

Критерии ответов к письменной части

21

Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Решение:

$$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) < 0$$

Найдём нули функции: $x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{3}$

Ответ: $x \in (2; 2 + \sqrt{3})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Два автомобиля одновременно отправляются в 800-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 36 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 5 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение:

Пусть скорость второго автомобиля x км/час, тогда скорость первого $x+36$ км/час.

Составим уравнение:

$$\frac{800}{x} - \frac{800}{x+36} = 5$$

$$800x + 28800 - 800x - 5x^2 - 180x = 0$$

$$x^2 + 36x - 5760 = 0$$

$$x = 60.$$

$$60 + 36 = 96 \text{ км/час}$$

Ответ: 96 км/час.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

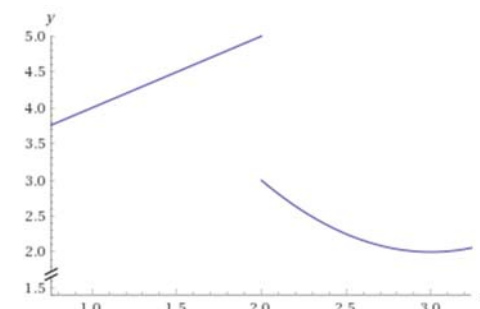
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{при } x \geq 2, \\ x + 3 & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: Построим параболу $y = x^2 - 6x + 11$, при $x \geq 2$ и прямую $y = x + 3$, при $x < 2$



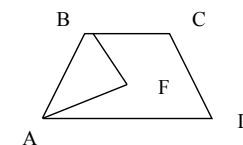
Ответ: $m \in (3; 5)$

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 5$.

Решение:



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит, $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$, т.к. AF и BF биссектрисы по условию. Значит

треугольник ABF прямоугольный. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

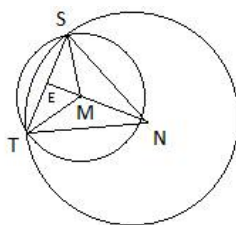
Ответ: 13.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

25

Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T , причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST . Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.

Решение:



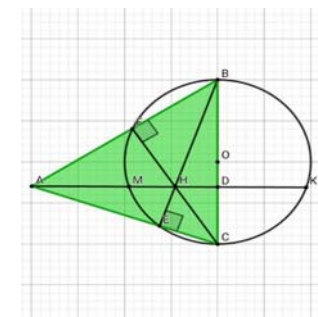
Так как точки S и T лежат как на малой, так и на большой окружностях, то $SM=TM$ – радиусы малой окружности, а $SN=TN$ – радиусы большой окружности. Следовательно, треугольники STM и STN – равнобедренные с основанием ST . Отсюда следует, что треугольники $TMN=SMN$ по трем сторонам. Так как в равных треугольниках углы также равны, то получаем, что $\angle MNT = \angle MNS$, а значит, MN – биссектриса равнобедренного треугольника SNT . Но биссектриса в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию, также является высотой, следовательно $MN \perp ST$.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение



$$AM = AD - MD = 49 - 42 = 7$$

$$AK = AM + MD + DK = 7 + 42 + 42 = 91$$

$$\text{По свойству секущих: } AE \cdot AC = AM \cdot AK = 7 \cdot 91 = 637$$

Треугольник AHE подобен треугольнику ACD по двум углам (угол A – общий, угол $AEH = \text{угол } ADC = 90^\circ$)

$$\text{Составим отношения сходственных сторон: } \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{HE}{CD}, \text{ отсюда}$$

$$AE \cdot AC = AD \cdot AH \Rightarrow$$

$$AH = AE \cdot \frac{AC}{AD} = 7 \cdot \frac{91}{49} = 13$$

ОТВЕТ: 13.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

Критерии ответов к письменной части

21

Решите неравенство $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$.**Решение:**

$$(x-3)(x-3-\sqrt{5}) < 0$$

Найдём нули функции: $x_1 = 3, x_2 = 3 + \sqrt{5}$ **Ответ:** $x \in (3; 3 + \sqrt{5})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

22

Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение:

Пусть скорость второго автомобиля x км/час, тогда скорость первого $x+10$ км/час.

Составим уравнение:

$$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1$$

$$560x + 5600 - 560x - 10x^2 - 10x = 0$$

$$x^2 + 10x - 5600 = 0$$

$$x = 70.$$

$$70 + 10 = 80 \text{ км/час}$$

Ответ: 80 км/час.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

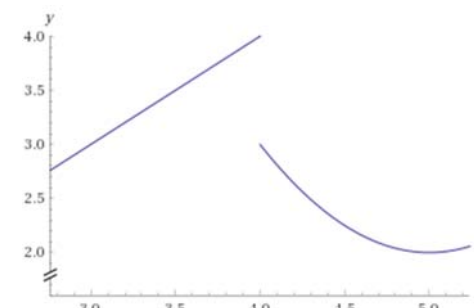
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27 & \text{при } x \geq 4, \\ x & \text{при } x < 4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

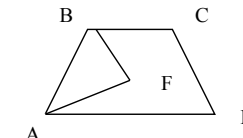
Решение: Построим параболу $y = x^2 - 10x + 27$, при $x \geq 4$ и прямую $y = x$, при $x < 4$

**Ответ:** $m \in (3; 4)$

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 12$, $BF = 9$.

Решение:

Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит, $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$, т.к. AF и BF биссектрисы по условию. Значит

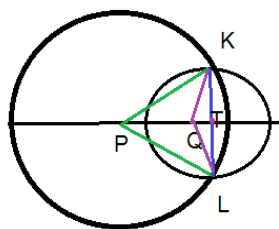
треугольник ABF прямоугольный. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

Ответ: 15.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

25

Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L , причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL . Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.



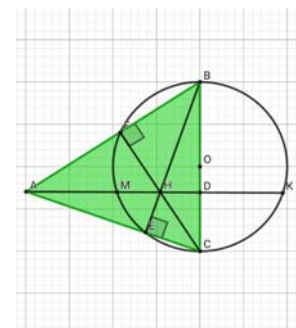
Решение:

Так как точки K и L лежат как на малой, так и на большой окружностях, то $QK=QL$ – радиусы малой окружности, а $PK=PL$ – радиусы большой окружности. Следовательно, треугольники KPL и KQL – равнобедренные с основанием KL . Отсюда следует, что треугольники $KPQ=LPQ$ по трем сторонам. Так как в равных треугольниках углы также равны, то получаем, что $\angle KPQ = \angle LPQ$, а значит, PQ – биссектриса равнобедренного треугольника KPL . Но биссектриса в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию, также является высотой, следовательно $PQ \perp KL$.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD=9$, $MD=6$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .



Решение

$$AM = AD - MD = 9 - 6 = 3$$

$$AK = AM + MD + DK = 3 + 6 + 6 = 15$$

$$\text{По свойству секущих: } AE \cdot AC = AM \cdot AK = 3 \cdot 15 = 45$$

треугольник AHE подобен треугольнику ACD по двум углам (угол A - общий, угол $AEH = \text{угол } ADC = 90^\circ$)

$$\text{Составим отношения сходственных сторон: } \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{HE}{CD}, \text{ отсюда}$$

$$AE \cdot AC = AD \cdot AH \Rightarrow$$

$$AH = AE \cdot \frac{AC}{AD} = 3 \cdot \frac{15}{9} = 5$$

ОТВЕТ: 5.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

Критерии ответов к письменной части

21

Решите неравенство $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$.

Решение:

$$(x-5)(x-5-\sqrt{7}) < 0$$

Найдём нули функции: $x_1 = 5, x_2 = 5 + \sqrt{7}$

Ответ: $x \in (5; 5 + \sqrt{7})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

22

Два автомобиля одновременно отправляются в 840-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 4 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение:

Пусть скорость второго автомобиля x км/час, тогда скорость первого $x+4$ км/час.

Составим уравнение:

$$\frac{840}{x} - \frac{840}{x+4} = 1$$

$$840x + 3360 - 840x - 4x = 0$$

$$x^2 + 4x - 3360 = 0$$

$$x = 56.$$

$$56 + 4 = 60 \text{ км/час}$$

Ответ: 60 км/час.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

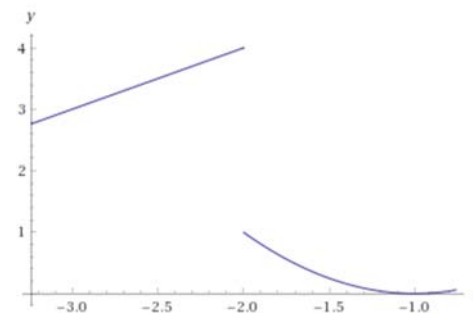
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{при } x \geq -2, \\ x + 6 & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: Построим параболу $y = x^2 + 2x + 1$, при $x \geq -2$ и прямую $y = x + 6$, при $x < -2$



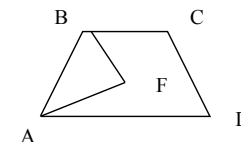
Ответ: $m \in (1; 4)$

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 16$, $BF = 12$.

Решение:



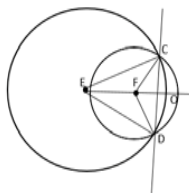
Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит, $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$, т.к. AF и BF биссектрисы по условию. Значит треугольник ABF прямоугольный. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$

Ответ: 20.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

25

Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



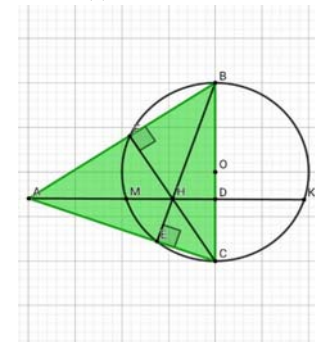
Решение:

Так как точки C и D лежат как на малой, так и на большой окружностях, то FC = FD – радиусы малой окружности, а EC = ED – радиусы большой окружности. Следовательно, треугольники CED и CFD – равнобедренные с основанием CD. Отсюда следует, что треугольники ECF = EDF по трем сторонам. Так как в равных треугольниках углы также равны, то получаем, что $\angle CEO = \angle DEO$, а значит, EO – биссектриса равнобедренного треугольника CED. Но биссектриса в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию, также является высотой, следовательно $EF \perp CD$.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 90$, $MD = 69$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.



Решение

$$AM = AD - MD = 90 - 69 = 21$$

$$AK = AM + MD + DK = 21 + 69 + 69 = 159$$

$$\text{По свойству секущих: } AE \cdot AC = AM \cdot AK = 21 \cdot 159 = 3339$$

Треугольник AHE подобен треугольнику ACD по двум углам (угол A – общий, угол AEN = угол ADC = 90°)

$$\text{Составим отношения сходственных сторон: } \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{HE}{CD}, \text{ отсюда}$$

$$AE \cdot AC = AD \cdot AH \Rightarrow$$

$$AH = AE \cdot \frac{AC}{AD} = 21 \cdot \frac{159}{90} = 37,1$$

ОТВЕТ: 37,1.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

Критерии ответов к письменной части

21

Решите неравенство $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1)$.

Решение:

$$(x-1)(x-1-\sqrt{2}) < 0$$

Найдём нули функции: $x_1 = 1, x_2 = 1 + \sqrt{2}$

Ответ: $x \in (1; 1 + \sqrt{2})$.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

22

Два автомобиля одновременно отправляются в 980-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 28 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение:

Пусть скорость второго автомобиля x км\час, тогда скорость первого $x+28$ км\час.

Составим уравнение:

$$\frac{980}{x} - \frac{980}{x+28} = 4$$

$$980x + 27440 - 980x - 4x^2 - 112x = 0$$

$$x^2 + 28x - 6860 = 0$$

$$x = 70.$$

$$70 + 28 = 98 \text{ км\час}$$

Ответ: 98 км\час.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

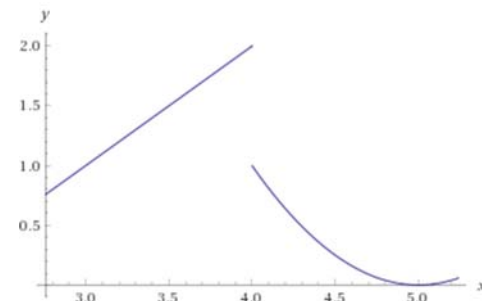
23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 25 & \text{при } x \geq 4, \\ x - 2 & \text{при } x < 4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение: Построим параболу $y = x^2 - 10x + 25$, при $x \geq 4$ и прямую $y = x - 2$, при $x < 4$



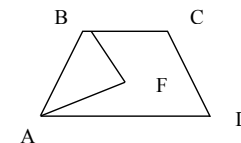
Ответ: $m \in (1; 2)$

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

24

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F . Найдите AB , если $AF = 20$, $BF = 15$.

Решение:



Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180° , значит, $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$, т.к. AF и BF биссектрисы по условию. Значит

треугольник $\triangle ABF$ прямоугольный. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$

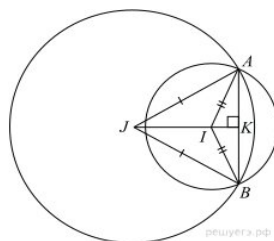
Ответ: 25.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения, или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

25

Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что $AB \perp IJ$.

Решение:

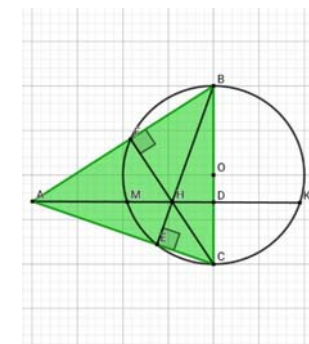


Так как точки A и B лежат как на малой, так и на большой окружностях, то $AI=BI$ – радиусы малой окружности, а $AJ=DJ$ – радиусы большой окружности. Следовательно, треугольники $\triangle AIB$ и $\triangle AIB$ – равнобедренные с основанием AB . Отсюда следует, что треугольники $\triangle AIB$ и $\triangle AIB$ по трем сторонам. Так как в равных треугольниках углы также равны, то получаем, что $\angle AIB = \angle AIB$, а значит, IJ – биссектриса равнобедренного треугольника $\triangle AIB$. Но биссектриса в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию, также является высотой, следовательно $AB \perp IJ$.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD=15$, $MD=12$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .



Решение

$$AM = AD - MD = 15 - 12 = 3$$

$$AK = AM + MD + DK = 3 + 12 + 12 = 27$$

$$\text{По свойству секущих: } AE \cdot AC = AM \cdot AK = 3 \cdot 27 = 81$$

треугольник $\triangle AHE$ подобен треугольнику $\triangle ACD$ по двум углам (угол A - общий , угол $AEH = \text{угол } ADC = 90^\circ$)

$$\text{Составим отношения сходственных сторон: } \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{HE}{CD}, \text{ отсюда}$$

$$AE \cdot AC = AD \cdot AH \Rightarrow$$

$$AH = AE \cdot \frac{AC}{AD} = 3 \cdot \frac{27}{15} = 5,4$$

ОТВЕТ: 5,4.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>