Работа с одаренными: *подготовка к математическим олимпиадам*

Лаврова-Кривенко Я. В.,
доцент кафедры ЕМД ТОГИРРО

Задача 1

(Теория чисел. Цифровая запись числа)

Сколько лет человеку, если в 2019 году его возраст оказался равным сумме цифр года рождения?

Решение:

1) Пусть человек родился в $\overline{19mn}$ году,

тогда по условию $2019 - \overline{19mn}$ = 1 + 9 + m + n,

значит 2019 – 1900 - 10m – n = 10 + m + n, 109 = 11m + 2n.

Так как *m* и *n* – числа натуральные и меньше 10, причем *m* – всегда нечетное, то единственно возможное решение *m = 9, n = 5*.

Т. о. человек родился в 1995 году и ему 24 года.

Задача 1
(Теория чисел. Цифровая запись числа)

3) Пусть человек родился в $\overline{20mn}$ году,

тогда по условию $2019 - \overline{20mn}$ = 2 + m + n,

значит 2019 – 2000 - 10m – n = 2 + m + n,
17 = 11m + 2n.

Так как *m* и *n* – числа натуральные и меньше 10, причем *m* – всегда нечетное, то единственно возможное решение *m = 1, n = 3*.
Т. о. человек родился в 2013 году и ему 6 лет.

Ответ: 1) 24 года; 2) 6 лет.

Задача 2

(Теория чисел. Делимость)

Дописать к 523… три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

Решение:

Разделим число 524000 на 504 = 7·8·9 с остатком.

Получим 1039 - целую часть. 1039·504 = 523656.

Если взять число 1038, то 1038·504 = 523152.
Других таких чисел нет.

Ответ: 523152, 523656.

Задача 3

(Алгебра и теория чисел. Решение уравнения в целых числах. Исследование четности)

Существуют ли целые числа x, y, z для которых
$(3x - y)(3y - z)(3z - x) = 2019$?

Решение:

Сумма чисел 3x-y, 3y-z, 3z-x равна $2(x + y + z)$, то есть четна. Следовательно, хотя бы одно из них четное число. Поэтому при любых x, y, z $(3x - y)(3y - z)(3z - x)$ – четное число.

Ответ: Не существуют.

Задача 4
(Теория чисел. Метод математической индукции)

Доказать, что число $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n.

Доказательство:

1) Если n = 1, то $7^2 + 8^1 = 57$, а 57 делится на 19.

2) Предположим, что для некоторого натурального k
число $7^{k+1} + 8^{2k-1}$ делится на 19.

3) Докажем, что в таком случае и $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ делится на 19.

В самом деле, $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7 \cdot 7^{k+1} + 64 \cdot 8^{2k-1} = 7(7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 57 \cdot 8^{2k-1}$.
Так как каждое слагаемое полученной суммы делится на 19, то и $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ также делится на 19.
Утверждение доказано.

Задача 5

(Теория чисел. Исследование делимости)

Даны два трехзначных числа, сумма которых делится на 37. Эти числа записаны друг за другом. Верно ли, что полученное шестизначное число обязательно делится на 37?

Решение:

Обозначим данные трехзначные числа через a и b.

Тогда их сумма $a+b$ делится на 37.

Шестизначное число принимает вид $1000a + b$.

Преобразуем его, выделяя слагаемое $a+b$:

$$1000a + b = 999a + (a+b).$$

У полученной суммы не только второе, но и первое слагаемое делится на 37, так как 999 a делится на 111, а 111 делится на 37. Поэтому и вся сумма делится на 37.

Ответ: верно.

Задача 6

(Теория чисел. Разложение на множители)

Можно ли число 456 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов всех этих чисел была также равна 456?

Решение:

Число 456 разложим на простые множители: 456 = $2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Перечислим все эти простые множители: 2, 2, 2, 3 и 19.

Теперь запишем равенство 456 = $2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 19^2 + x$,
где *x* – натуральное.
Найдем из него *x*:
$456 = 4 + 4 + 4 + 9 + 361 + x$, $456 = 382 + x$, $x = 74$.

Получаем равенства:
$456 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$ (74 множителя, равных 1),
$456 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 19^2$
(74 слагаемых, равных 1^2).

Ответ: можно – $456 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$ (74 множителя, равных 1).

Задача 7

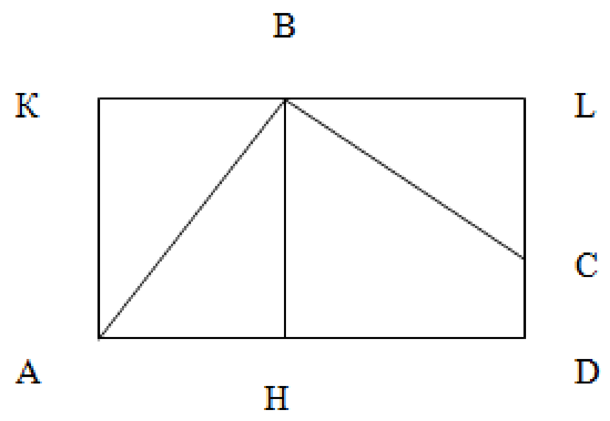
(Планиметрия. Построение. Равенство прямоугольных треугольников)

1. В четырехугольнике ABCD углы при вершинах B и D прямые, AB = BC, BH $\perp$ AD, BH = 1. Найдите площадь четырехугольника ABCD.

(4 балла)

Решение:

Достроим четырехугольник ABCD до прямоугольника AKLD как показано на рисунке.



Треугольники BCL и ABK равны по гипотенузе и острому углу ($\angle CBL = \angle BAK$). Следовательно, AK = BH = BL = 1. $S_{ABCD} = S_{HBLD} = 1$, так как HBLD – квадрат.

Ответ: 1.

Задача 8
(Алгебра и теория чисел. Решение уравнений с двумя неизвестными)

1. Найдите все целые решения уравнения $x^2 - 5xy + 4y^2 = 7$.

(4 балла)

Решение:

Разложим правую часть на множители. Получим уравнение $(x - y)(x - 4y) = 7$.
Произведение двух чисел равно семи только в следующих случаях:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 4y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x - 4y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x - 4y = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -7 \\ x - 4y = -1. \end{cases}$$

Решая данные системы уравнений, находим следующие решения:
$x = -1$, $y = -2$; $x = 9$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = -9$, $y = -2$.

Ответ: $(-1;-2)$; $(9;2)$; $(1;2)$; $(-9;-2)$.

Задача 9
(Алгебра. Разложение выражения на множители)

3. Решите уравнение $(x^2-x-1)^2-x^3=5$.

Решение:

Имеем $(x^2-x-1)^2-4-x^3-1=0$,

$(x^2-x+1)(x^2-x-3)-(x+1)(x^2-x+1)=0$,

$(x^2-x+1)(x^2-2x-4)=0$,

$(x^2-x+1)=0$ - не имеет решений,

$(x^2-2x-4)=0$ при $x_1=1+\sqrt{5}$; $x_2=1-\sqrt{5}$.

Ответ: $1+\sqrt{5}$;$1-\sqrt{5}$.

Задача 10

(Алгебра. Системы. Упрощение выражений)

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=72\\(y+z)(x+y+z)=120\\(z+x)(x+y+z)=96\end{cases}$$

(4 балла)

Решение:

Сложив все три уравнения системы, получим уравнение $(x+y+z)(2x+2y+2z)=228$, из которого найдем $x+y+z=12$ или $x+y+z=-12$. Подставляя вместо $(x+y+z)$ числа 12 и -12, получим в первом случае: $x=2$, $y=4$, $z=6$, а во втором: $x=-2$, $y=-4$, $z=-6$.

Ответ: $(2;4;6)$; $(-2;-4;-6)$.

Задача 11
(Алгебра. Уравнения высших степеней)

6. Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

Решение:

$x^4+2x^2-2x^2+4x-1=0$; $x^4+2x^2+1-2\left(x^2-2x+1\right)=0$;

$\left(x^2+1\right)^2-2(x-1)^2=0$; $\left(x^2+1-x\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=0$;

$x^2-x\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=0$; D <0 – нет решений; или

$x^2+x\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

Задача 12

(Алгебра. Системы уравнений. Преобразования систем)

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy - xz + z^2 = 0 \\ x^2 - xz - yz + 3y^2 = 2 \\ y^2 + xy + yz - z^2 = 2 \end{cases}$$

Решение: Складывая первые два уравнения системы и вычитая третье, получаем

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$; откуда $x = y = z$.

Теперь из третьего уравнения находим $x^2 = 1$.

Проверка показывает, что обе указанные тройки чисел удовлетворяют данной системе.

Ответ: (1, 1, 1), (-1, -1, -1).

Задача 13

(Алгебра. Системы уравнений. Преобразования систем. Разложение на множители)

8. Найдите действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

(4 балла)

Решение:

Решим каждое из уравнений системы как квадратное относительно x или y. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y + 6) = 0, \\ (x + 2y - 3)(x + y + 2) = 0 \end{cases}$$

и равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений, решениями которой являются (-2;0), (-3;3), (-4;2).

Ответ: (-2;0), (-3;3), (-4;2).

Задача 14

(Сравнение. Перебор. Задачи на взвешивание)

Имеется 16 различных по весу камней. Как за 22 взвешивания на чашечных весах без гирь определить самый легкий и самый тяжелый камни?

Решение:

1) Разобьем все камни на пары. За восемь взвешиваний определим более тяжелый и более легкий камни в каждой паре. Очевидно, что самый тяжелый камень находится в группе из восьми более тяжелых камней, самый легкий – в группе из восьми более легких.

2) За семь взвешиваний можно определить самый тяжелый из 8 камней (более тяжелых). Например, таким способом. Взвесим два произвольных камня; более тяжелый из них взвесим с третьим, более тяжелый из трех сравним с четвертым и т. д. Седьмым взвешиванием сравним наиболее тяжелый из семи камней с восьмым. Более тяжелый из них – самый тяжелый из всех 16 камней.

3) При помощи аналогичной процедуры из группы, состоящей из восьми более легких камней, за 7 взвешиваний выделяется самый легкий из шестнадцати. Всего использовано 8 + 7 + 7 = 22 взвешивания.

Задача 15
(Логические задачи)

По окружности в произвольном порядке выписаны цифры: 4 единицы и 5 нулей. Затем в промежуток между двумя одинаковыми цифрами вписывается 1, а между разными цифрами – 0, после чего первоначальные цифры стираются. Докажите, сколько бы раз ни повторялся этот процесс, никогда не получится набор из 9 единиц.

Доказательство:

1) Допустим, что получение набора из 9 единиц возможно.

2) Тогда на предыдущем шаге должно было быть либо 9 единиц, либо 9 нулей.

3) Пусть на *n*-м шаге впервые появилось 9 единиц. Тогда на (*n -1*)-м шаге стояли 9 нулей. Следовательно, на (*n -2*)-м шаге цифры чередовались, а это значит, что на 1, 3, 5, 7 и 9-м местах (считая от некоторого места по часовой стрелке) стояли одинаковые цифры.

4) Но места 1-е и 9-е – соседние, и там одинаковые цифры стоять не могли. Таким образом, мы пришли к противоречию, следовательно получить набор из 9 единиц в данном процессе невозможно.

Что и требовалось доказать.

Задача 16
(Логические задачи)

Дети играют в игру. Они наугад достают из банки, в которой лежат черные и белые шарики, два шарика. Если шарики одного цвета, то они выбрасывают их, а в банку добавляют один черный шарик. Если же шарики разных цветов, то белый кладут обратно, а черный шарик выбрасывают. В результате этой длительной игры на дне банки остается всего один шарик. Можно ли, не глядя в банку, установить, какого цвета шарик, если известно исходное число белых шариков?

Решение:

Заметим, что число белых шариков после каждой операции либо не меняется, либо уменьшается на два, то есть не меняет своей четности. Значит, результат существенно зависит от четности числа белых шариков: если исходное число белых шариков было нечетным, то оставшийся единственный шарик должен быть белым; если же число белых шариков было четным, то оставшийся шарик – черный.

Ответ: Да.

Задача 17

(Логические задачи. Оптимизация процесса)

30 студентов с пяти курсов придумали 40 задач для олимпиады, причем однокурсники – одинаковое число задач, а студенты с разных курсов – разное. Сколько студентов придумали ровно по одной задаче?

Решение:

Выберем 5 студентов, по одному с каждого курса. Все они придумали разное количество задач. Поэтому общее число задач, предложенных ими, не меньше, чем 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Остальные 25 студентов придумали не более чем 40 – 15 = 25 задач. Ясно, что каждый из них придумал по одной задаче, и следовательно, всего 26 человек придумали по одной задаче.

Ответ: 26 студентов.

Задача 18

(Элементарные логические задачи. Применение метода таблиц)

Каникулы в школе птиц и зверей начались большим карнавалом. Медведь, волк, лиса и заяц явились в маскарадных костюмах волка, медведя, лисы и зайца. На балу зверь в маскарадном костюме зайца выиграл в лотерее банку меда и остался этим очень недоволен. Известно также, что медведь не любит лису и никогда не берет в лапы картинок, где она нарисована. Зверь в маскарадном костюме лисы получил в качестве приза за участие в конкурсе пучок моркови, но это тоже не доставило ему никакой радости. Какой маскарадный костюм смастерил себе каждый из зверей?

Задача 19

(Элементарные логические задачи. Применение метода таблиц)

В небольшом районном городе живут пять друзей: Иванов, Петренко, Сидорчук, Гришин и Капустин. Профессии у них разные: один из них маляр, другой – мельник, третий – плотник, четвертый – почтальон, а пятый – парикмахер. Петренко и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти. Иванов и Гришин собираются посетить мельницу, на которой работает их товарищ. Петренко и Капустин живут в одном доме с почтальоном. Сидорчук был недавно в ЗАГСе одним из свидетелей, когда Петренко и дочь парикмахера сочетались законным браком. Иванов и Петренко каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром. Гришин и Капустин по субботам обязательно встречаются в парикмахерской, где работает их друг. Почтальон предпочитает бриться сам. Кто есть кто?