

# Способы решения текстовых задач из второй части ОГЭ

Лаврентьева Ирина Геннадьевна, учитель  
математики МАОУ СОШ №63 г.Тюмени

# Задачи на движение

Система уравнений, которую необходимо составить на основании условия задачи на движение, обычно содержит следующие величины: расстояние, которое будем обозначать буквой  $S$ ; скорости движущихся тел, которые будем обозначать буквами  $u, v, w, \dots$  (или буквами, снабженными индексами:  $v_1, v_2, \dots$ ); время, которое будем обозначать буквами  $t, T$ . В случае, если движение равноускоренное (или равнозамедленное), ускорение будем обозначать буквой  $a$ .

## СКОРОСТЬ, ВРЕМЯ, РАССТОЯНИЕ

<b>СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ</b>	<b>СКОРОСТЬ</b>	<b>ВРЕМЯ</b>	<b>РАССТОЯНИЕ</b>
Чтобы найти среднюю скорость, необходимо всё расстояние разделить на всё время. $V_{\text{средняя}} = \frac{S_{\text{всё}}}{t_{\text{всё}}}$	Чтобы найти скорость, необходимо расстояние разделить на время. $v = \frac{S}{t}$	Чтобы найти время, необходимо расстояние разделить на скорость. $t = \frac{S}{v}$	Чтобы найти расстояние, необходимо скорость умножить на время. $S = v \cdot t$

# Задачи на движение

Равномерное движение по прямой. Примем следующие допущения:

1. Движение на отдельных участках считается равномерным; при этом пройденный путь определяется по формуле  $S = vt$ .

2. Повороты движущихся тел считаются мгновенными, т. е. происходит без затрат времени; скорость при этом также меняется мгновенно.

3. Если тело движется по течению реки, то его скорость  $w$  (относительно берега) складывается из скорости тела в стоячей воде  $u$  (собственной скорости тела) и скорости течения реки  $v$ :  $w = u + v$ . Если тело движется против течения реки, то его скорость (относительно берега)  $w = u - v$ . Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то полагают, что плот движется со скоростью течения реки.

# Задачи на движение

В задачах на равномерное движение иногда встречается условие, состоящее в том, что либо два тела движутся навстречу друг другу, либо одно тело догоняет другое. Если при этом расстояние между телами равно  $S$ , а скорости тел равны  $v_1$  и  $v_2$ , то:

1) при движении тел навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно  $\frac{S}{v_1 + v_2}$ ;

2) при движении тел в одну сторону ( $v_1 > v_2$ ) время, через которое первое тело догонит второе, равно  $\frac{S}{v_1 - v_2}$ .

**Пример 1.1.** Из города  $A$  в город  $B$  выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города  $B$  выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между  $A$  и  $B$ . Если бы мотоциклист выехал не через три, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к  $A$ . Найти расстояние между  $A$  и  $B$ .

**Решение.** Обозначим искомое расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  через  $S$  км, скорости велосипедиста и мотоциклиста — через  $v_B$  км/ч и  $v_M$  км/ч соответственно. Запишем условия задачи и уравнения, соответствующие этим условиям, в виде следующей таблицы:

Условие задачи	Уравнение
<p>Скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста</p> <p>Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между <math>A</math> и <math>B</math>, причем мотоциклист выехал из <math>B</math> на 3 ч позже, чем велосипедист из города <math>A</math></p>	$v_M = 3v_B$ $\frac{S}{2} = \frac{S}{2} + 3$
<p>Если бы мотоциклист выехал через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к <math>A</math></p>	$\frac{S}{2} - 15 = \frac{S}{2} + 15 + 2$

Используя первое уравнение, второе и третье уравнения можно записать в виде

$$\frac{S}{2v_B} = \frac{S}{6v_B} + 3,$$
$$\frac{S - 30}{2v_B} = \frac{S + 30}{6v_B} + 2.$$

Из первого уравнения этой системы получаем  $v_B = S/9$ . Подставляя во второе уравнение системы  $v_B = S/9$ , получаем уравнение для нахождения величины  $S$ :

$$\frac{3S - 180}{S} = 2 \Rightarrow S = 180.$$

Ответ. Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 180 км.

**Пример 1.2.** От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом от той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч?

**Решение.** Обозначим собственную скорость лодки (т. е. скорость в стоячей воде) через  $v_l$  км/ч, а скорость течения реки — через  $v_p$  км/ч. По условию задачи собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч:

$$v_l - v_p = 9.$$

Моторная лодка, двигаясь по течению реки, прошла 20 км за время  $20/(v_l + v_p)$ ; плот прошел те же 20 км за время  $20/v_p$ . Так как время, за которое плот проплыл 20 км, на 5 ч 20 мин (т. е. на  $16/3$  ч) больше времени, за которое то же расстояние проплыла моторная лодка, то

$$\frac{20}{v_p} - \frac{20}{v_l + v_p} = \frac{16}{3}.$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases} v_l - v_p = 9, \\ \frac{20}{v_p} - \frac{20}{v_l + v_p} = \frac{16}{3}. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем  $v_l = v_p + 9$ . Подставляя во второе уравнение  $v_l = v_p + 9$ , получаем уравнение для нахождения  $v_p$ :

$$\frac{20}{v_p} - \frac{20}{2v_p + 9} = \frac{16}{3} \Rightarrow 8v_p^2 + 21v_p - 135 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим  $v_p = 3$ . (Второй корень уравнения  $v_p = -45/8$  не подходит по смыслу задачи.)

**Ответ.** Скорость течения реки (а также и скорость плота) равна 3 км/ч.

# Задачи на движение

При решении текстовых задач прежде всего необходимо решить вопрос о том, для каких неизвестных составить систему уравнений. В основу выбора неизвестных может быть положен следующий принцип: неизвестные следует вводить так, чтобы с помощью уравнений наиболее просто записать имеющиеся в задаче условия. При этом вовсе не обязательно, чтобы величина, которую требуется найти, содержалась среди выбранных неизвестных. Как правило, при таком выборе неизвестных искомая величина будет представлять собой некую комбинацию введенных неизвестных, для нахождения которой нет необходимости определять по отдельности все входящие в нее неизвестные.

В задачах на движение в качестве неизвестных обычно бывает удобно выбирать расстояние (если оно не задано) и скорости движущихся объектов, фигурирующих в условии задачи.



**Пример 1.3.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехал автомобиль, и одновременно из пункта  $B$  в пункт  $A$  выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта  $B$ , повернул назад и догнал велосипедиста через 2 ч после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта  $A$ , если известно, что к моменту второй встречи он проехал  $\frac{2}{5}$  всего пути от  $B$  до  $A$ ?

**Решение.** Введем следующие неизвестные: расстояние  $S$  между пунктами  $A$  и  $B$ , скорости велосипедиста и автомобилиста  $V_1$  и  $V_2$  соответственно,  $t$  — время от начала движения до первой встречи. Выпишем условие задачи в таблицу:

Условие задачи	Уравнение
<p>К моменту первой встречи <math>t</math> автомобиль и велосипедист вместе проезжают все расстояние между пунктами <math>A</math> и <math>B</math>.</p>	$(V_1 + V_2) \cdot t = S$
<p>Через два часа после момента первой встречи автомобиль, доехав до пункта <math>B</math> и повернув, догнал велосипедиста, т. е. путь, пройденный автомобилем, складывается из удвоенного расстояния, пройденного велосипедистом до первой встречи, и расстояния, которое велосипедист успел проехать за 2 ч.</p>	$2V_1 = 2tV_2 + 2V_2$
<p>К моменту второй встречи велосипедист проехал <math>\frac{2}{5}</math> всего расстояния между пунктами <math>A</math> и <math>B</math></p>	$V_2(t + 2) = \frac{2}{5} S$

Неизвестное  $x$ , которое требуется найти по условию задачи, представляет собой время, необходимое велосипедисту, чтобы доехать до пункта  $A$ , после первой встречи. Оно может быть выражено как следующая комбинация введенных неизвестных  $t$ ,  $V_a$ ,  $V_b$ :

$$x = \frac{V_a \cdot t}{V_b}.$$

Из системы уравнений

$$(V_a + V_b) t = S,$$

$$2V_a = 2tV_a + 2V_b,$$

$$V_b(t + 2) = \frac{2}{5} S$$

определим  $t$  и выразим отношение скоростей  $V_a/V_b$  через  $t$ .

Из второго уравнения системы имеем

$$V_a/V_b = t + 1. \quad (*)$$

Исключая  $S$  из первого и третьего уравнения системы и учитывая равенство (\*), получаем для неизвестной  $t$  уравнение

$$t(t + 2) = (t + 2) \cdot \frac{5}{2},$$

корни которого  $t_1 = -2$  и  $t_2 = 5/2$ .

Так как по физическому смыслу задачи  $t > 0$ , то искомое неизвестное имеет вид

$$x = (t + 1) t = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{4} = 8 \frac{3}{4}.$$

Ответ. 8 ч 45 мин.

# Задачи про поезд

## Задача про поезд, который едет мимо столба

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью **50 км/ч**, проезжает мимо придорожного столба за **72 секунды**. Найдите длину поезда в метрах.

**Решение:**

1

Сначала переведем км/ч в м/с, потому что необходимо найти количество метров и даны секунды:

$$50 \text{ км/ч} = \frac{50 \cdot 1000}{3600} \text{ м/с} = \frac{125}{9} \text{ м/с}$$

2

За **72 секунды** поезд пройдет мимо столба расстояние, равное своей длине, поэтому:

$$S = V \cdot t$$

$$S = \frac{125}{9} \cdot 72 = 1000 \text{ м}$$

**Ответ: 1000**

## Задача про поезд, который едет мимо лесополосы

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью **70 км/ч**, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна **1000 метров**, за **1 минуту 48 секунд**. Найдите длину поезда в метрах.

**Решение:**

1

Сначала переведем км/ч в м/с:

$$70 \text{ км/ч} = \frac{70 \cdot 1000}{3600} \text{ м/с} = \frac{175}{9} \text{ м/с}$$

2

За **1 минуту 48 секунд**, т.е. за **108 секунд** поезд пройдет расстояние, равное сумме длин лесополосы и самого поезда:

$$S = V \cdot t$$

$$S = \frac{175}{9} \cdot 108 = 2100 \text{ м}$$

3

Чтобы найти длину поезда, необходимо вычесть из пройденного расстояния длину лесополосы:

$$2100 - 1000 = 1100 \text{ м}$$

**Ответ: 1100**

# Задачи про поезда

## Задача про поезда, которые едут в одно направление

По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно  $80$  км/ч и  $50$  км/ч. Длина товарного поезда равна  $800$  метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно  $2$  минутам. Ответ дайте в метрах.

**Решение:**

1

Найдём скорость отдаления:

$$80 - 50 = 30 \text{ км/ч}$$

2

Переведём км/ч в м/мин:

$$30 \text{ км/ч} = \frac{30 \cdot 1000}{60} \text{ м/мин} = 500 \text{ м/мин}$$

3

За каждую минуту пассажирский поезд уходит в отрыв на  $500$  метров, т.е. за  $2$  минуты он уйдёт на  $1000$  метров, при этом он преодолеет путь, равный сумме длин поездов, поэтому:

$$1000 - 800 = 200 \text{ м}$$

Ответ: 200

## Задача про поезда, который едут навстречу друг другу

По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно  $70$  км/ч и  $50$  км/ч. Длина пассажирского поезда равна  $800$  метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского поезда, равно  $33$  секундам. Ответ дайте в метрах.

**Решение:**

1

Найдём скорость сближения:

$$70 + 50 = 120 \text{ км/ч}$$

2

Переведём км/ч в м/сек:

$$120 \text{ км/ч} = \frac{120 \cdot 1000}{3600} \text{ м/сек} = \frac{100}{3} \text{ м/сек}$$

3

За  $33$  секунды скорый поезд пройдёт расстояние, равное сумме длин двух поездов:

$$S = V \cdot t$$

$$S = \frac{100}{3} \cdot 33 = 1100 \text{ м}$$

Длина скорого поезда равна:

$$1100 - 800 = 300 \text{ м}$$

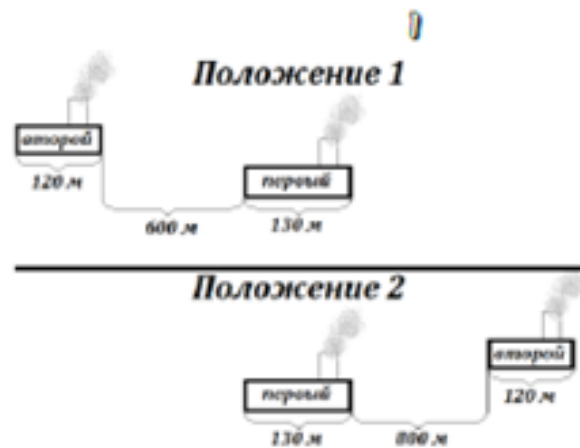
Ответ: 300

# Сложные задачи на движение

## Задача про сухогрузы

По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной **130** метров, второй – длиной **120** метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет **600** метров. Через **11** минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно **800** метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение:



2

Пока сухогрузы перейдут из «Положения 1» в «Положение 2» второй сухогруз переместится на:

$$S = 120 + 600 + 130 + 800 = 1650 \text{ м}$$

3

Мы ищем скорость отдаления:

$$V = \frac{S}{t} = \frac{1650 \text{ м}}{11 \text{ мин}} = 150 \text{ м/мин}$$

4

Переведем м/мин в км/ч:

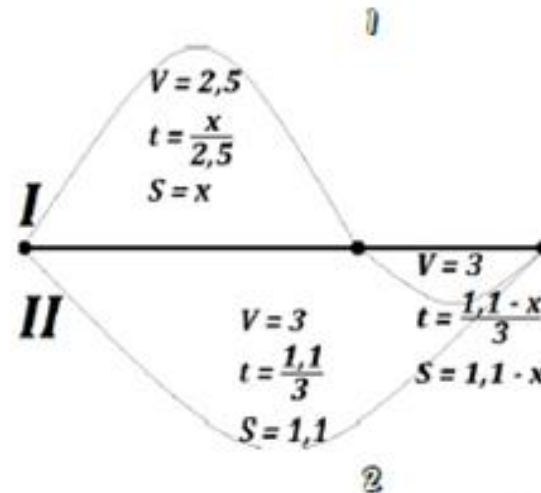
$$150 \text{ м/мин} = \frac{150 \cdot 60}{1000} \text{ км/ч} = 9 \text{ км/ч}$$

# Сложные задачи на движение

## Задача про опушку

Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в **1,1** км от места отправления. Один идёт со скоростью **2,5** км/ч, а другой – со скоростью **3** км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?

Решение:



Фундаментальное уравнение будет следующим:

$$t_{\text{до места встречи первого}} = t_{\text{до места встречи второго}}$$

③

Подставляем и решаем:

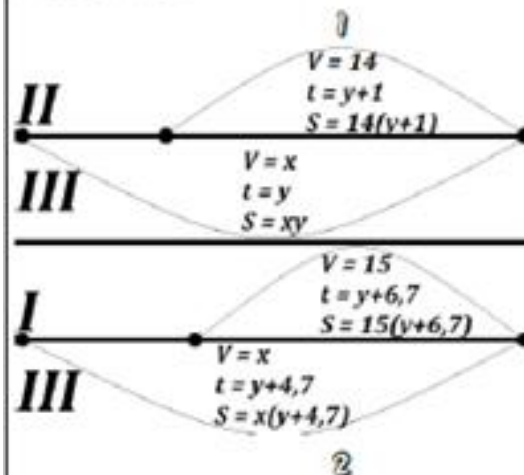
$$\frac{x}{2,5} = \frac{1,1}{3} + \frac{1,1 - x}{3}$$
$$\frac{x}{2,5} = \frac{1,1 + 1,1 - x}{3}$$
$$\frac{x}{2,5} = \frac{2,2 - x}{3}$$
$$3x = 5,5 - 2,5x$$
$$5,5x = 5,5$$
$$x = 1 \text{ км}$$

# Сложные задачи на движение

## Задача про трех велосипедистов

Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью **15** км/ч. Через час после него со скоростью **14** км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого – третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через **4** часа **42** минуты после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Решение:



Фундаментальных уравнений будет два, получается система:

$$\begin{cases} S_{\text{второго до встречи}} = S_{\text{третьего до встречи}} \\ S_{\text{первого до встречи}} = S_{\text{третьего до встречи}} \end{cases} \quad \text{Э}$$

Подставляем и решаем:

$$\begin{cases} 14(y + 1) = xy \\ 15(y + 6,7) = x(y + 4,7) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{14(y + 1)}{y} \\ 15(y + 6,7) = \frac{14(y + 1)}{y}(y + 4,7) \end{cases}$$
$$y = 2,8 \text{ ч}$$
$$x = \frac{14(y + 1)}{y} = \frac{14(2,8 + 1)}{2,8} = 19 \text{ км/ч}$$

# Задачи на работу и производительность труда

Система уравнений, которую можно составить на основании условий, в задачах на работу обычно содержит следующие величины: время  $t$ , в течение которого производится работа, производительность  $N$  — работу, произведенную в единицу времени, и собственно работу  $A$ , произведенную за время  $t$ .

Уравнение, связывающее эти три величины, имеет вид  $A = N \cdot t$ .

К задачам на работу можно с очевидными изменениями отнести часто встречающиеся задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве произведенной работы в этом случае удобно рассматривать объем перекачанной воды.



**Пример 2.1.** В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов одна первая труба может наполнить бассейн и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить полный бассейн?

**Решение.** Пусть  $V$  м<sup>3</sup> — объем бассейна, производительность подающей трубы —  $x$  м<sup>3</sup>/ч, отводящей —  $y$  м<sup>3</sup>/ч. Время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна, —  $V/x$  ч, время, необходимое отводящей трубе на опорожнение бассей-

на, —  $V/y$  ч. По условию задачи

$$V/x - V/y = 2.$$

Так как производительность отводящей трубы больше производительности наполняющей ( $x < y$ ), то при обеих включенных трубах будет происходить опорожнение бассейна и одна треть бассейна опорожнится за время  $\frac{V/3}{y-x}$ , которое по условию задачи равно 8 ч.

Итак, условие задачи может быть записано в виде системы двух уравнений для трех неизвестных

$$\begin{aligned} V/x - V/y &= 2, \\ V/(y-x) &= 24. \end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей во втором уравнении системы, на  $V$ . Тогда относительно непрерывных

$u = \frac{V}{x}$  и  $v = \frac{V}{y}$  получим следующую систему уравнений:

$$u - v = 2,$$

$$\frac{uv}{u - v} = 24,$$

которая эквивалентна системе

$$u - v = 2,$$

$$u \cdot v = 48,$$

т. е.  $u = 8$ ,  $v = 6$ .

Ответ. 8 ч и 6 ч.

**Пример 2.2.** Для прокладки траншей выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншей, на 3 ч меньше времени, необходимо второму экскаватору. Сумма этих времен в  $4\frac{4}{35}$  раза больше времени, необходимого для прокладки траншей при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншей.

**Решение.** В качестве неизвестных введем следующие величины:  $A$  м<sup>3</sup> — объем вынуженного грунта,  $N_1$  м<sup>3</sup>/ч и  $N_2$  м<sup>3</sup>/ч — производительности первого и второго экскаваторов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншей, —  $A/N_1$ , а второму —  $A/N_2$ . По условию задачи эти две величины связаны равенством

$$A/N_1 + 3 = A/N_2,$$

а их сумма  $A/N_1 + A/N_2$  в  $4 \frac{4}{35}$  раза больше времени, необходимого для прокладки траншей при совместной работе двух экскаваторов, т. е.

$$4 \frac{4}{35} \frac{A}{N_1 + N_2} = \frac{A}{N_1} + \frac{A}{N_2} \Leftrightarrow 4 \frac{4}{35} \frac{1}{\frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{A}} = \frac{A}{N_1} + \frac{A}{N_2}.$$

Введем неизвестные  $x = \frac{A}{N_1}$  и  $y = \frac{A}{N_2}$ . Тогда исходная система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} 4 \frac{4}{35} \frac{xy}{x+y} &= x + y \\ x + 3 &= y. \end{aligned}$$

Подставляя  $y$  из второго уравнения в первое, получаем относительно  $x$  следующее уравнение:

$$4x^2 + 12x - 315 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения  $x = 7,5$  представляет собой время самостоятельной прокладки траншеи первым экскаватором. Из второго уравнения системы получаем, что  $y = 10,5$ .

Ответ. 7,5 ч и 10,5 ч.

# Общая схема решения

1

Рисуем табличку:

	<b><i>A</i></b> пр-ть	<b><i>t</i></b> время	<b><i>V</i></b> кол-во
<b><i>I</i></b>	<b><i>A<sub>1</sub></i></b>	<b><i>t<sub>1</sub></i></b>	<b><i>V<sub>1</sub></i></b>
<b><i>II</i></b>	<b><i>A<sub>2</sub></i></b>	<b><i>t<sub>2</sub></i></b>	<b><i>V<sub>2</sub></i></b>

2

Что неизвестно – берём за ***x***

3

Рядом с ***x*** ставим ***y***

4

Дозаполняем таблицу и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1 \cdot t_1 = V_1 \\ A_2 \cdot t_2 = V_2 \end{cases}$$

# Задачи про рабочих

Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

**Решение:**

	$A$ пр-ть	$t$ время	$V$ кол-во
$I$	$x+3$	$y-3$	180
$II$	$x$	$y$	180

$$\begin{cases} (x+3) \cdot (y-3) = 180 \\ xy = 180 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} xy - 3x + 3y - 9 = 180 \\ xy = 180 \end{cases}$$

$$180 - 3x + 3y - 9 = 180$$

$$-3x + 3y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow y = x + 3$$

$$xy = 180$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) = 180$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$x_1 = 12$$

$$x_2 = -15 \text{ (не подходит)}$$

# Задачи про трубы

Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 192 литра она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба

**Решение:**

	<i>A</i> пр-ть	<i>t</i> время	<i>V</i> кол-во
<i>I</i>	$x$	$y$	192
<i>II</i>	$x+4$	$y-4$	192

$$\begin{aligned} & \begin{cases} xy = 192 \\ (x+4) \cdot (y-4) = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 192 \\ xy - 4x + 4y - 16 = 192 \end{cases} \\ & 192 - 4x + 4y - 16 = 192 \\ & -4x + 4y - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y = 4x + 16 \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 4 \\ & xy = 192 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+4) = 192 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 192 = 0 \\ & x_1 = 12 \quad \quad \quad x_2 = -16 \text{ (не подходит)} \end{aligned}$$

# Задача про садовый насос

В помощь садовому насосу, перекачивающему 8 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 7 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 36 литров воды?

**Решение:**

1

Первый насос перекачивает 8 литров воды за 2 минуты:

$8 : 2 = 4$  (л/мин) – производительность первого насоса.

Второй насос перекачивает 8 литров воды за 7 минут:

$8 : 7 = \frac{8}{7}$  (л/мин) – производительность второго насоса.

$\frac{8}{7} + 4 = \frac{36}{7}$   $\left(\frac{\text{л}}{\text{мин}}\right)$  – производительность двух насосов.

2

Подставим в формулу  $A \cdot t = V$ :

$$\frac{36}{7} \cdot t = 36 \quad \leftrightarrow \quad t = 7$$



# Задача про выполнение теста

Петя и Митя выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на **10** вопросов теста, а Митя – на **16**. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Мити на **117** минут. Сколько вопросов содержит тест?

**Решение:**

	<i>A</i> пр-сть	<i>t</i> время	<i>V</i> вопросов
<i>I</i>	10	$\frac{x}{10}$	<i>x</i>
<i>II</i>	16	$\frac{x}{16}$	<i>x</i>

Фундаментальное уравнение будет следующим:

$$t_{\text{Петя}} - t_{\text{Митя}} = \frac{117}{60} \text{ ч}$$
$$\frac{x}{10} - \frac{x}{16} = \frac{117}{60}$$
$$x = 52$$

# Задача про рабочих одинаковой квалификации

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 16 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

**Решение:**

Первый рабочий выполняет весь заказ за 16 часов.

Первый рабочий за 1 час выполняет  $\frac{1}{16}$  заказа.

Первый рабочий за 2 часа сделает  $\frac{2}{16}$  заказа.

Осталось  $1 - \frac{2}{16} = \frac{14}{16}$  заказа.

Производительность двух рабочих сразу равна  $2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$

Подставим в формулу  $A \cdot t = V$ :

$$\frac{2}{16} \cdot t = \frac{14}{16} \quad \Leftrightarrow \quad t = 7$$

Ответ: 7

# Задачи на совместную работу

Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой – за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

**Решение:**

1

Мастер 1 за 15 часов выполняет весь заказ.

Мастер 1 за 1 час выполняет  $\frac{1}{15}$

всего заказа.

Мастер 2 за 10 часов выполняет весь заказ.

Мастер 2 за 1 час выполняет  $\frac{1}{10}$

всего заказа.

2

Вместе за 1 час они выполняют:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \text{ заказа.}$$

3

Значит весь заказ они выполнят за 6 часов.

# Задачи на совместную работу

Первый насос наполняет бак за 1 час, второй – за 1 час 30 минут, а третий – за 1 час 48 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

**Решение:**

1

Насос 1 за 60 минут наполняет бак.

Насос 1 за 1 минуту наполняет  $\frac{1}{60}$  бака.

Насос 2 за 90 минут наполняет бак.

Насос 2 за 1 минуту наполняет  $\frac{1}{90}$  бака.

Насос 3 за 108 минут наполняет бак.

Насос 3 за 1 минуту наполняет  $\frac{1}{108}$  бака.

2

Втроём за 1 минуту они наполнят:

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{90} + \frac{1}{108} = \frac{20}{540} = \frac{1}{27} \text{ бака}$$

3

Значит весь бак втроём они наполнят за 27 минут.

# Задачи на совместную работу

Валя и Галя пропалывают грядку за 35 минут, а одна Галя – за 60 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Валя?

**Решение:**

Валя и Галя за 35 минут пропалывают всю грядку.

Валя и Галя за 1 минуту пропалывают  $\frac{1}{35}$  грядки.

Одна Галя за 60 минут пропалывает всю грядку.

Одна Галя за 1 минуту пропалывает  $\frac{1}{60}$  грядки.

Чтобы найти производительность Вали необходимо вычесть из их общей производительности производительность Гали:

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{60} = \frac{1}{84} \text{ грядки}$$

Значит всю грядку Валя сможет прополоть за 84 минуты.

# Задачи на совместную работу

Две трубы наполняют бассейн за 1 час 55 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 46 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

**Решение:**

1  
Две трубы за  $1\frac{55}{60}$  ч =  $\frac{23}{12}$  ч

наполняют весь бассейн.

Две трубы за 1 час наполняют

$\frac{1}{23} = \frac{12}{23}$  бассейна.

Одна первая труба за 46 часов наполняет весь бассейн.

Одна первая труба за 1 час

наполняет  $\frac{1}{46}$  бассейна.

2

Чтобы найти производительность

второй трубы необходимо

вычесть из их общей

производительности

производительность первой

трубы:

$\frac{12}{23} - \frac{1}{46} = \frac{1}{2}$  бассейна

3

Значит весь бассейн вторая труба

сможет наполнить за 2 часа.

# Задачи на совместную работу

Первая труба наполняет резервуар на 90 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 24 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

**Решение:**

1

Две трубы за 24 минуты наполняют весь резервуар.

Две трубы за 1 минуту наполняют  $\frac{1}{24}$  всего резервуара.

Одна вторая труба за  $x$  минут наполняет весь резервуар.

Одна вторая труба за 1 минуту наполняет  $\frac{1}{x}$  всего резервуара.

Одна первая труба за  $x + 90$  минут наполняет весь резервуар.

Одна первая труба за 1 минуту наполняет  $\frac{1}{x + 90}$  всего резервуара.

2

Вместе за 1 минуту они наполняют:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 90} = \frac{1}{24} \text{ всего резервуара}$$

$$\frac{x^2 + 90x}{2x + 90} = \frac{1}{24}$$

$$48x + 2160 = x^2 + 90x$$

$$x^2 + 42x - 2160 = 0$$

$$x = 30$$

# Задачи на сплавы и смеси

В сосуд, содержащий 7 литров 14 – процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

**Решение:**

↓

Общая схема решения задач на смеси:

$$\text{Доля}_1 \cdot V_1 + \text{Доля}_2 \cdot V_2 = \text{Доля}_3 \cdot V_3$$

Ⓢ

$$0,14 \cdot 7 + 0 \cdot 7 = x \cdot 14$$

$$0,98 = 14x$$

$$x = 0,07 = 7\%$$

Ответ: 7

Смешали некоторое количество 13 – процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17 – процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

**Решение:**

↓

Общая схема решения задач на смеси:

$$\text{Доля}_1 \cdot V_1 + \text{Доля}_2 \cdot V_2 = \text{Доля}_3 \cdot V_3$$

Ⓢ

$$0,13 \cdot V + 0,17 \cdot V = x \cdot 2V$$

$$0,3V = 2xV$$

$$0,3 = 2x$$

$$x = 0,15 = 15\%$$

Ответ: 15



# Задачи на сплавы и смеси

Смешали 3 литра 25 – процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 15 – процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

**Решение:**

↓

Общая схема решения задач на смеси:

$$\text{Доля}_1 \cdot V_1 + \text{Доля}_2 \cdot V_2 = \text{Доля}_3 \cdot V_3$$

Ⓢ

$$0,25 \cdot 3 + 0,15 \cdot 12 = x \cdot 15$$

$$0,75 + 1,8 = 15x$$

$$2,55 = 15x$$

$$x = 0,17 = 17\%$$

Ответ: 17

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 14 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

**Решение:**

↓

Общая схема решения задач на сплавы:

$$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$$

Ⓢ

$$0,05 \cdot m_1 + 0,14 \cdot (m_1 + 9) = 0,11 \cdot (2m_1 + 9)$$

$$0,05m_1 + 0,14m_1 + 1,26 = 0,22m_1 + 0,99$$

$$0,27 = 0,03m_1$$

$$m_1 = 9$$

$$m_3 = 2m_1 + 9 = 2 \cdot 9 + 9 = 27$$

# Задачи на сплавы и смеси, решающиеся системой

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

**Решение:**

1

Общая схема решения задач на сплавы:

$$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$$

2

$$\begin{cases} 0,1 \cdot m_1 + 0,35 \cdot m_2 = 0,3 \cdot 150 \\ m_1 + m_2 = 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 150 \\ 0,1 \cdot m_1 + 0,35 \cdot m_2 = 0,3 \cdot 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1 \cdot m_1 + 0,35 \cdot m_2 = 0,3 \cdot 150 \\ m_1 = 150 - m_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = 150 - m_2 \\ 0,1 \cdot (150 - m_2) + 0,35 \cdot m_2 = 0,3 \cdot 150 \end{cases}$$

$$0,1 \cdot (150 - m_2) + 0,35 \cdot m_2 = 0,3 \cdot 150$$

$$m_2 = 120$$

$$m_1 = 150 - m_2 = 150 - 120 = 30$$

$$m_2 - m_1 = 120 - 30 = 90$$

Ответ: 90

# Задачи на сплавы и смеси, решающиеся системой

Смешав 6 – процентный и 74 – процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 19 – процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50 – процентного раствора той же кислоты, то получили бы 24 – процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 6 – процентного раствора использовали для получения смеси?

**Решение:**

¶

Общая схема решения задач на сплавы:

$$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$$

§

$$\begin{cases} 0,06 \cdot m_1 + 0,74 \cdot m_2 + 0 \cdot 10 = 0,19 \cdot (m_1 + m_2) \\ 0,06 \cdot m_1 + 0,74 \cdot m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,24 \cdot (m_1 + m_2) \end{cases}$$

$$m_2 = 90 - m_1$$

$$0,06m_1 + 0,74(90 - m_1) + 0 \cdot 10 = 0,19(m_1 + (90 - m_1))$$

$$m_1 = 70$$

Ответ: 70

# Задачи на сплавы и смеси, решающиеся системой

Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй – 60 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти раствора смешать, то получится раствор, содержащий 41% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

**Решение:**

1

Общая схема решения задач на сплавы:

$$\text{Доля}_1 \cdot m_1 + \text{Доля}_2 \cdot m_2 = \text{Доля}_3 \cdot m_3$$

2

$$\begin{cases} x \cdot 100 + y \cdot 60 = 0,41 \cdot 160 \\ x \cdot m + y \cdot m = 0,5 \cdot 2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100x + 60y = 65,6 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad : m$$

$$\begin{cases} 100x + 60y = 65,6 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 100x + 60 \cdot (1 - x) = 65,6 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$x = 0,14$$

$$x \cdot 100 = 0,14 \cdot 100 = 14$$

Ответ: 14

# Легкие задачи на проценты

- Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов десять таких рубашек, дороже одной куртки?

**Решение:**

1

Куртку принимаем за 100%  
7 рубашек принимаем за 98%

2

Узнаем сколько процентов  
составляет одна рубашка:

$$98 : 7 = 14\%$$

3

Узнаем сколько процентов  
составляют десять рубашек:  $14 \cdot$

$$10 = 140\%$$

4

Десять рубашек дороже куртки  
на:

$$140 - 100 = 40\%$$

**Ответ: 40**

# Легкие задачи на проценты

Митя, Артем, Паша и Женя учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 18% уставного капитала, Артем – 60000 рублей, Паша – 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Женя. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1100000 рублей причитается Жене? Ответ дайте в рублях.

**Решение:**

Сначала узнаем какая доля кому принадлежит:

Митя: 18% или 0,18

Артем:

$$\frac{200\,000 - 100\%}{60\,000 - x\%} \Leftrightarrow x = \frac{60\,000 \cdot 100}{200\,000} = 30$$

Артем: 30% или 0,3

Паша: 18% или 0,18

Женя:

$$1 - 0,18 - 0,3 - 0,18 = 0,34$$

Женя: 34% или 0,34

От прибыли 1 100 000 рублей Женя получит 0,34 всех этих денег, т.е.:

$$0,34 \cdot 1\,100\,000 = 374\,000$$

**Ответ: 374000**

# Легкие задачи на проценты

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 82 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

**Решение:**

1

Виноград содержит: 90% воды и 10% сухого вещества.

Изюм содержит: 5% воды и 95% сухого вещества.

2

Узнаем сколько сухого вещества содержится в 82 кг изюма:

$$\begin{array}{l} 82 - 100\% \\ x - 95\% \end{array} \leftrightarrow x = \frac{82 \cdot 95}{100} = 77,9$$

3

Узнаем сколько винограда потребуется, чтобы получить из него 77,9 кг сухого вещества:

$$\begin{array}{l} x - 100\% \\ 77,9 - 10\% \end{array} \leftrightarrow x = \frac{77,9 \cdot 100}{10} = 779$$

Ответ: 779

# Легкие задачи на проценты

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличивалась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

**Решение:**

1

Пусть муж приносит в бюджет  $x\%$ .

Пусть жена приносит в бюджет  $y\%$ .

Пусть дочь приносит в бюджет  $z\%$ .

2

$$\begin{cases} x + y + z = 100\% \\ 3x + y + z = 212\% \\ x + y + 0,5z = 97\% \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 112\% \\ 0,5z = 3\% \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 56\% \\ z = 6\% \end{cases}$$

3

Осталось найти процент вклада жены в общий доход семьи:

$$100 - 56 - 6 = 38\%$$

**Ответ: 38**



# Легкие задачи на проценты

Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20900 рублей, через два года был продан за 16929 рублей.

**Решение:**

Пусть цена уменьшается на  $x\%$ , тогда цена через год:

$$\frac{20900 - 100\%}{? - 100 - x\%} \leftrightarrow ? = \frac{2090000 - 20900x}{100}$$

Цена через год =  $20900 - 209x$

Цена продолжает уменьшаться на  $x\%$ , тогда цена через 2 года:

$$\frac{20900 - 209x - 100\%}{? - 100 - x\%} = \frac{2090000 - 20900x - 20900x + 209x^2}{100}$$

Цена через 2 года =  $20900 - 418x + 2,09x^2$

Цена через 2 года по условию равна 16929, получается уравнение:

$$20900 - 418x + 2,09x^2 = 16929$$

$$2,09x^2 - 418x + 3971 = 0 \quad ( : 209 )$$

$$0,01x^2 - 2x + 19 = 0 \quad (\cdot 100)$$

$$x^2 - 200x + 1900 = 0$$

$$D = 32400$$

$$x_1 = \frac{200 - 180}{2} = 10\%$$

$$x_2 = \frac{200 + 180}{2} = 190\% \text{ (не может быть ответом)}$$

Ответ: 10

# Задачи на движение по кругу

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

**Решение:**

1

Изначально между мотоциклистами расстояние в половину круга, т.е. 11 км.

2

Разница в скорости 20 км/ч означает, что за 60 минут между ними образуется 20 километров отставания, а догонит быстрый медленного когда дистанция отставания составит 11 км.

Получается пропорция:

60 мин – 20 км

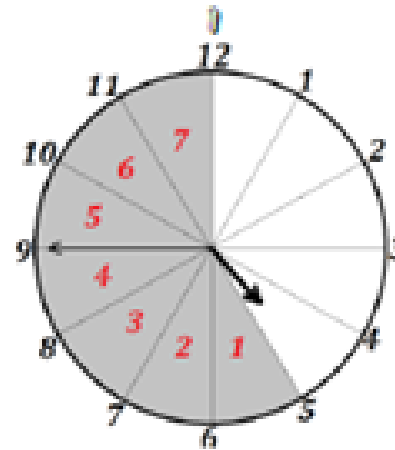
x мин – 11 км

$$x = \frac{60 \cdot 11}{20} = 33 \text{ км}$$

**Ответ: 33**

# Задачи на движение по кругу

**Решение:**



Часы со стрелками показывают 4 часа 45 минут. Через сколько минут минутная стрелка в седьмой раз поравняется с часовой?

7-ой раз минутная стрелка поравняется с часовой в 12:00

⊗

Время старта 4:45

Время финиша 12:00

Осталось найти сколько времени пройдет с 4:45 до 12:00:

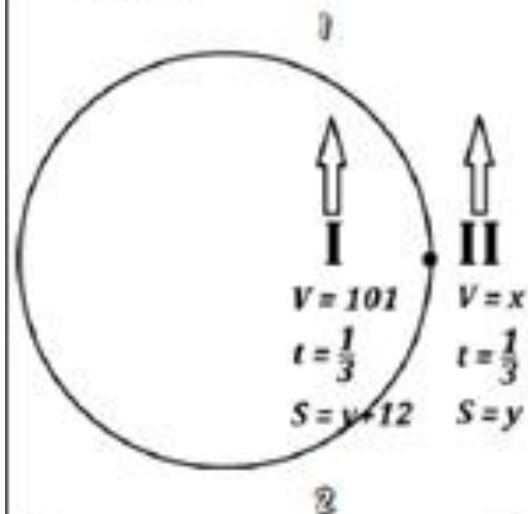
$$7 \cdot 60 + 15 = 435$$

Ответ: 435

# Задачи на движение по кругу

Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 101 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение:



Фундаментальных уравнений будет два, получается система:

$$\begin{cases} V_{\text{первого}} \cdot t_{\text{первого}} = S_{\text{первого}} \\ V_{\text{второго}} \cdot t_{\text{второго}} = S_{\text{второго}} \end{cases}$$

Подставляем и решаем:

$$\begin{cases} 101 \cdot \frac{1}{3} = y + 12 \\ x \cdot \frac{1}{3} = y \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{65}{3} \\ \frac{x}{3} = \frac{65}{3} \end{cases}$$
$$x = 65$$

Ответ: 65

# Задачи на движение по кругу

Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он ещё не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а ещё через 44 минуты после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 33 км. Ответ дайте в км/ч.

**Решение:**

↓  
Велосипедист за 40 минут проехал столько же, сколько мотоциклист проехал за 10 минут, значит мотоциклист в 4 раза быстрее.

Пусть  $x$  – скорость велосипедиста.  
Тогда  $4x$  – скорость мотоциклиста  
Тогда  $3x$  – скорость сближения.

⊗  
За 44 минуты мотоциклист проехал на 33 км больше. Узнаем на сколько больше мотоциклист проедет за час:

$$\begin{array}{l} 44 \text{ мин} - 33 \text{ км} \\ 60 \text{ мин} - ? \text{ км} \\ ? = \frac{60 \cdot 33}{44} = 45 \text{ км} \end{array}$$

Ⓞ  
Получается, что за 1 час между ними будет 45 километров, значит скорость сближения 45 км/ч.

$$\begin{array}{l} 3x = 45 \quad \leftrightarrow \quad x = 15 \\ 4x = 60 \end{array}$$

# Задачи на движение по кругу

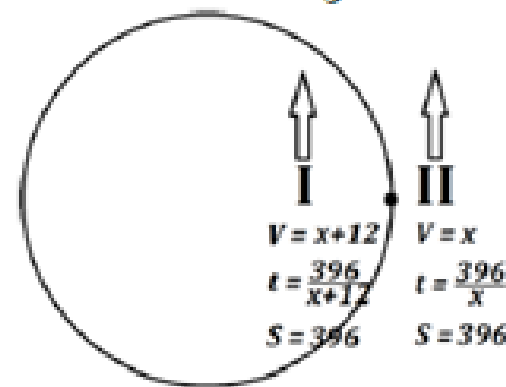
Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 22 минуты. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 минут? Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 108

Решение:

Из условия понятно, что быстрый гонщик проезжает на 4 км больше за 20 минут, следовательно он проедет на 12 км больше за 1 час, т.е. разница в скорости 12 км/ч.

Весь путь составит  $99 \cdot 4 = 396$  км



Фундаментальное уравнение будет следующим:

$$t_{\text{медленного}} - t_{\text{быстрого}} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$$

Подставляем и решаем:

$$\frac{396}{x} - \frac{396}{x + 12} = \frac{11}{30}$$