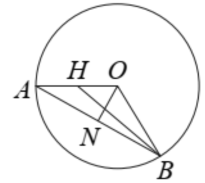


Рис. 2

В треугольнике AOB:

$$\cos\angle OAB = \frac{AN}{AO} = 0{,}8;$$

$$BH = \sqrt{AH^2 + AB^2 - 2AH \cdot AB \cdot \cos\angle OAB} = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

В треугольнике MHB:

$$MH = \frac{\sqrt{51}}{2};\ \operatorname{tg}\angle MBH = \frac{MH}{HB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

откуда $\angle MBH = 30°$.

Ответ: б) $30°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15

Решите неравенство $\frac{3^{x+3}-3^{-x}}{3^{1-x}-9^{-x}} \ge 3^x$

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{27\cdot 3^{3x}-3^{x}}{3\cdot 3^{x}-1} \ge 3^{x}.$$

Пусть $t=3^{x}$, тогда полученное неравенство примет вид:

$$\frac{27t^{3}-t}{3t-1} \ge t;\ \frac{27t^{3}-3t^{2}}{3t-1} \ge 0;\ \frac{t^{2}(9t-1)}{3t-1} \ge 0,$$

откуда $t \le \frac{1}{9}$; $t > \frac{1}{3}$.

При $t \le \frac{1}{9}$ получим: $3^{x} \le \frac{1}{9}$, откуда $x \le -2$.

При $t > \frac{1}{3}$ получим: $3^{x} > \frac{1}{3}$, откуда $x > -1$.

Решение исходного неравенства: $x \le -2$; $x > -1$.

Ответ: $(-\infty; -2]$; $(-1; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16

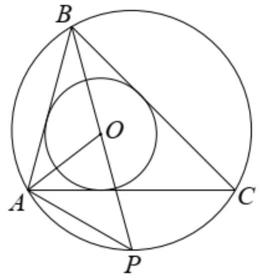
Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 10, $\angle BAC = 75°, \angle ABC = 60°$.

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Решение.



а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи AO и BO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POA является внешним углом треугольника AOB. Следовательно,

$$\angle POA = \angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Углы PAC и PBC равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PAO = \angle PAC + \angle OAC = \angle PBC + \angle OAC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Таким образом, $\angle POA = \angle PAO$.

б) Пусть $R=10$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку $\angle POA = \angle PAO$, треугольник APO равнобедренный, следовательно,

$$OP = AP = 2R\sin\angle ABP = 2R\sin 30° = 10.$$

Таким образом, площадь треугольника APO равна

$$\frac{AP\cdot OP\cdot \sin\angle APO}{2} = \frac{AP^{2}\cdot \sin\angle ACB}{2} = \frac{AP^{2}\cdot \sin 45°}{2} = 25\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $25\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 17 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условие его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на *10%* по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составляет 3,4 млн рублей?
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся)

Решение.
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$17;\ \frac{17(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{17\cdot 2}{n};\ \frac{17}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$18{,}7;\ \frac{18{,}7(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{18{,}7\cdot 2}{n};\ \frac{18{,}7}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1{,}7+\frac{17}{n};\ \frac{1{,}7(n-1)+17}{n};\ \ldots;\ \frac{1{,}7\cdot 2+17}{n};\ \frac{1{,}7+17}{n}.$$

Получаем: $1{,}7+\frac{17}{n}=3{,}4$, откуда $n=10$. Значит, всего следует выплатить

$$17+1{,}7\left(1+\frac{9}{10}+\ldots+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=17+1{,}7\cdot\frac{11}{2}=26{,}35 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 26,35 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 18

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{\cos x - a\sin x}=\sqrt{a\cos x-\sin x}$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

Решение.
Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos x - a\sin x = a\cos x-\sin x,\\ \cos x\ge a\sin x;\end{cases}\quad \begin{cases}(\cos x+\sin x)(a-1)=0,\\ \cos x\ge a\sin x.\end{cases}$$

Из первого уравнения получившейся системы получаем, что либо $a=1$, либо $\operatorname{tg} x=-1$.

При $a=1$ неравенство системы принимает вид $\cos x\ge\sin x$. Значит, исходное уравнение имеет корни на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$, например, $x=\frac{\pi}{4}$.

При $\operatorname{tg} x=-1$ получаем $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Значит, на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ единственным корнем исходного уравнения может быть только $x=\frac{3\pi}{4}$.

В этом случае неравенство системы принимает вид $-1\ge a$.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ при $a\le-1$; $a=1$.

Ответ: $a\le-1$; $a=1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точки $a=-1$	3
Задача верно сведена к исследованию уравнения $(\cos x+\sin x)(a-1)=0$, и получен промежуток $(-\infty;-1]$ множества значений a, возможно, с исключением точки $a=-1$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию корней уравнения $(\cos x+\sin x)(a-1)=0$ и получена точка $a=1$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19

В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(76-2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Тогда

$$85k+124k+100\cdot(76-2k)=7600;\ 9k=0,$$

но все фрукты не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Тогда

$$85k+100m+124n=100\cdot(k+m+n);\ 8n=5k.$$

Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты,

$$k=8s,\ n=5t;\ 40s=40t;\ s=t.$$

Таким образом, $k+n=8s+5s=13s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 13, и $13s\le 76$, то есть $s\le 5$ и $k+n\le 65$. Значит,

$$m=76-(k+n)\ge 76-65=11.$$

Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда

$$124n\ge x+101\cdot(n-1);\ x\le 23n+101.$$

В пункте *б* было показано, что $n=5s$ и $s\le 5$, значит,

$$n\le 25;\ x\le 23\cdot 25+101;\ x\le 676.$$

Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 676 г. Если в ящике 40 фруктов массой 85 г, 11 фруктов массой 100 г, 24 фрукта массой 101 г и 1 фрукт массой 676 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 676 г.

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ №1153

Задание 13

а) Решите уравнение $4^{\sin x}+4^{-\sin x}=\frac{5}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

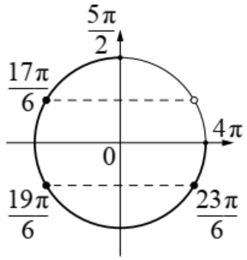
Решение.

а) Пусть $t=4^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, откуда $t=2$ или $t=\frac{1}{2}$.

При $t=2$ получим: $4^{\sin x}=2$, откуда $\sin x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

При $t=\frac{1}{2}$ получим: $4^{\sin x}=\frac{1}{2}$, откуда $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро рано 10. Точки M и N– середины ребер BB_1 и A_1C_1 соответственно, а точка Q лежит на ребре B_1C_1, причем B_1Q: QC_1=1:2.

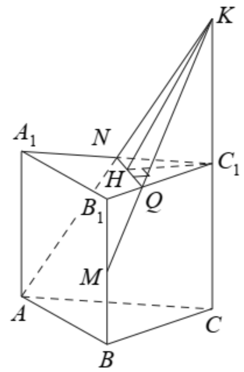
а) Докажите, что прямые AN и MQ лежат в одной плоскости.
б) Найдите угол между плоскостями AMN и ABC.

Решение.

а) Пусть прямые AN и CC_1 пересекаются в точке K. Тогда $KC_1=AA_1$. Пусть прямая KQ пересекает прямую BB_1 в точке M'. Тогда

$$B_1M':C_1K=B_1Q:QC_1=1:2,$$

откуда $B_1M'=\frac{C_1K}{2}=\frac{AA_1}{2}=\frac{BB_1}{2}=B_1M$. Значит, плоскость ANQ содержит точку M. Следовательно, прямые AN и MQ лежат в одной плоскости.



б) Пусть C_1H — высота треугольника NC_1Q. Поскольку прямая KC_1 перпендикулярна плоскости ABC, а плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, искомый угол равен углу KHC_1.

В треугольнике NC_1Q имеем:

$$C_1N=3,\ C_1Q=4;\ NQ=\sqrt{C_1N^2+C_1Q^2-2\cdot C_1N\cdot C_1Q\cdot\cos\angle NC_1Q}=\sqrt{13}.$$

Площадь треугольника NC_1Q равна

$$\frac{C_1N\cdot C_1Q\cdot\sin\angle NC_1Q}{2}=3\sqrt{3}.$$

С другой стороны, площадь треугольника NC_1Q равна $\frac{NQ\cdot C_1H}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot C_1H$, значит, $C_1H=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Из треугольника KHC_1 находим $\operatorname{tg}\angle KHC_1=\frac{KC_1}{C_1H}=\frac{AA_1}{C_1H}=\frac{5\sqrt{39}}{9}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{39}}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15

Решите неравенство $\log_2\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \ge 1+\log_2\left(12-x-x^2\right)-\log_2 x$

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_2\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \ge 1+\log_2\left((3-x)(x+4)\right)-\log_2 x;$$

$$\log_2(3-x)+\log_2\left(x^2+2\right) \ge 1+\log_2(3-x)+\log_2(x+4)-\log_2 x.$$

Неравенство определено при $0<x<3$, поэтому при $0<x<3$ неравенство принимает вид:

$$x^2+2 \ge \frac{2x+8}{x};\ \frac{x^3-8}{x} \ge 0;\ \frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x} \ge 0,$$

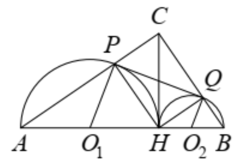
откуда $x<0$; $x \ge 2$. Учитывая ограничение $0<x<3$, получаем: $2 \le x<3$.
Ответ: $[2;3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16

Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH.
а) Докажите, что отношение длин окружностей, построенных на отрезках AH и BH соответственно как на диаметрах равно $(tg\angle ABC)^2$.
б) Пусть точка O_1 — центр окружности диаметра AH, вторично пересекающей отрезок AC в точке P, а точка O_2 — центр окружности с диаметром BH, вторично пересекающей отрезок BC в точке Q. Найдите площадь четырёхугольника O_1PQO_2, если $AC=24,\ BC=7$.

Решение.



а) Заметим, что $\angle ACH = 90° - \angle CAB = \angle ABC$.
Отношение длин окружностей, построенных на отрезках AH и BH, равно отношению их диаметров:

$$\frac{AH}{BH}=\frac{AH\cdot CH}{BH\cdot CH}=\frac{AH}{CH}\cdot\frac{CH}{BH}=$$

$$=\operatorname{tg}\angle ACH\cdot\operatorname{tg}\angle ABC=\left(\operatorname{tg}\angle ABC\right)^2.$$

б) Точки P и Q лежат на окружностях диаметрами AH и BH соответственно, значит, $\angle APH=\angle HQB=90°$.
Следовательно, четырёхугольник $PCQH$ — прямоугольник. Значит, площадь S_{PQH} треугольника PQH равна половине площади S_{CPHQ} прямоугольника $CPHQ$. Поскольку PO_1 и QO_2 являются медианами треугольников APH и HQB соответственно, площадь S_{O_1PH} треугольника O_1PH равна половине площади S_{APH} треугольника APH, а площадь S_{O_2QH} треугольника O_2QH равна половине площади S_{HQB} треугольника HQB.
Следовательно, площадь четырёхугольника O_1PQO_2 равна

$$S_{O_1PH}+S_{PQH}+S_{O_2QH}=\frac{1}{2}S_{APH}+\frac{1}{2}S_{CPHQ}+\frac{1}{2}S_{HQB}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{AC\cdot BC}{4}=42.$$

Ответ: б)42

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17

В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условие его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на *20%* по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S рублей, а ежегодные выплаты $X=\frac{311\,040}{4}=77\,760$ (рублей). По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ \frac{6}{5}\cdot S-X,\ \left(\frac{6}{5}\right)^2 S-\frac{6}{5}\cdot X-X,\ \left(\frac{6}{5}\right)^3 S-\left(\frac{6}{5}\right)^2 X-\frac{6}{5}\cdot X-X,$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S-\left(\frac{6}{5}\right)^3 X-\left(\frac{6}{5}\right)^2 X-\frac{6}{5}\cdot X-X=0,$$

откуда

$$S=\frac{\left(\left(\frac{6}{5}\right)^4-1\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{6}{5}-1\right)}\cdot X=\frac{3355}{1296}\cdot X.$$

Получаем $S=201\,300$ (рублей).

Ответ: 201 300.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Задание 18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(a+x+3)\left(x^2+a^2-5\right)}{\sqrt{-4x-x^2}}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $(a+x+3)\left(x^2+a^2-5\right)=0$, для которых выполнено условие $-4x-x^2>0$.

Уравнение $(a+x+3)\left(x^2+a^2-5\right)=0$ задаёт на плоскости Oxa окружность ω радиусом $\sqrt{5}$ с центром в точке $(0;0)$ и прямую l, заданную уравнением $a=-x-3$. Окружность ω и прямая l пересекаются в точках $(-2;-1)$ и $(-1;-2)$.

Координаты точек окружности ω, удовлетворяющие неравенству $-4x-x^2>0$, являются решениями системы:

$$\begin{cases}-4x-x^2>0,\\ x^2+a^2=5;\end{cases}\ \begin{cases}x(x+4)<0,\\ x^2+a^2=5;\end{cases}\ \begin{cases}-4<x<0,\\ x^2+a^2=5;\end{cases}\ \begin{cases}-4<x<0,\\ x=-\sqrt{5-a^2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4<-\sqrt{5-a^2}<0,\\ x=-\sqrt{5-a^2};\end{cases}\ \begin{cases}0<\sqrt{5-a^2}<4,\\ x=-\sqrt{5-a^2};\end{cases}\ \begin{cases}0<5-a^2<16,\\ x=-\sqrt{5-a^2};\end{cases}\ \begin{cases}-\sqrt{5}<a<\sqrt{5},\\ x=-\sqrt{5-a^2}.\end{cases}$$

Значит, окружность ω имеет единственную точку, координаты которой удовлетворяют неравенству $-4x-x^2>0$, при $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ и не имеет таких точек при других значениях a.

Координаты точек прямой l, удовлетворяющие неравенству $-4x-x^2>0$, являются решениями системы:

$$\begin{cases}-4x-x^2>0,\\ a=-x-3;\end{cases}\ \begin{cases}x(x+4)<0,\\ x=-a-3;\end{cases}\ \begin{cases}(a+3)(a-1)<0,\\ x=-a-3;\end{cases}\ \begin{cases}-3<a<1,\\ x=-a-3.\end{cases}$$

Значит, прямая l имеет единственную точку, координаты которой удовлетворяют неравенству $-4x-x^2>0$, при $-3<a<1$ и не имеет таких точек при других значениях a.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-\sqrt{5}<a<-2$; $-2<a<-1$; $-1<a<1$.

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-2$; $-2<a<-1$; $-1<a<1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-1$ и / или $a=-2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получен или промежуток $(-3;1)$, или промежуток $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ множества значений a, возможно, с исключением точек $a=-1$ и / или $a=-2$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19

Квадратное уравнение $x^2-px+q=0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q=77$.Найдите все возможные значения p.

б) Пусть $q-p=12$.Найдите все возможные значения q.

в) Пусть $q+p=272$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Решение.

а) Пусть a и b — натуральные корни уравнения $x^2-px+q=0$, причём $a<b$. Тогда

$$p=a+b,\ q=ab.$$

Поскольку $q=77$, либо $a=1$, $b=77$, тогда $p=78$, либо $a=7$, $b=11$, тогда $p=18$.

б) Если $q-p=12$, получаем:

$$ab-a-b=12;\ (a-1)(b-1)-1=12;\ (a-1)(b-1)=13.$$

Значит, $a=2$, $b=14$, тогда $q=28$.

в) Если $q+p=272$, получаем:

$$272=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1;\ (a+1)(b+1)=273.$$

Поскольку $a<b$, получаем $(a+1)^2<273$, откуда $a+1\le 16$. При этом $a\ge 1$ и $a+1$ является делителем числа $273=3\cdot 7\cdot 13$. Значит, $a=2$, $a=6$ или $a=12$. В этих случаях $b=90$, $b=38$ или $b=20$ соответственно. Таким образом, исходное уравнение может иметь корни 2; 6; 12; 20; 38 и 90.

Ответ: а) 78; 18; б) 28; в) 2; 6; 12; 20; 38; 90.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ №1154

Задание 13

а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

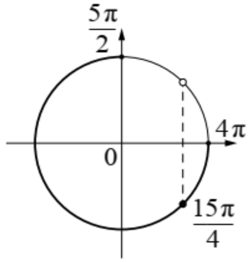
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0;\ \left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\left(\sqrt{2}\cos x + 3\right) = 0.$$

Значит, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\cos x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



Получим число $\frac{15\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{15\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

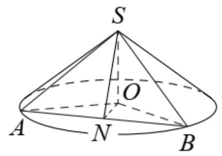
Задание 14

Радиус основания конуса с вершиной S равен 11, а его высота равна 7. Точки A и B лежат на окружности основания конуса, причем площадь треугольника ABS равна 85.

а) Докажите, что $\angle ASB = 90°$.

б) Найдите угол между плоскостью ABS и плоскостью основания конуса.

Решение.



а) Пусть точка O — центр основания конуса. В прямоугольном треугольнике ASO:

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 = 170.$$

Площадь треугольника ABS равна

$$\frac{SA \cdot SB \cdot \sin\angle ASB}{2} = \frac{SA^2 \cdot \sin\angle ASB}{2} = 85\sin\angle ASB.$$

По условию, площадь треугольника ASB равна 85. Значит, $\angle ASB = 90°$.

б) Пусть точка N — середина отрезка AB. Тогда медиана SN равнобедренного треугольника ABS перпендикулярна стороне AB, и медиана ON равнобедренного треугольника AOB перпендикулярна стороне AB. Следовательно, плоскость SON перпендикулярна прямой AB, а значит, искомый угол равен углу SNO.

В прямоугольном треугольнике ANO:

$$ON = \sqrt{AO^2 - AN^2} = \sqrt{AO^2 - \frac{AS^2}{2}} = 6.$$

В прямоугольном треугольнике SNO:

$$\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{SO}{ON} = \frac{7}{6}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15

Решите неравенство $\dfrac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}} \ge 2^x$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{32\cdot 2^{3x}-2^x}{8\cdot 2^x-1} \ge 2^x.$$

Пусть $t=2^x$, тогда полученное неравенство примет вид:

$$\frac{32t^3-t}{8t-1} \ge t;\ \frac{32t^3-8t^2}{8t-1} \ge 0;\ \frac{t^2(4t-1)}{8t-1} \ge 0,$$

откуда $t<\frac{1}{8}$; $t \ge \frac{1}{4}$.

При $t<\frac{1}{8}$ получим: $2^x<\frac{1}{8}$, откуда $x<-3$.

При $t \ge \frac{1}{4}$ получим: $2^x \ge \frac{1}{4}$, откуда $x \ge -2$.

Решение исходного неравенства: $x<-3$; $x \ge -2$.

Ответ: $(-\infty;-3)$; $[-2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Задание 16

Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

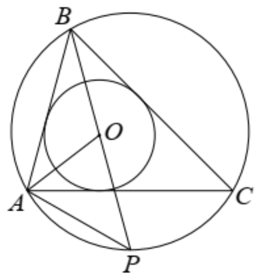
а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 60°$.

Решение.

а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи AO и BO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POA является внешним углом треугольника AOB. Следовательно,

$$\angle POA = \angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC.$$



Углы PAC и PBC равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PAO = \angle PAC + \angle OAC = \angle PBC + \angle OAC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Таким образом, $\angle POA = \angle PAO$.

б) Пусть $R=8$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку $\angle POA = \angle PAO$, треугольник APO равнобедренный, следовательно,

$$OP = AP = 2R\sin\angle ABP = 2R\sin 30° = 8.$$

Таким образом, площадь треугольника APO равна

$$\frac{AP\cdot OP\cdot \sin\angle APO}{2} = \frac{AP^2\cdot \sin\angle ACB}{2} = \frac{AP^2\cdot \sin 45°}{2} = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условие его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на *25%* по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составляет 9 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся)

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$28;\ \frac{28(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{28\cdot 2}{n};\ \frac{28}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$35;\ \frac{35(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{35\cdot 2}{n};\ \frac{35}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$7+\frac{28}{n};\ \frac{7(n-1)+28}{n};\ \ldots;\ \frac{7\cdot 2+28}{n};\ \frac{7+28}{n}.$$

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Получаем: $7+\frac{28}{n}=9$, откуда $n=14$. Значит, всего следует выплатить

$$28+7\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=28+7\cdot\frac{15}{2}=80{,}5 \text{ (млн рублей)}.$$

Ответ: 80,5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 18

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\sin 3x + a\cos x = 0$ не имеет корней на интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

Исходное уравнение принимает вид:

$$\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x+a\sin x=0;\ 4\sin x\cos^2 x-\sin x+a\sin x=0;$$
$$\sin x\cdot\left(4\cos^2 x-1+a\right)=0.$$

Заметим, что на интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ выражение $\sin x$ принимает только положительные значения, а выражение $4\cos^2 x$ принимает все значения из интервала $(2;4)$. Таким образом, если исходное уравнение имеет корни на интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, то $1-a=4\cos^2 x$, откуда $2<1-a<4$; $-3<a<-1$.

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней на интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ при $a\le -3$; $a\ge -1$.

Ответ: $a\le -3$; $a\ge -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-3$ и / или $a=-1$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $(a=-3,\ a=-1)$, но неверно определены промежутки значений a ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию корней уравнения $4\cos^2 x-1+a=0$ или равносильного ему	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19

В ящике лежит 87 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 94 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 127 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 9 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Региональная оценка качества образования 2020г. Математика 11 класс профильный уровень

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(87-2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Тогда

$$94k+127k+100\cdot(87-2k)=8700;\ 21k=0,$$

но все фрукты не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Тогда

$$94k+100m+127n=100\cdot(k+m+n);\ 9n=2k.$$

Поскольку числа 2 и 9 взаимно просты,

$$k=9s,\ n=2t;\ 18s=18t;\ s=t.$$

Таким образом, $k+n=9s+2s=11s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 11, и $11s\le 87$, то есть $s\le 7$ и $k+n\le 77$. Значит,

$$m=87-(k+n)\ge 87-77=10.$$

Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 9 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда

$$127n\ge x+101\cdot(n-1);\ x\le 26n+101.$$

В пункте *б* было показано, что $n=2s$ и $s\le 7$, значит,

$$n\le 14;\ x\le 26\cdot 14+101;\ x\le 465.$$

Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 465 г. Если в ящике 63 фрукта массой 94 г, 10 фруктов массой 100 г, 13 фруктов массой 101 г и 1 фрукт массой 465 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 465 г.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4