Подготовка к ОГЭ по математике.

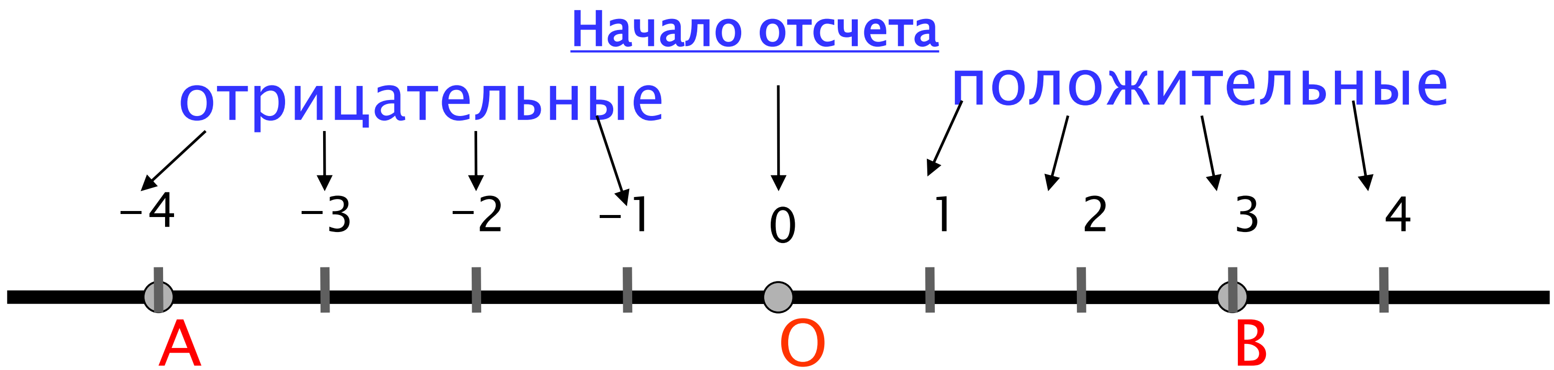
Решение базовых задач по теме: «Неравенства»

Учитель математики
Тютина Лилия Шамилевна

Кодификатор
проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования и элементов содержания для проведения основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

3.2		*Неравенства*
	3.2.1	Числовые неравенства и их свойства
	3.2.2	Неравенство с одной переменной. Решение неравенства
	3.2.3	Линейные неравенства с одной переменной
	3.2.4	Системы линейных неравенств
	3.2.5	Квадратные неравенства

В первой части - №13 – 1 балл
Во второй части - №20 – 2 балла

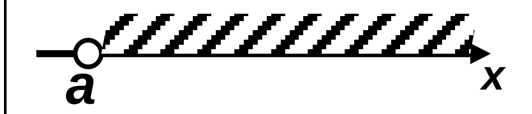
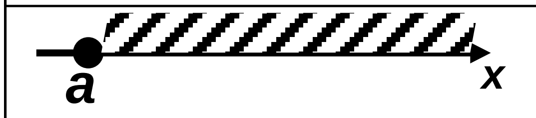
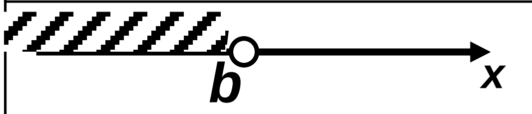
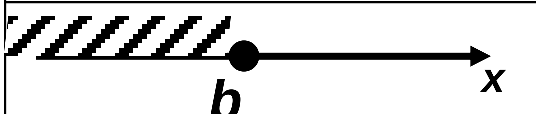
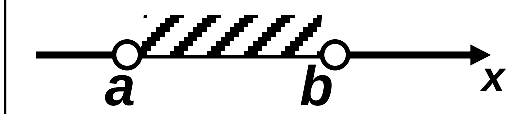
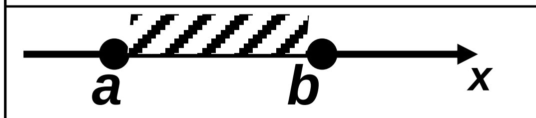
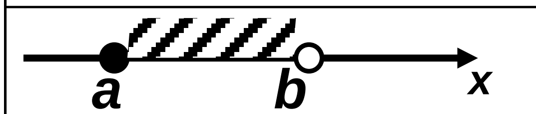
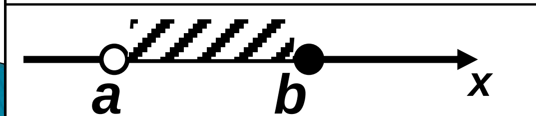


Начало отсчета – число 0(нуль).

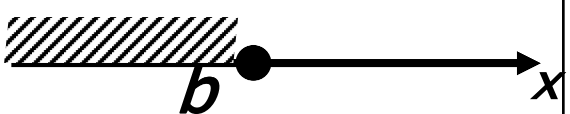
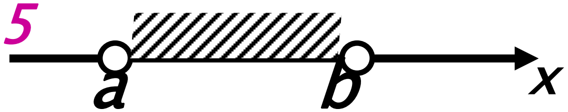
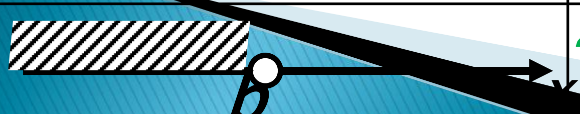
Отрицательное оно или положительное ?

Само число 0(нуль) не является ни положительным, ни отрицательным. Оно отделяет положительные числа от отрицательных.

Числовые промежутки

Геометрическая модель	Обозначение	Название числового промежутка	Аналитическая модель(неравенство)
	$(a; +\infty)$	**Открытый луч**	$x > a$
	$[a; +\infty)$	**Луч**	$x \geq a$
	$(-\infty; b)$	**Открытый луч**	$x < b$
	$(-\infty; b]$	**Луч**	$x \leq b$
	$(a; b)$	**Интервал**	$a < x < b$
	$[a; b]$	**Отрезок**	$a \leq x \leq b$
	$[a; b)$	**Полуинтервал**	$a \leq x < b$
	$(a; b]$	**Полуинтервал**	$a < x \leq b$

Самостоятельная работа *Установите соответствия, соединив ячейки числами*

Геометрическая модель	**Обозначение**	**Название числового промежутка**	**Аналитическая модель(неравенство)**
1 	4 $(-\infty; b]$	5 **Интервал**	2 $x \geq a$
2 	3 $(a; b]$	3 **Полуинтервал**	1 $a \leq x \leq b$
3 	8 $(-\infty; b)$	6 **Открытый луч**	8 $x < b$
4 	6 $(a; +\infty)$	7 **Полуинтервал**	5 $a < x < b$
5 	7 $[a; b)$	8 **Открытый луч**	4 $x \leq b$
6 	1 $[a; b]$	1 **Отрезок**	7 $a \leq x < b$
7 	5 $(a; b)$	2 **Луч**	6 $x > a$
8 	2 $[a; +\infty)$	4 **Луч**	3 $a < x \leq b$

Основные правила решения неравенств.

Правило 1. *Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.*

$$ax+b>c$$

$$ax>c-b$$

Правило 2. ***Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же <u>положительное</u> число, <u>не изменив</u> при этом знак неравенства.***

$$ax > b \quad \Big| :a$$

$$a > 0 \Longrightarrow x > \frac{b}{a}$$

Правило 3. ***Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.***

$$ax > b \quad \Big|\, :a$$

$$a < 0 \Longrightarrow x < \frac{b}{a}$$

Нельзя умножать (или делить) неравенство на выражение, знака которого мы не знаем.

Например, в неравенстве $x(3x-2)>x(x+1)$
нельзя поделить левую и правую часть на x .

Правильный способ: перенести всё в левую часть неравенства, разложить на множители и решить неравенство методом интервалов.

$x(3x-2) - x(x+1)>0$

$x(3x-2-x-1) >0$

$x(2x-3) >0$

Получаем, что $x<0$ или $x>1{,}5$.

Сократив на x, который может быть отрицательным, мы не получили бы правильного ответа.

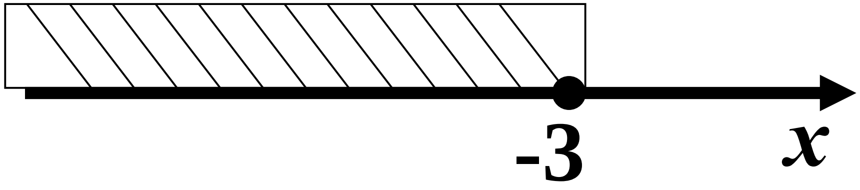
Решаем неравенство.

$$6x+2\le 3x-7$$

$$6x-3x\le -7-2$$

$$3x\le -9 \quad \Big| \; :3$$

$$x\le -3$$



Ответ: $\left(-\infty;-3\right]$

Решите неравенство $9 + 3(4x - 1) < -3$.

Решение

$$9 + 3(4x - 1) < -3$$

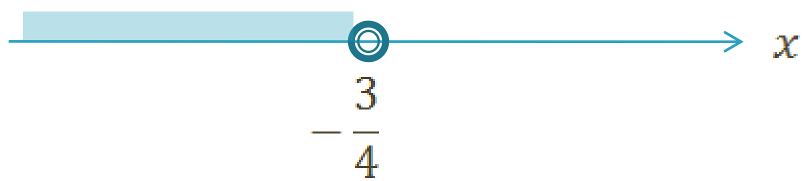
$$9 + 12x - 3 < -3$$

$$12x < -3 + 3 - 9$$

$$12x < -9 \,|: (12)$$

$$x < -\frac{9}{12}$$

$$x < -\frac{3}{4}$$



Ответ: $(-\infty; -\frac{3}{4})$

Алгоритм решения квадратного неравенства

<u>Общий вид:</u>

$ax^2 + bx + c \vee 0, \quad a \neq 0$

$\vee$ – знак неравенства

$(\leq, \geq, <, >)$

<u>Способы решения:</u>

1) сведение к системе линейных неравенств;
2) с помощью графика квадратичной функции;
3) метод интервалов.

Сведение к системе линейных неравенств (1 способ)

Алгоритм:

1) разложить квадратный многочлен на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;

2) составить и решить две системы;

$$a\cdot b>0 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \qquad a\cdot b<0 \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$$

3) объединить решения обеих систем.

Решите неравенство $x^2+x-20\geq 0$.

$x^2+x-20\geq 0$

$x^2+x-20=0$

$D=b^2-4ac$

$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-20)=81$

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{81}}{2\cdot 1}=-5$

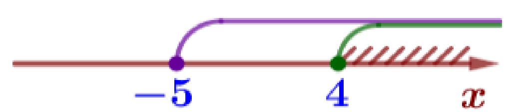
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{81}}{2\cdot 1}=4$

$x^2+x-20=(x+5)(x-4)$

$$(x+5)(x-4)\geq 0$$

$$\begin{cases} x+5\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+5\leq 0 \\ x-4\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -5 \\ x\geq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq -5 \\ x\leq 4 \end{cases}$$



$x\in[4;+\infty)$

$x\in(-\infty;-5]$

Ответ: $x\in(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$

С помощью графика квадратичной функции (2 способ)

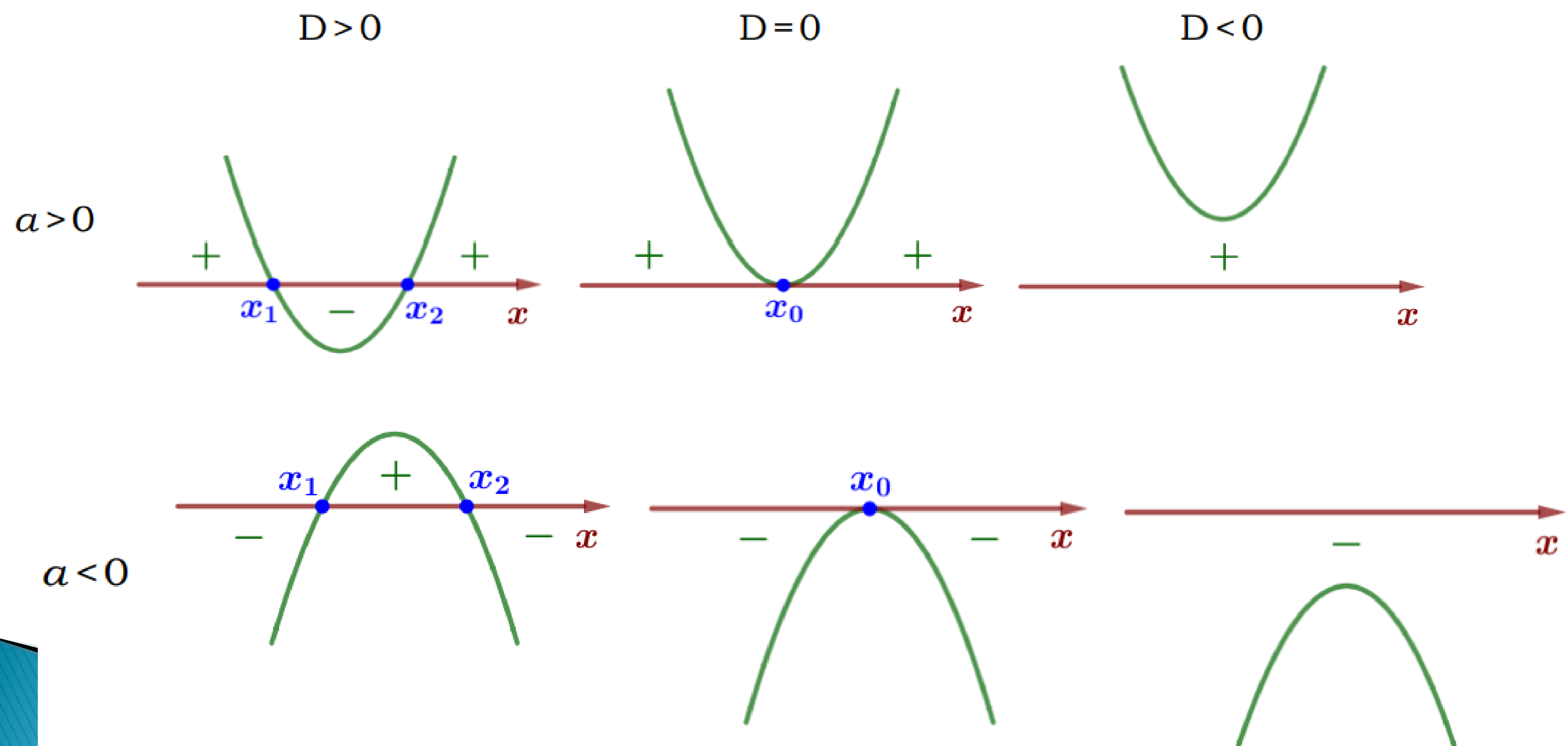
Алгоритм:

1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;

2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;

3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox, если они есть;

4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.



Решите неравенство $x^2+12x+32\le 0$.

Решение

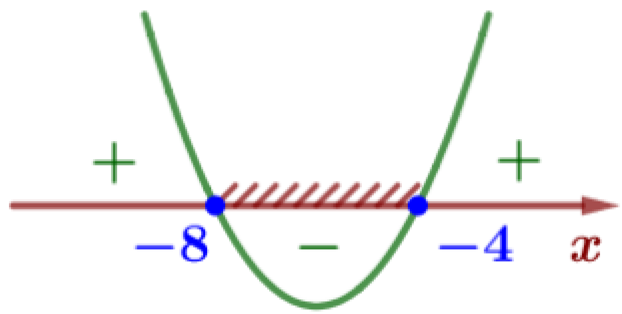
$a=1>0$ ветви вверх

$$x^2+12x+32=0$$

$$D=b^2-4ac=12^2-4\cdot 1\cdot 32=16$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-8$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-4$$

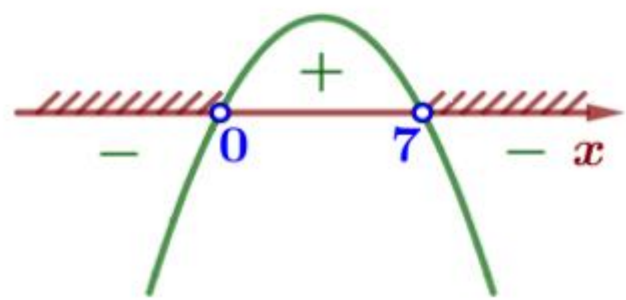


Ответ: $x\in[-8;-4]$

Решите неравенство $7x - x^2 < 0$.

Решение

$a = -1 < 0$ ветви вниз



$$7x - x^2 < 0$$
$$7x - x^2 = 0$$
$$x(7 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad 7 - x = 0$$
$$x = 7$$

Ответ:

$x \in (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$

Решите неравенство $x^2+100<0$.

Решение

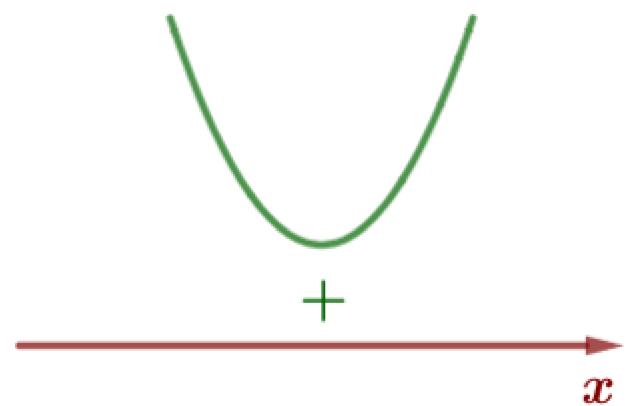
$x^2+100<0$

$x^2+100=0$

$x^2=-100$

корней нет

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ:
неравенство не имеет решений

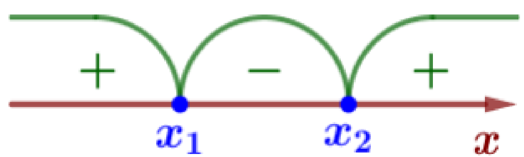
Метод интервалов (3 способ)

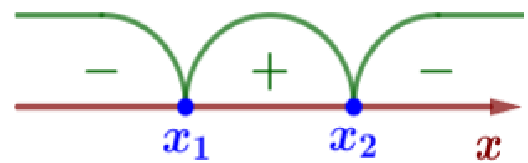
<u>Алгоритм:</u>

1) найти нули функции $y=ax^2+bx+c$, решив квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$;
2) отметить положение нулей на оси Ox;
3) определить знаки функции в промежутках между нулями;
   A. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,
   B. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

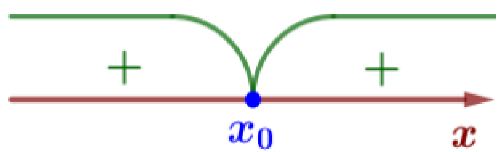
знаки чередуются

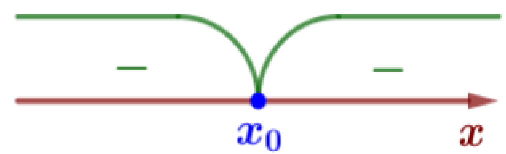
D > 0 (2 корня)
знаки чередуются



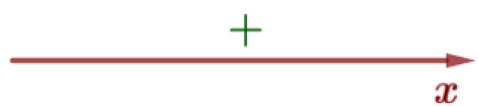


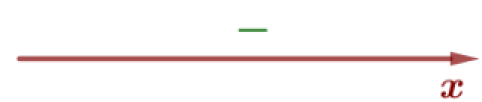
D = 0 (1 корень)
знаки совпадают





D < 0 (нет корней)
функция сохраняет знак
на всей числовой оси





4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Решите неравенство $4x^2 \geq 9$.

Решение

$4x^2 \geq 9$

$4x^2 - 9 \geq 0$

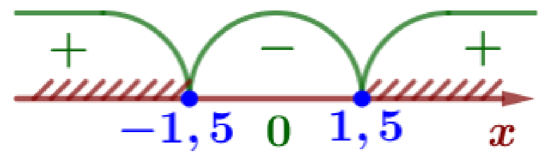
$4x^2 - 9 = 0$

$(2x-3)(2x+3)=0$

$2x-3=0 \qquad 2x+3=0$

$2x=3 \qquad 2x=-3$

$x=1,5 \qquad x=-1,5$



при $x=0$

$4x^2-9=4\cdot 0^2-9=-9<0 \Rightarrow$

на интерале $(-1,5;1,5)$

знак "−"

Ответ: $x \in (-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$

Решите неравенство $x^2 - 2x + 15 < 0$.

Решение

$x^2 - 2x + 15 < 0$

$x^2 - 2x + 15 = 0$

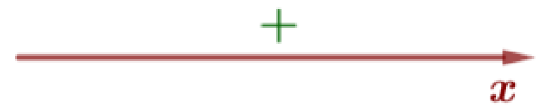
$D = b^2 - 4ac$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$

корней нет

при $x = 0$ $\quad x^2 - 2x + 15 = 0^2 - 2 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: неравенство не имеет решений

Решите неравенство $x^2 + 12 > 0$.

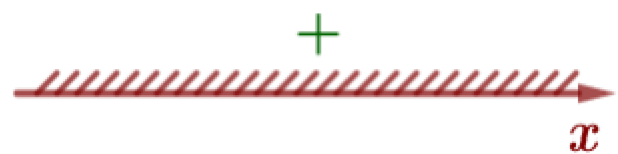
$x^2 + 12 = 0$

$x^2 = -12$

корней нет

при $x = 0$ $\quad x^2 + 12 = 0^2 + 12 = 12 > 0$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: $x \in \mathbb{R}$, то есть x – любое число

Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:

1) $x^2-81<0$ 2) $x^2-81>0$ 3) $x^2-9x<0$ 4) $x^2-9x>0$

Решение

Решим неравенство №1:

$x^2-81<0$

$x^2-81=0$

$(x-9)(x+9)=0$

$x-9=0$ $\quad$ $x+9=0$

$x=9$ $\quad$ $x=-9$

Корни **не** совпадают с данными рисунка.

Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$x^2-9x<0$

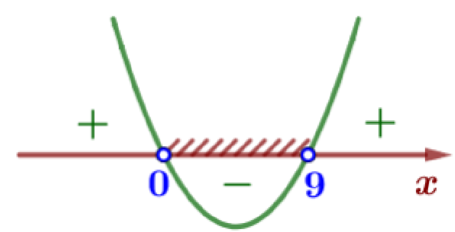
$x^2-9x=0$

$x(x-9)=0$

$x=0$ $\quad$ $x-9=0$

$x=9$

$a=1>0$ ветви вверх



Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3

Алгоритм решения системы неравенств с одной переменной

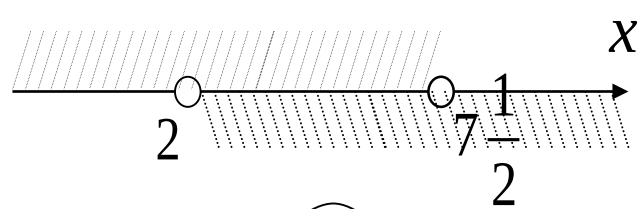
1. Решить каждое неравенство системы.

$$\begin{cases} 2x < 15, \\ 3x + 1 > 7. \end{cases}$$

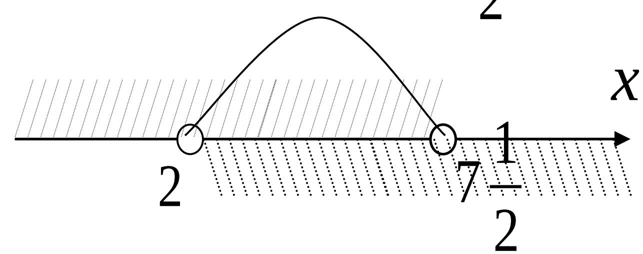
$$\begin{cases} x < 7\dfrac{1}{2}, \\ 3x > 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 7\dfrac{1}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

2. Изобразить графически решения каждого неравенства на координатной прямой.



3. Найти пересечение решений неравенств на координатной прямой.



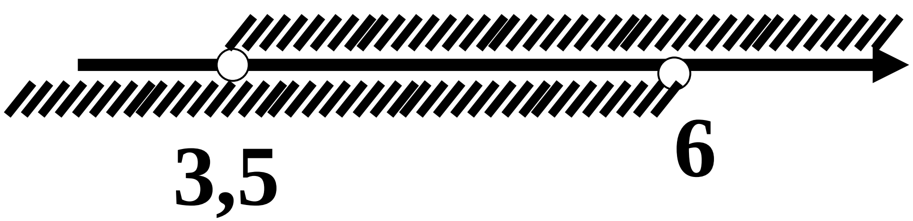
4. Записать ответ в виде числового промежутка.

Ответ: $\left(2;\ 7\dfrac{1}{2}\right)$

Решить систему неравенств.

Решить систему неравенств – найти значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

$$\begin{cases} 2x-1>6, \\ 5-3x>-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x>7, \\ -3x>-18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3{,}5, \\ x<6 \end{cases}$$



Ответ: $3{,}5<x<6$

Решите неравенство

$$\frac{2x-7}{4-x} \geq 0$$

1)

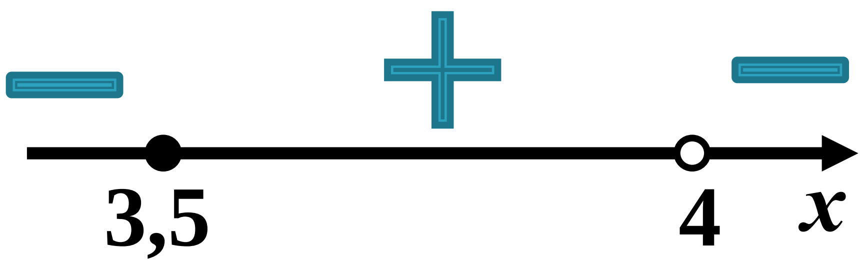
2)

3)

4)

$$(2x-7)(4-x)=0$$

$$x \neq 4$$



Ответ

Решите неравенство $\dfrac{12}{x^2-7x-8} \le 0.$

Решение.

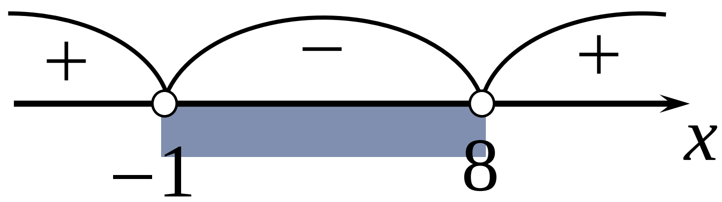
$Т.к.\ 12>0,\ x^2-7x-8 \ne 0,\ то\ \dfrac{12}{x^2-7x-8} \le 0$

при условии, что $x^2-7x-8<0$

$$x^2-7x-8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=8; \end{array}\right.$$

$$(x+1)(x-8)<0$$



$$x \in (-1; 8)$$

$Ответ:\quad -1<x<8.$

Решите неравенство $x^2(-x^2-9)\le 9(-x^2-9).$

Решение. <u>1 способ</u>

$$x^2(-x^2-9)\le 9(-x^2-9)$$

$$x^2(-x^2-9)-9(-x^2-9)\le 0$$

$$(-x^2-9)(x^2-9)\le 0 \quad \Big|\times(-1)$$

$$(x^2+9)(x^2-9)\ge 0$$

Т.к. $x^2\ge 0$, *то* $x^2+9\ge 9>0$ *при любых* x;

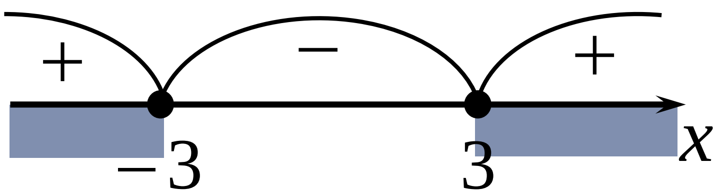
Значит, $(x^2+9)(x^2-9)\ge 0$ *выполняется при условии*

$$x^2-9\ge 0$$

$$(x+3)(x-3)\ge 0$$

$$(x-3)(x+3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3; \end{array}\right.$$



$$x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$$

Ответ: $x\le -3;\ x\ge 3.$

Решите неравенство $x^2\left(-x^2-9\right)\le 9\left(-x^2-9\right).$

Решение. **2 способ**

$$x^2\left(-x^2-9\right)\le 9\left(-x^2-9\right)$$

$$Т.к.\ \ x^2\ge 0,\ то\ \ -x^2\le 0\ \Rightarrow -x^2-9\le -9<0\ \ при\ любых\ x;$$

$$x^2\left(-x^2-9\right)\le 9\left(-x^2-9\right)\quad \Big|:\left(-x^2-9\right)<0$$

$$x^2\ge 9$$

$$|x|\ge 3$$

$$\left[\begin{array}{l} x\ge 3,\\ x\le -3; \end{array}\right.$$

$$Ответ:\quad x\le -3;\ x\ge 3.$$

Полезные материалы, ресурсы:

- Распечатай и реши: Математика ОГЭ 2023 (time4math.ru)
- Открытый банк заданий ОГЭ (fipi.ru)