

Графики.

Задания № 11 и № 22

ОГЭ-2023

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задание №11 ОГЭ -2023.

Графики функций

Проверяемые требования к математической подготовке -
уметь строить и читать графики функций.

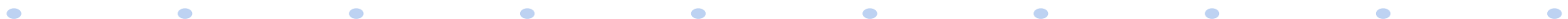
То есть необходимо находить и использовать в выполнении задания область определения функции, ее промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, нули функции, уметь читать графики функций.

Рассматриваются:

- линейные функции, в т. ч. прямой пропорциональной зависимости,
- квадратичные функции
- функции обратной пропорциональности
- функции квадратного корня

Характеристика задания

Задания, связанные с функциями и их графиками ежегодно включаются в варианты ОГЭ по математике. Это задания на чтение графиков, задания, в которых требуется установить соответствие между функциями, заданными формулами, и графиками этих функций, либо вариации последних, предполагающие ответ на вопрос, какая из нескольких формул задает функцию, график которой приведен в условии, или какой из нескольких данных графиков соответствует функции, заданной указанной в условии формулой.

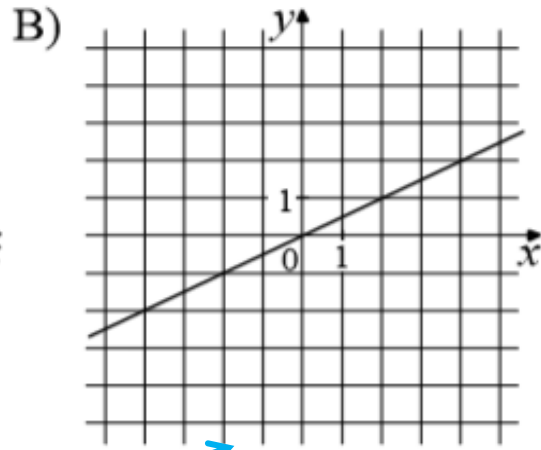
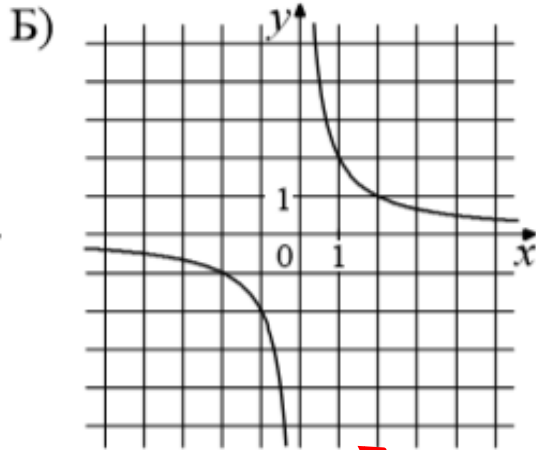
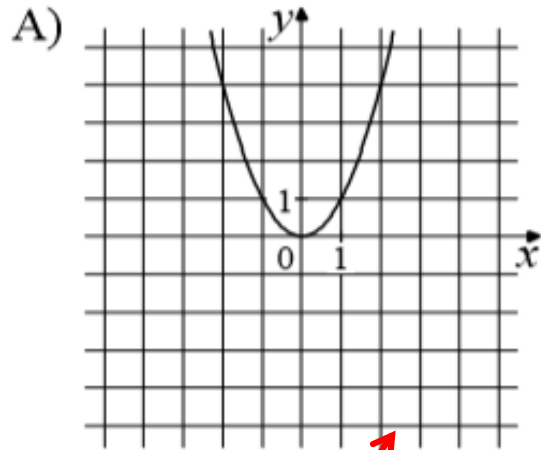


Демонстрация ОГЭ - 2023

11

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = x^2$

2) $y = \frac{x}{2}$

3) $y = \frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

Теория к заданию №11

Линейная функция (график – прямая)

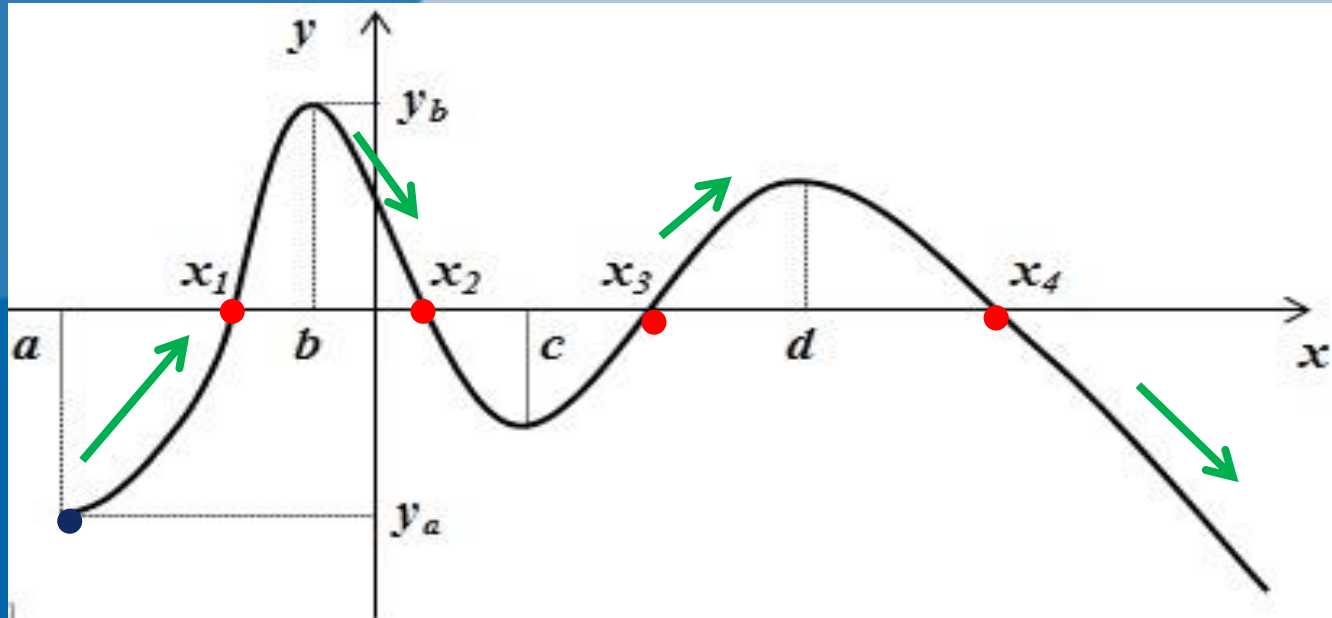
Прямая пропорциональность (график - прямая, проходящая через начало координат)

Обратная пропорциональность (график – гипербола)

Квадратичная функция (график – парабола)

Функция квадратного корня





Область определения:

$$D(f) : x \in [a; \infty)$$

Множество значений:

$$E(f) : y \in (-\infty; y_b]$$

Корни функции:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Промежутки возрастания:

$$x \in [a, b] \cup [c, d]$$

Промежутки убывания:

$$x \in [b, c] \cup [d, \infty)$$

ТЕОРИЯ

Линейная функция

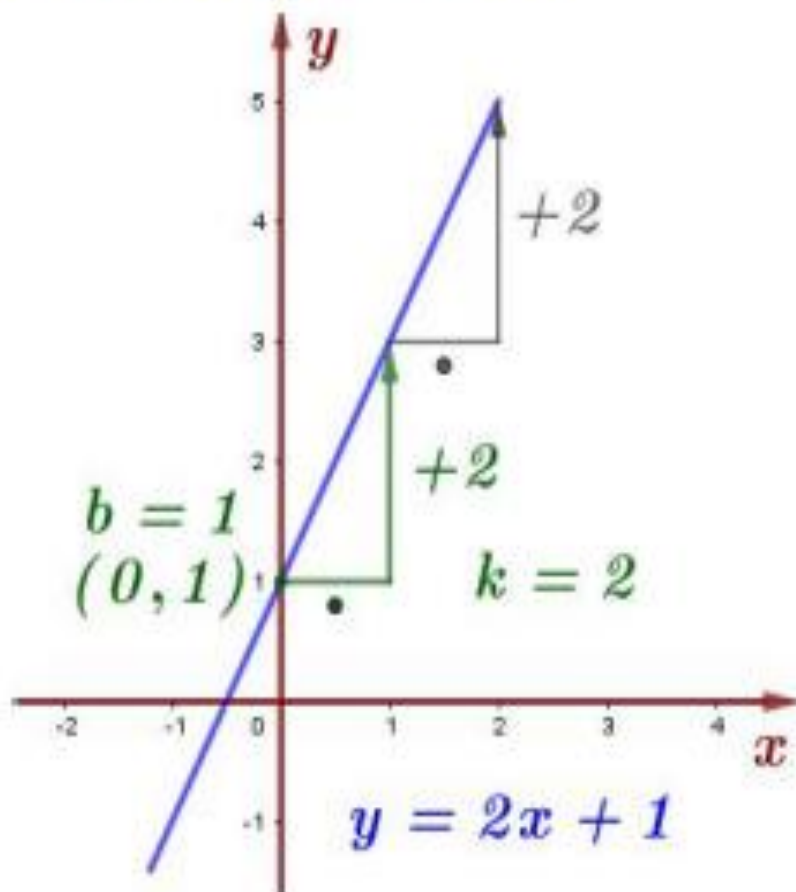


График: прямая линия

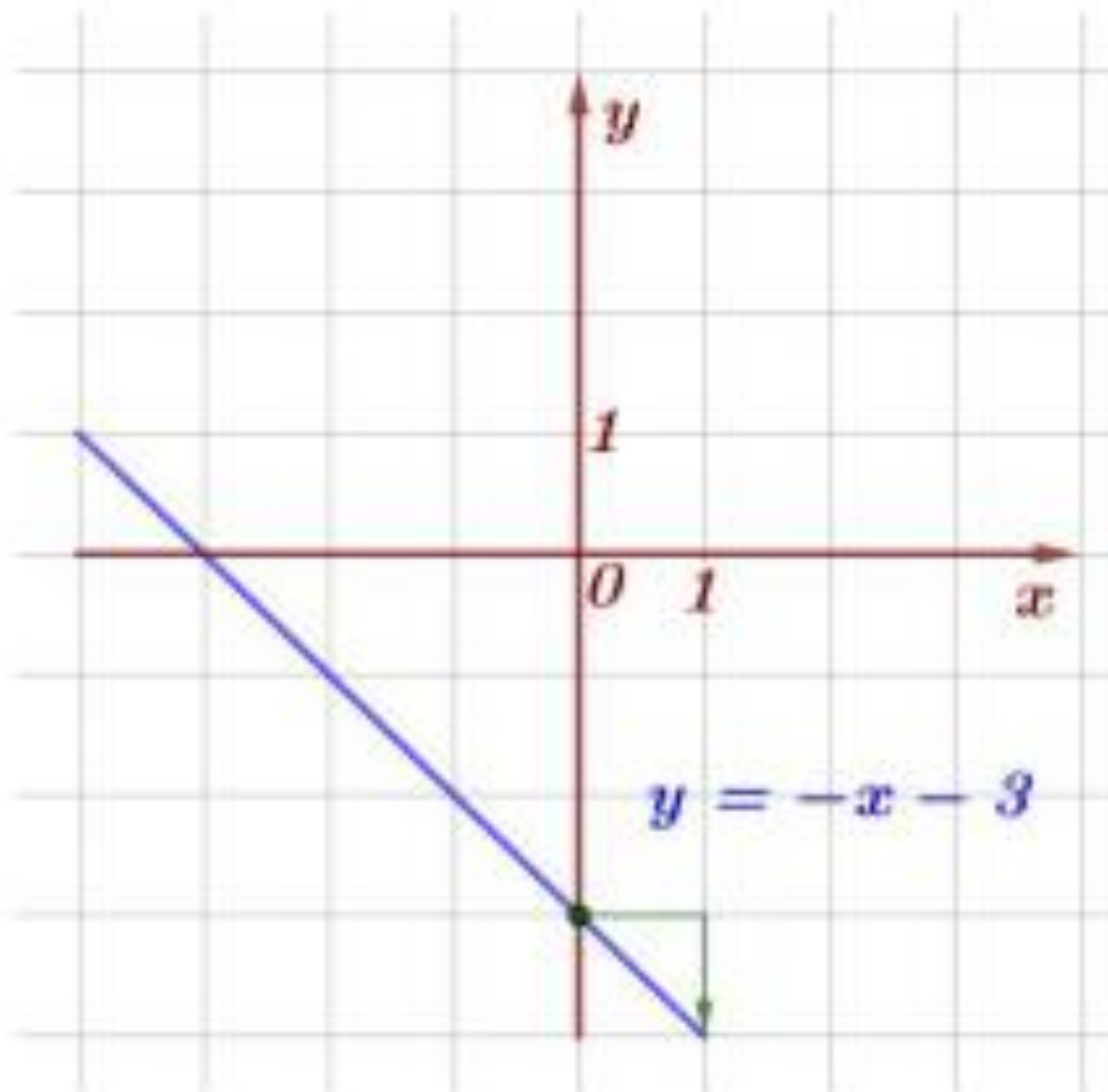
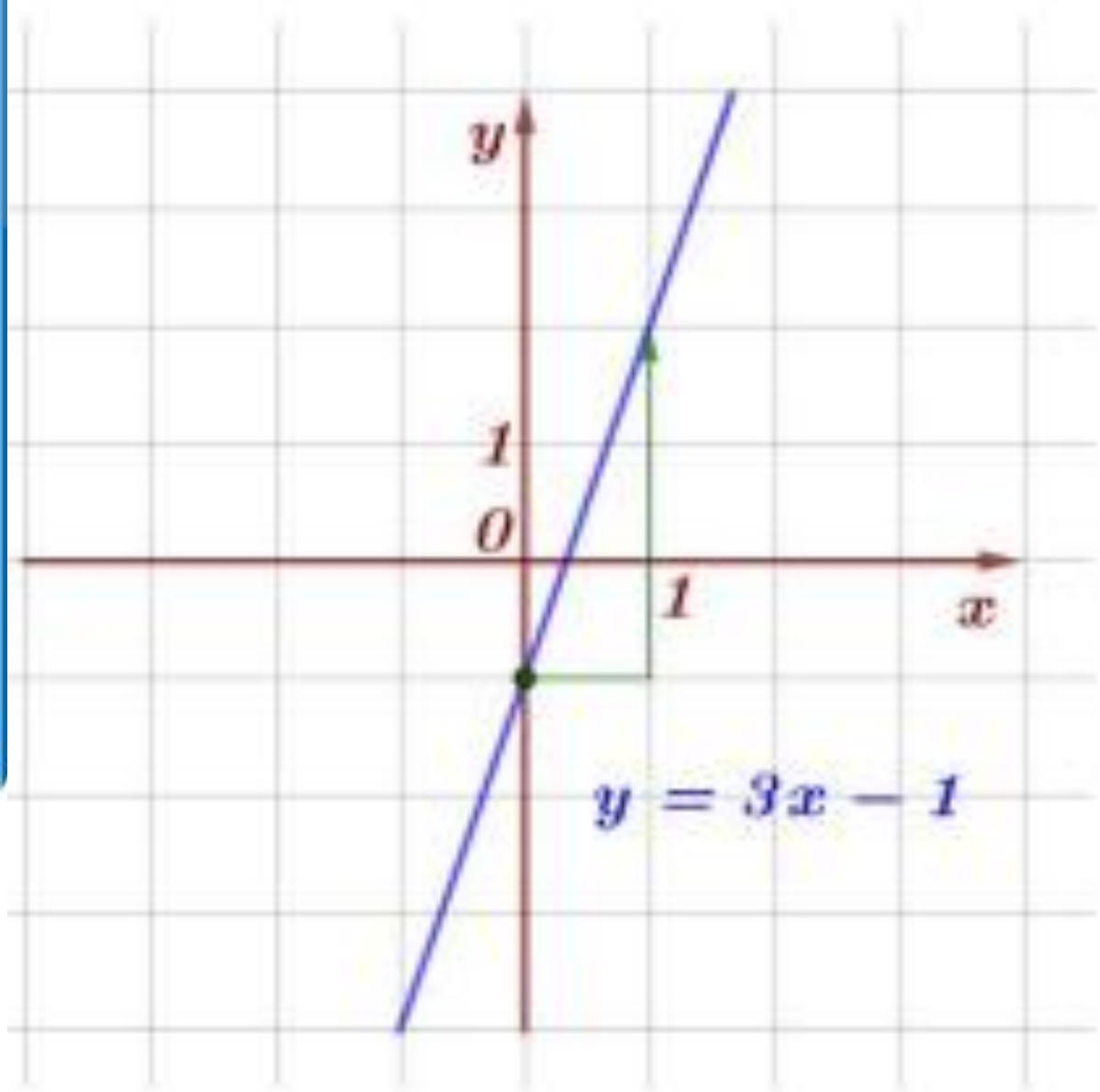
Общий вид: $y = kx + b$

k – коэффициент возрастания/убывания

$k > 0 \rightarrow$ возрастает \nearrow $k < 0 \rightarrow$ убывает \searrow

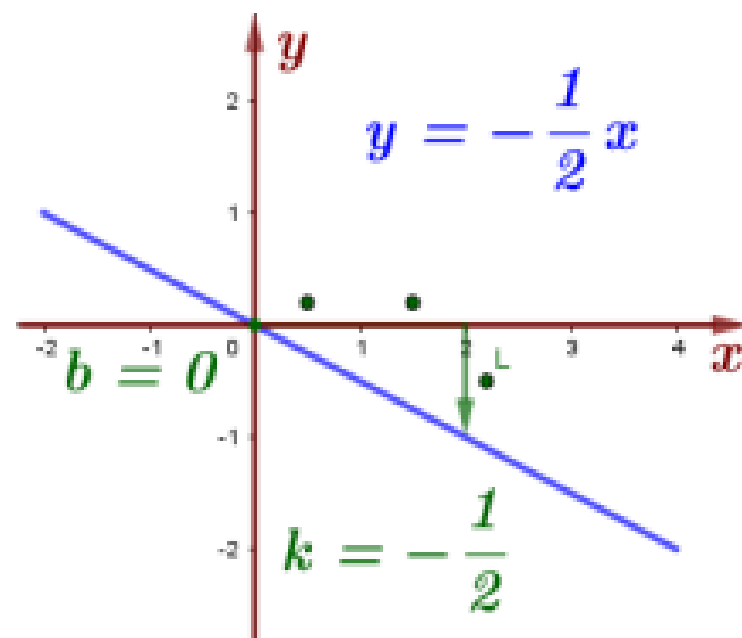
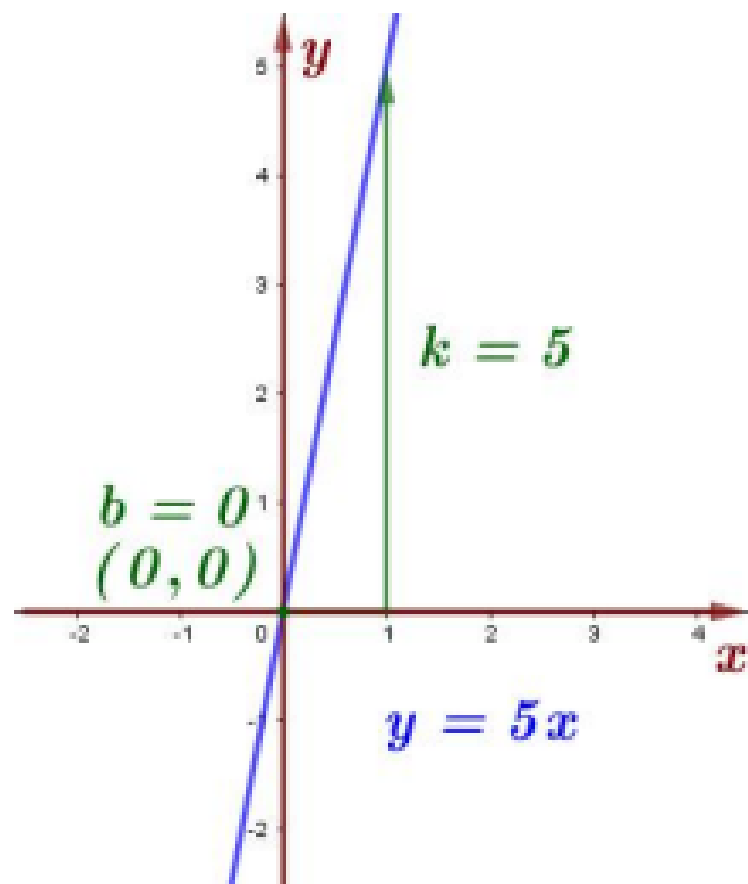
b – начальная ордината $b = y(0)$

$(0, b)$ – точка пересечения с осью Oy



Прямая пропорциональность

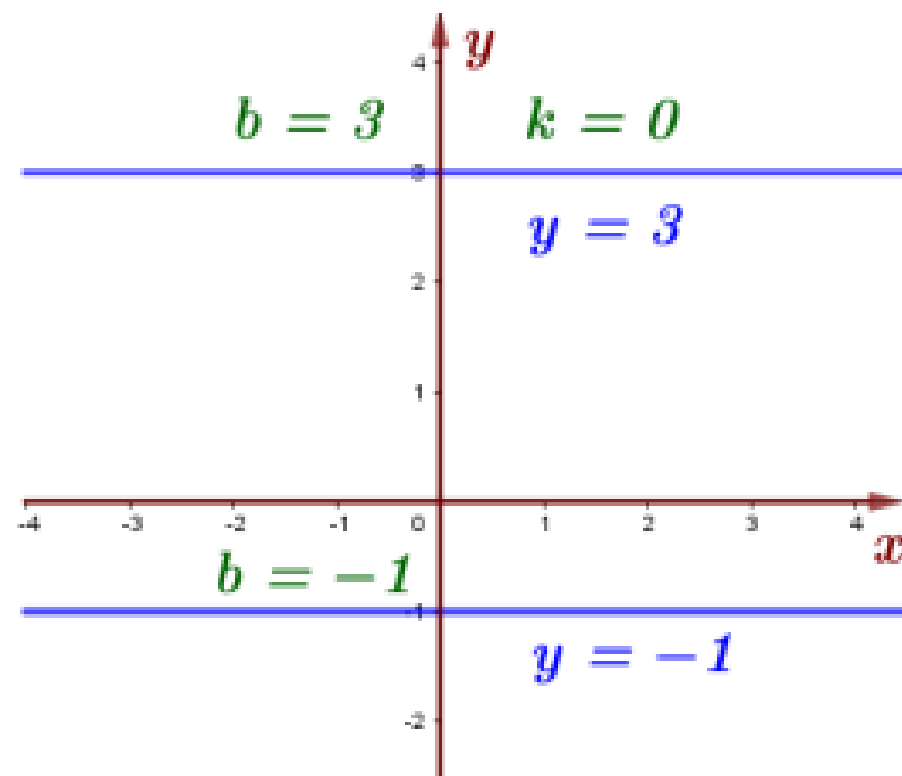
$$y = kx \quad (b=0)$$

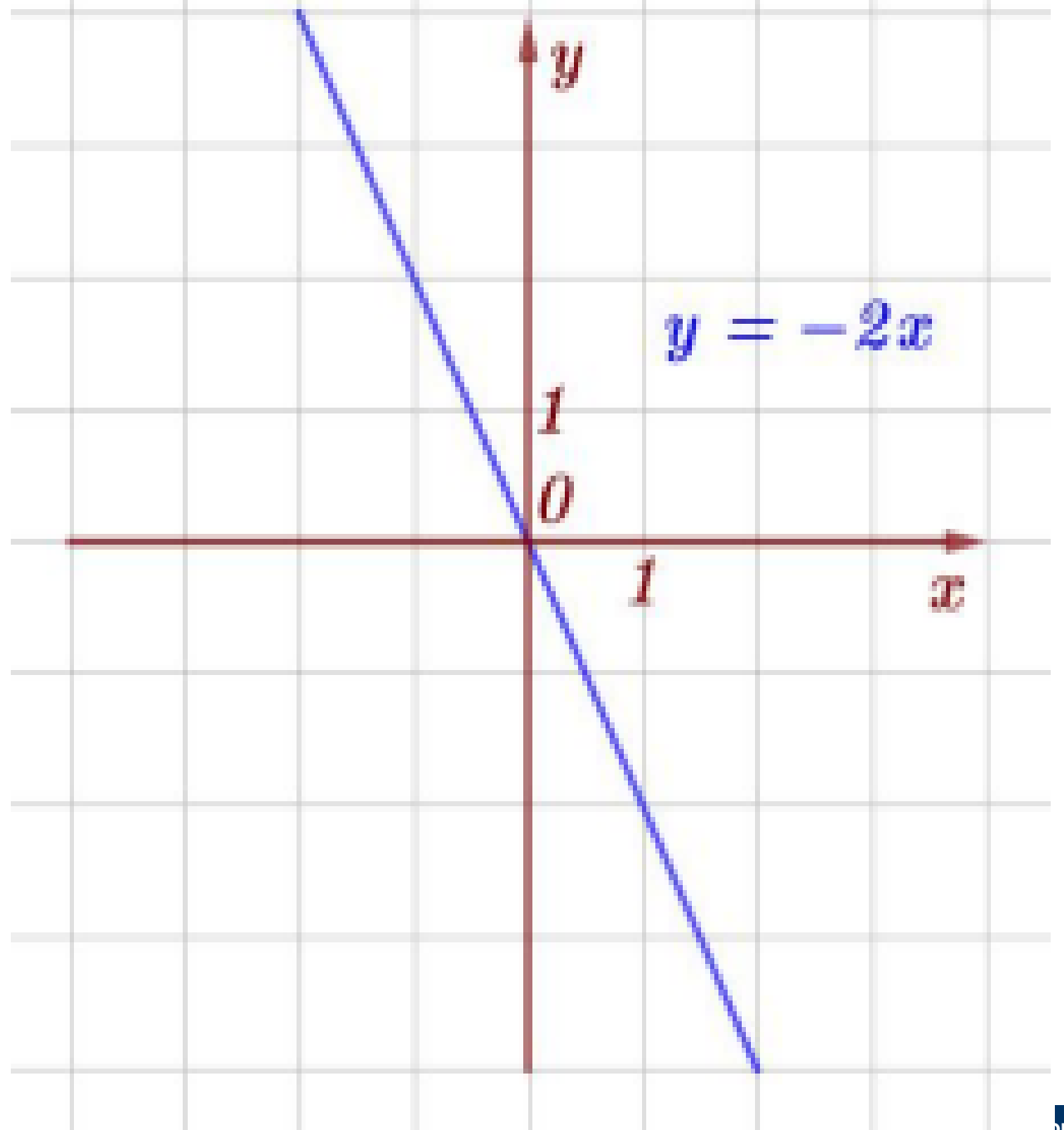
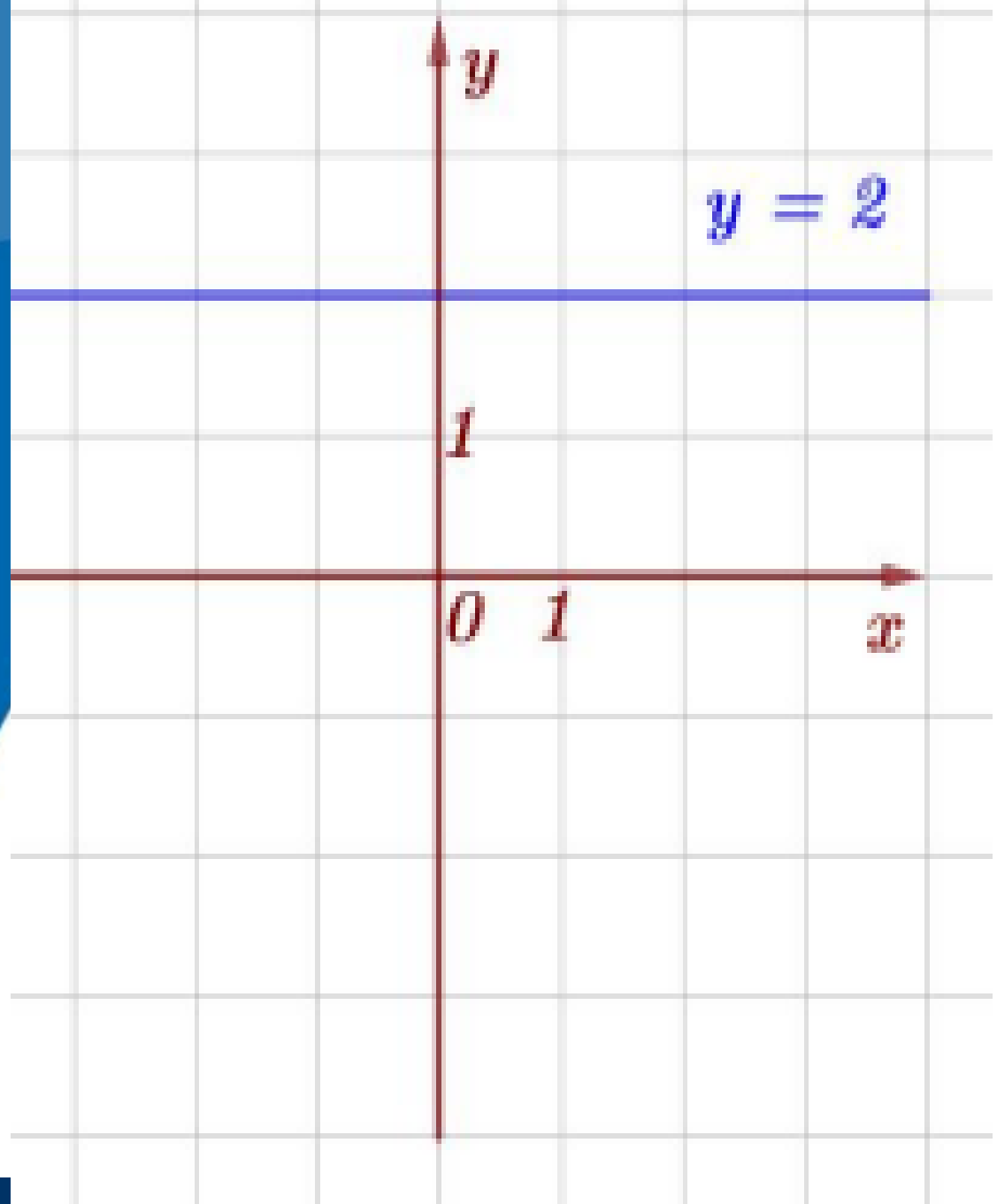


Постоянная функция

$$y = b \quad (k=0)$$

параллельна оси Ox





Квадратичная функция

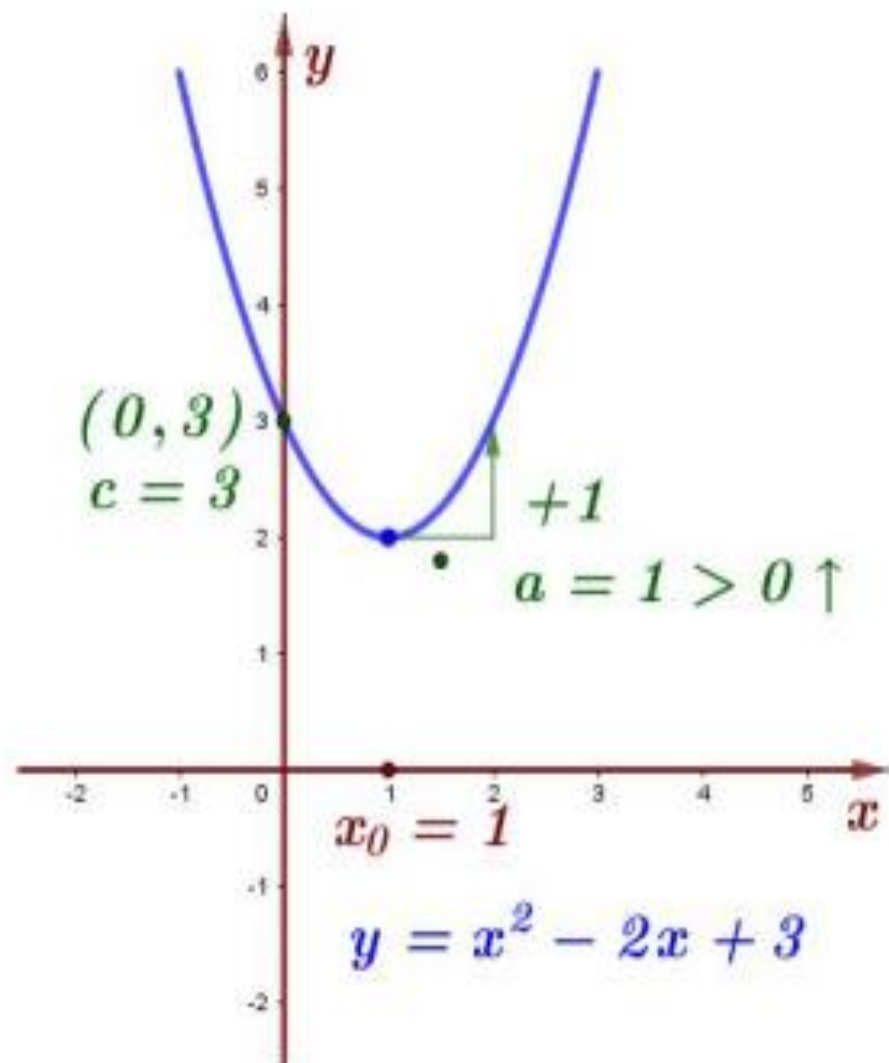


График: парабола

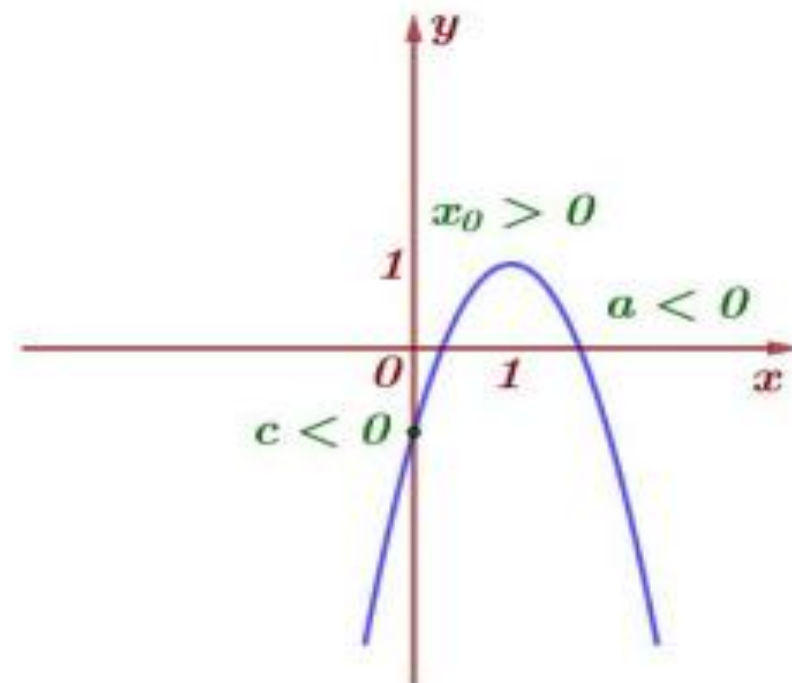
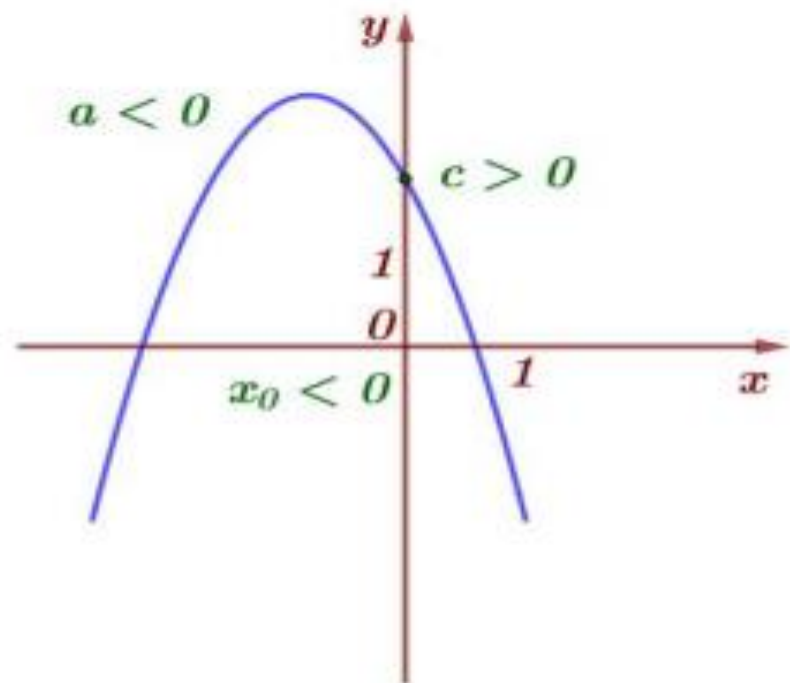
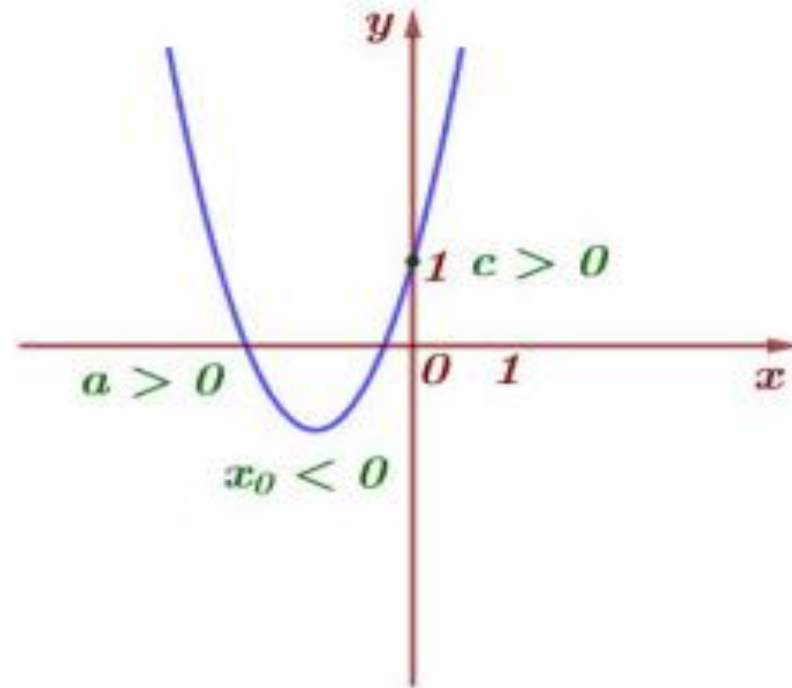
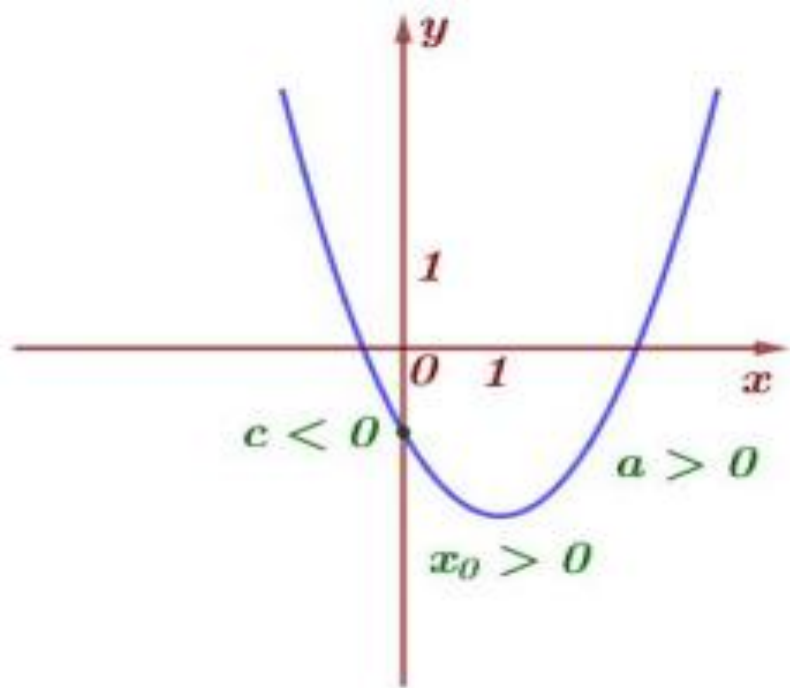
Общий вид: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

$a > 0 \rightarrow$ ветви направлены вверх \cup

$a < 0 \rightarrow$ ветви направлены вниз \cap

абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

$c = y(0)$, $(0, c)$ – точка пересечения с осью Oy



Обратная пропорциональность

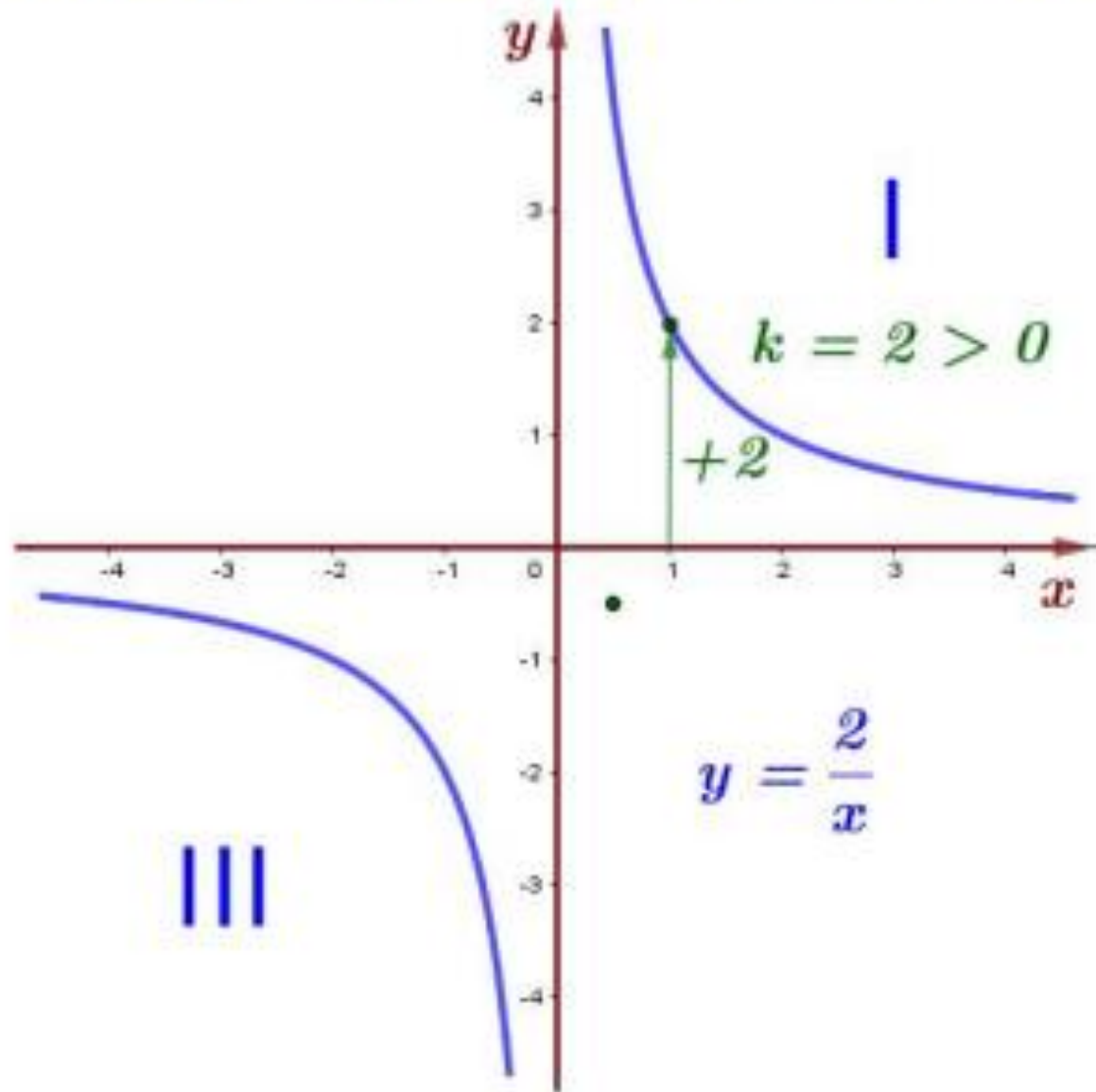
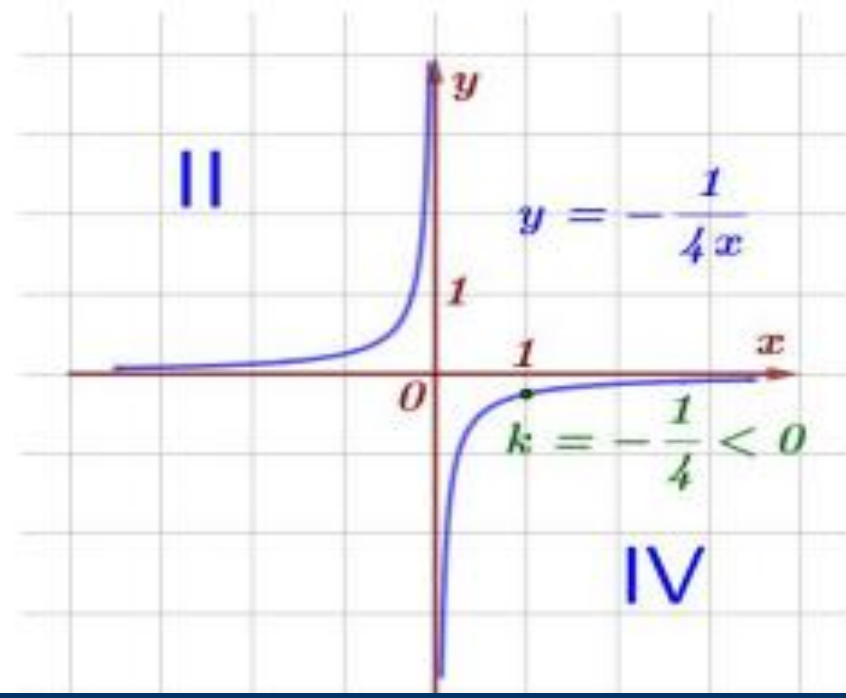
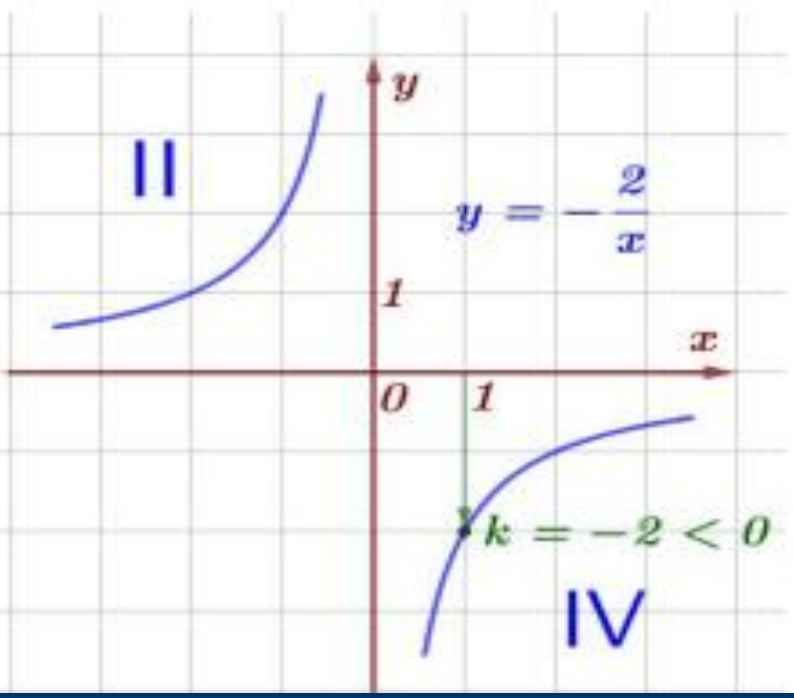
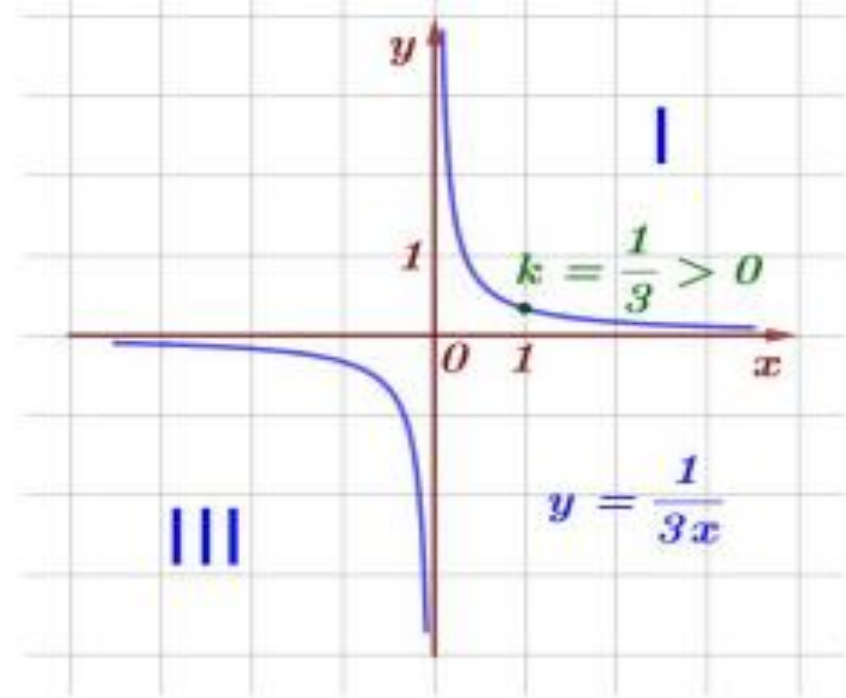
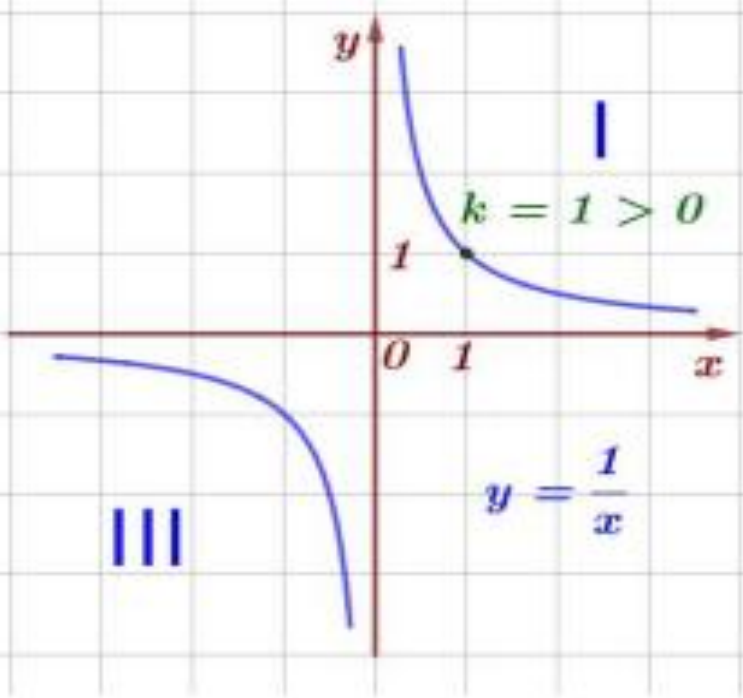


График: гиперболоа

Общий вид: $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

$k > 0 \rightarrow$ ветви в I и III четверти

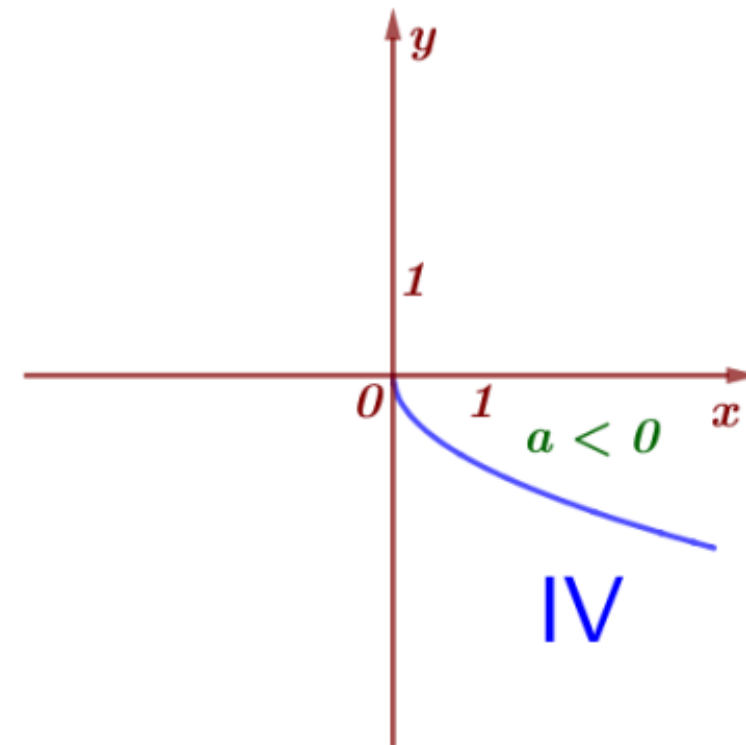
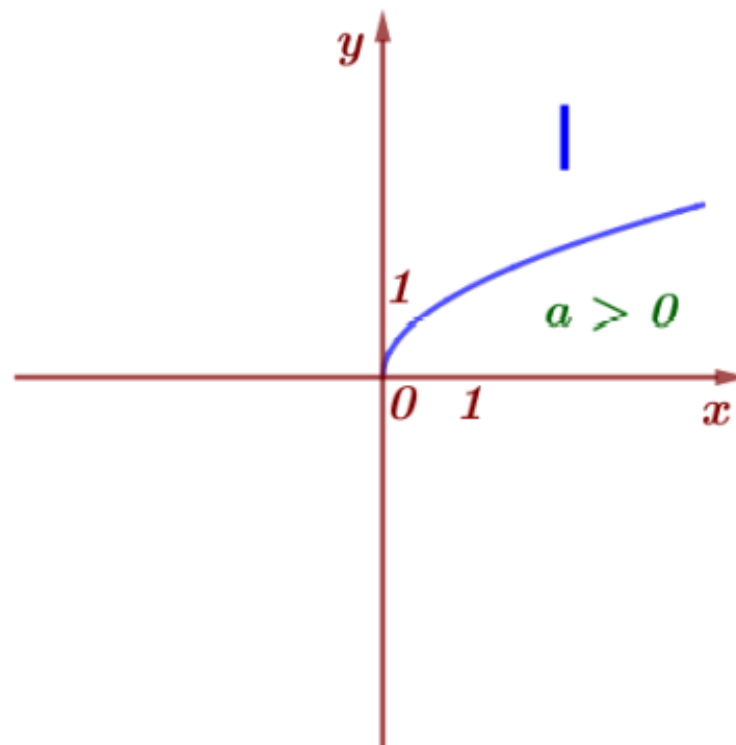
$k < 0 \rightarrow$ ветви в II и IV четверти



Функция квадратного корня

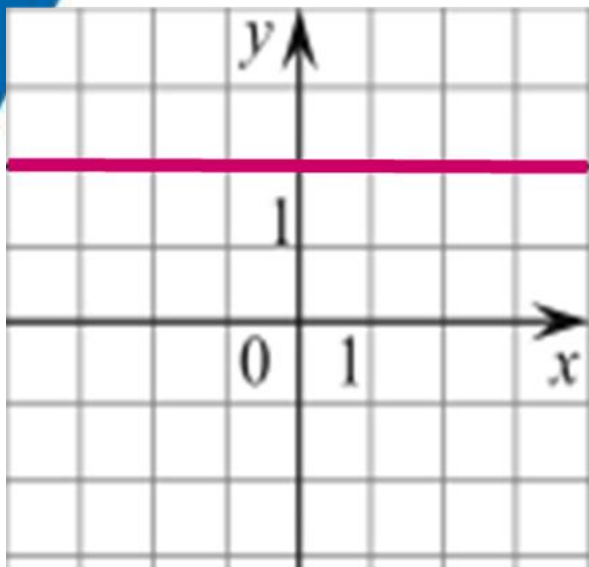
Ветвь параболы, симметричной относительно оси Ox

$$y = a\sqrt{x}, \quad a \neq 0$$



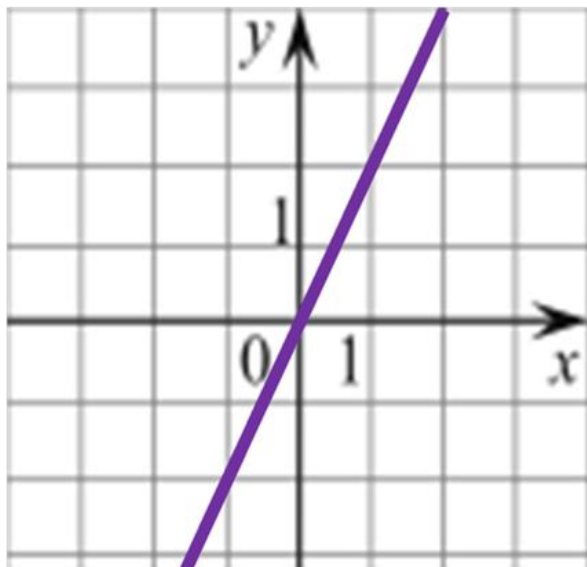
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают

А)



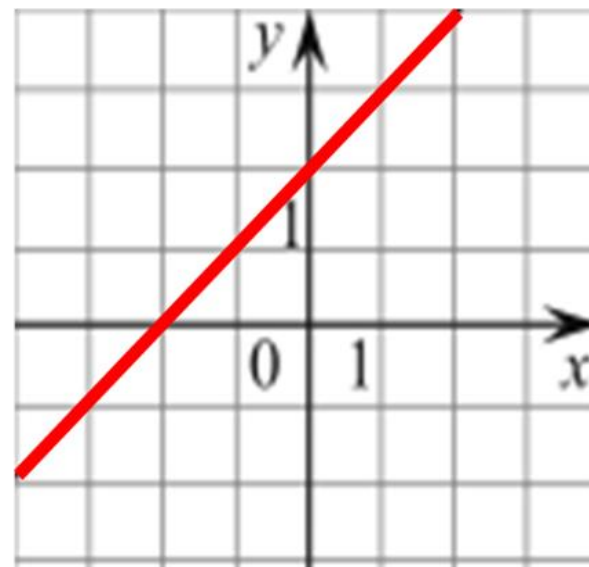
1) $y = 2x$

Б)



~~2) $y = -2x$~~

В)



3) $y = x + 2$

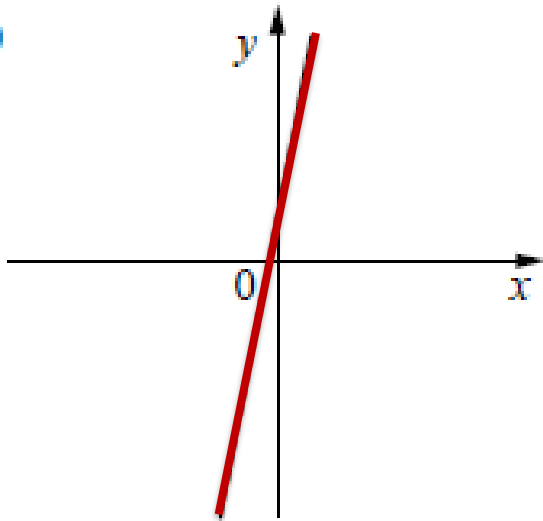
4) $y = 2$

Ответ: 413

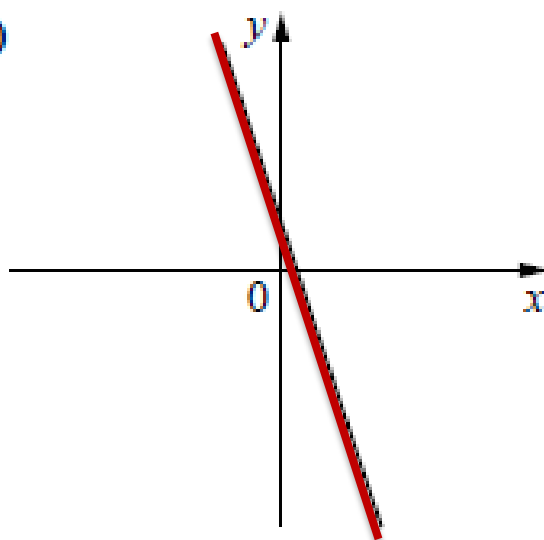
На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$.

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b .

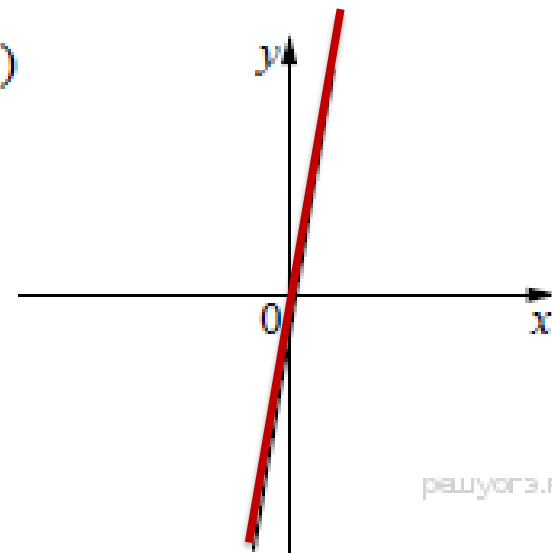
А)



Б)



В)



решуогэ.рф

1) $k < 0, b > 0$

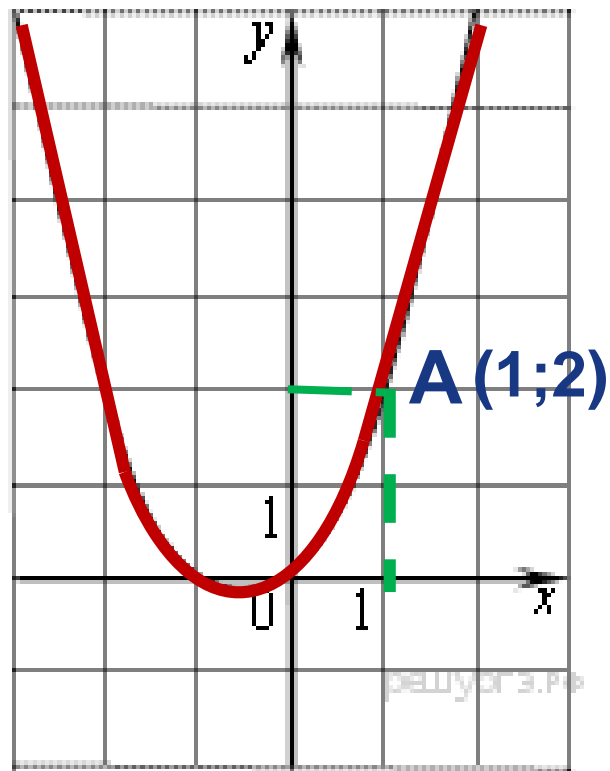
2) $k > 0, b > 0$

3) $k < 0, b < 0$

4) $k > 0, b < 0$

Ответ: 214

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = x^2 - x$

2=1-1

неверно

2) $y = -x^2 - x$

3) $y = x^2 + x$

2=1+1

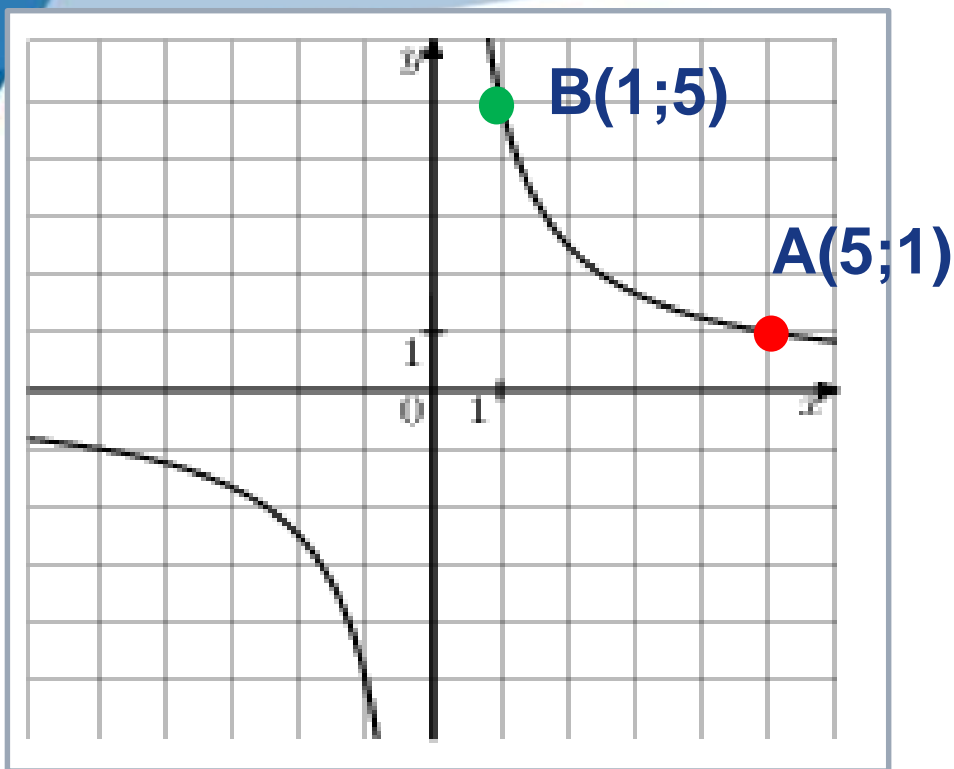
верно

4) $y = -x^2 + x$

Можно исключить варианты 2) и 4), так как коэффициент a меньше нуля. Остаются только варианты 1) и 3). Подставим в эти формулы координаты точки $A(1; 2)$. Первый вариант не подходит, а третий подходит.

Ответ: 3

График какой из приведенных функций изображен на рисунке



1 способ

$$A(5;1)$$

$$x=5 \quad y=1$$

Проверим

$$1=1/25$$

неверно

$$1=5/5 \quad \text{верно}$$

2 способ

$$B(1;5)$$

$$K=5$$

Проверим

$$1=1/25 \quad \text{неверно}$$

$$1=5/5 \quad \text{верно}$$

~~1) $y = \frac{1}{5x}$~~

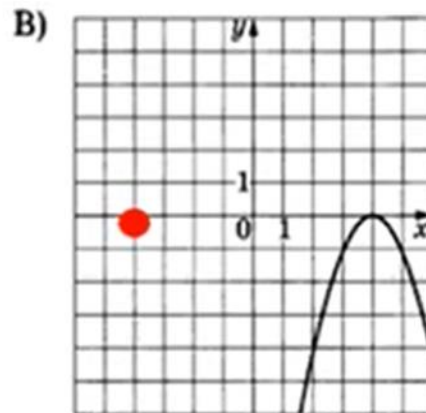
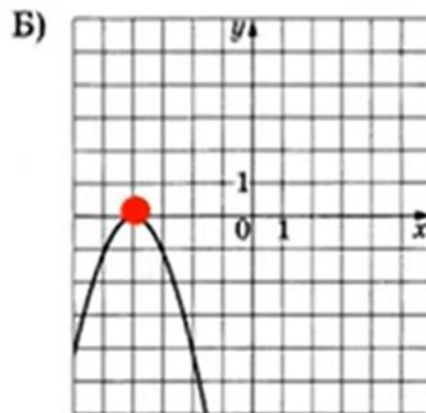
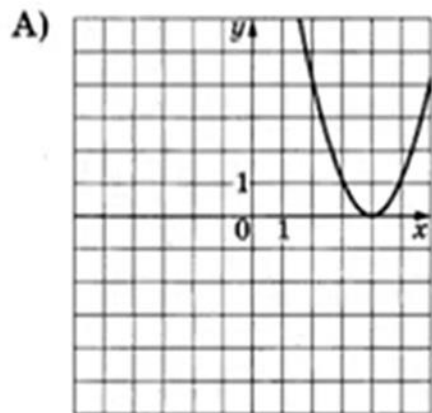
2) $y = \frac{5}{x}$

~~3) $y = -\frac{1}{5x}$~~

~~4) $y = -\frac{5}{x}$~~

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = x^2 - 8x + 16$

2) $y = -x^2 - 8x - 16$

3) $y = -x^2 + 8x - 16$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В
1	2	3

А) ветви направлены вверх **1**

Б) и В)

возьмём точку с координатой $x = -4$

Подставим во вторую формулу:

$$y = -(-4)^2 - 8 \cdot (-4) - 16 = \\ = -16 + 32 - 16 = 0$$

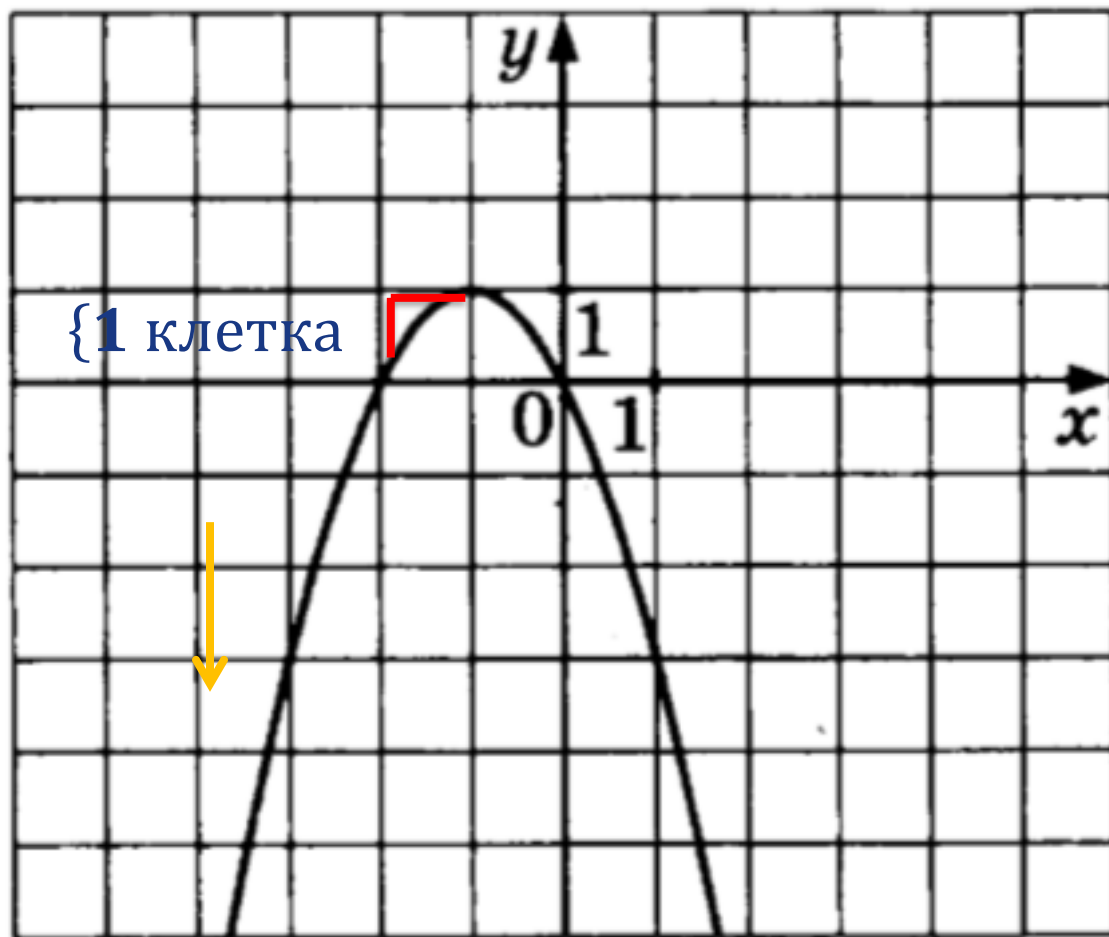
Точка $(-4; 0)$, значит **2 - Б**

Подставим в третью формулу:

$$y = -(-4)^2 + 8 \cdot (-4) - 16 = \\ = -16 - 32 - 16 = -64$$

Точка $(-4; -64)$, значит **3 - В**

Найдите значение a по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображённому на рисунке.

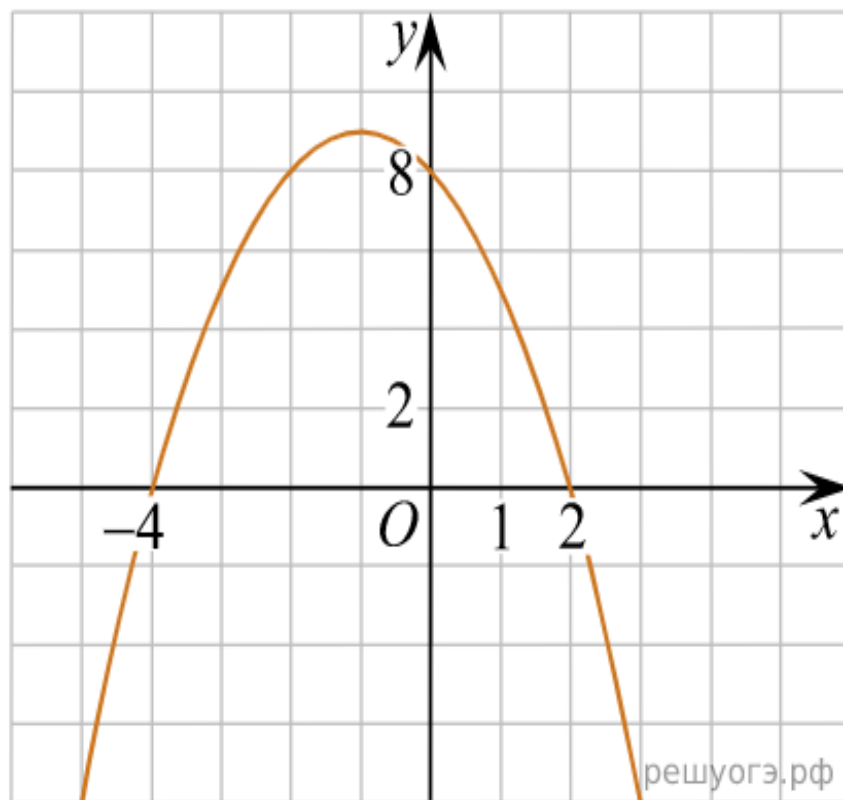


Ветви параболы направлены вниз, значит $a < 0$.

Ответ: -1

На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$.

Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера в порядке возрастания.



- 1) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$.
- 2) Наибольшее значение функции равно 8.
- 3) $f(-4) \neq f(2)$.

Ответ: 23

Задание №22 ОГЭ -2023.

Графики функций

Задание 22 – это задание высокого уровня сложности, оно требует свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику более основательно, например, в рамках углубленного курса математики, элективных курсов в ходе предпрофильной подготовки, математических кружков и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, но при их выполнении ученик должен продемонстрировать владение некоторыми специальными приемами преобразования выражений, проявить умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10-11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики, физики.

Общие подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем:

- решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося;
- оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным;
- лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов;
- если в решении допущена ошибка не принципиального характера (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного, что и отражено в критериях оценивания заданий с развернутым ответом.

Демоверсия ОГЭ - 2023

22

Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3).$$

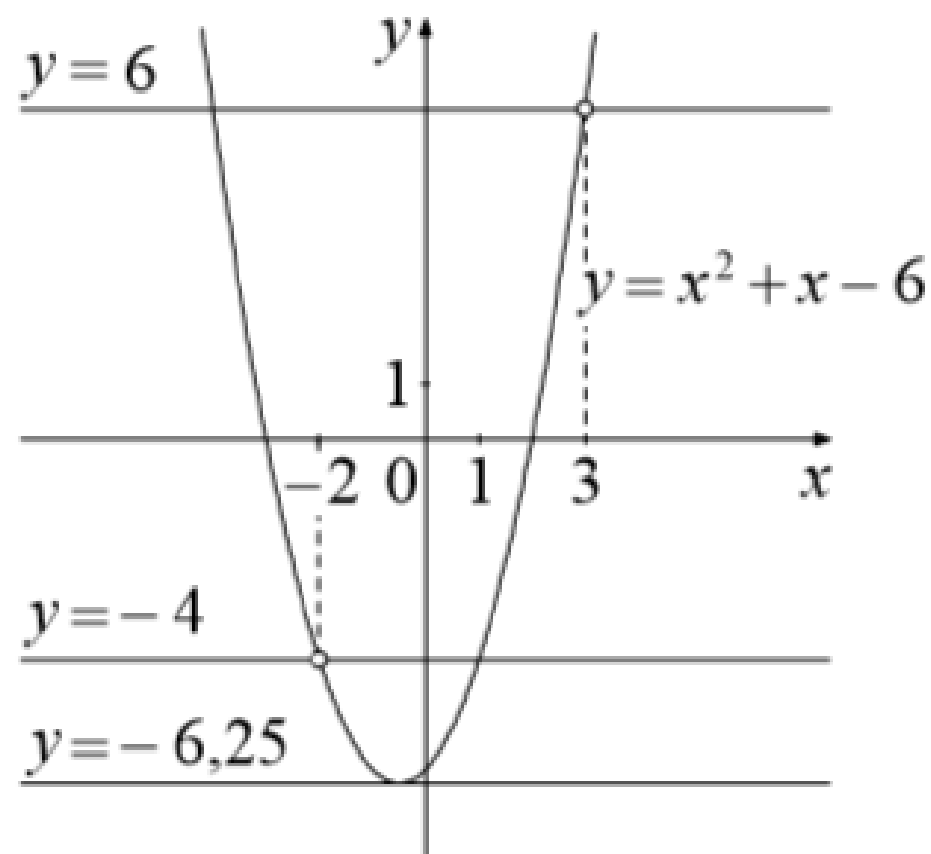
При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид: $y = x^2 + x - 6$;

её график — парабола, из которой выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых выколота. Вершина параболы имеет координаты $(-0,5; -6,25)$.

Поэтому $c = -6,25$, $c = -4$ или $c = 6$.

Ответ: $c = -6,25$; $c = -4$; $c = 6$.



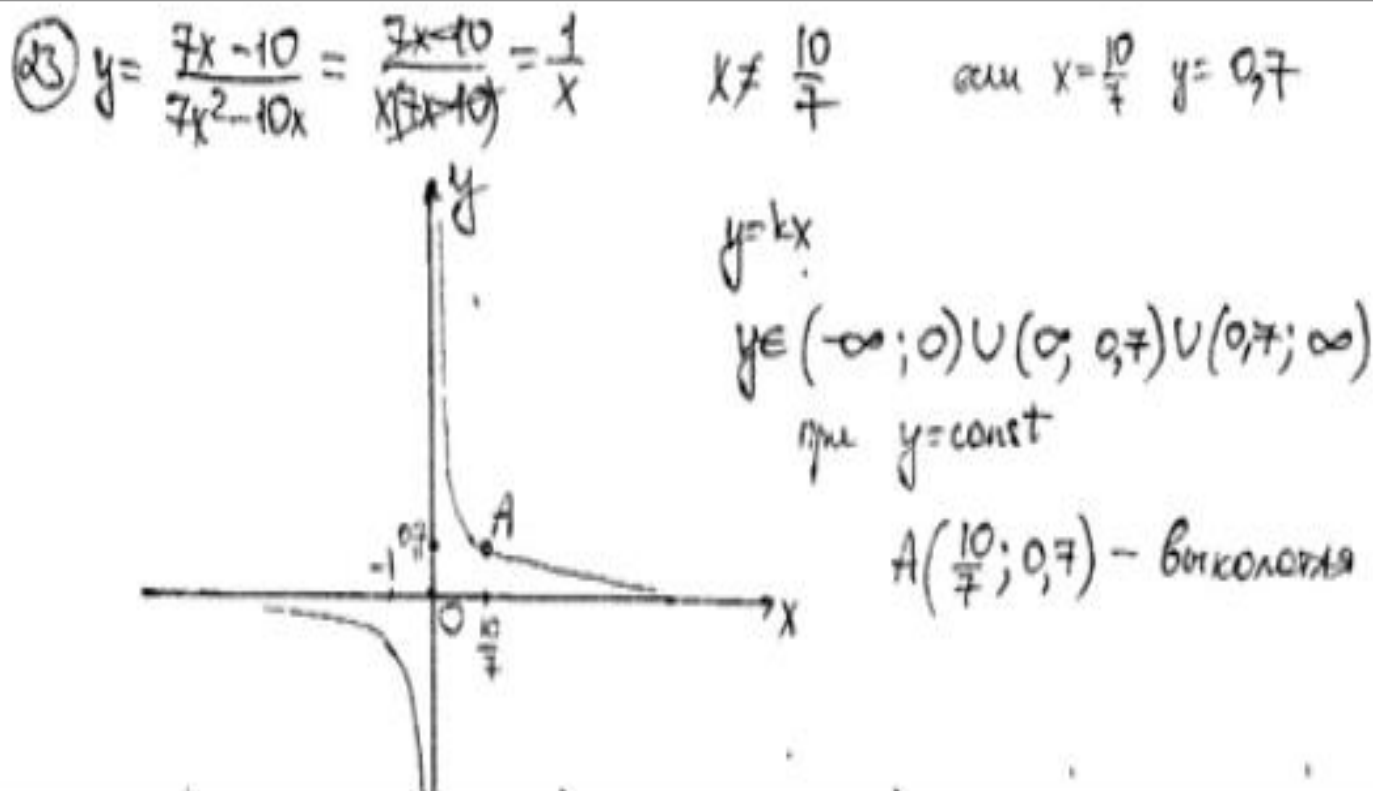
Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>



Примеры оценивания решения 22 задания

Постройте график функции $y = \frac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 0,49.

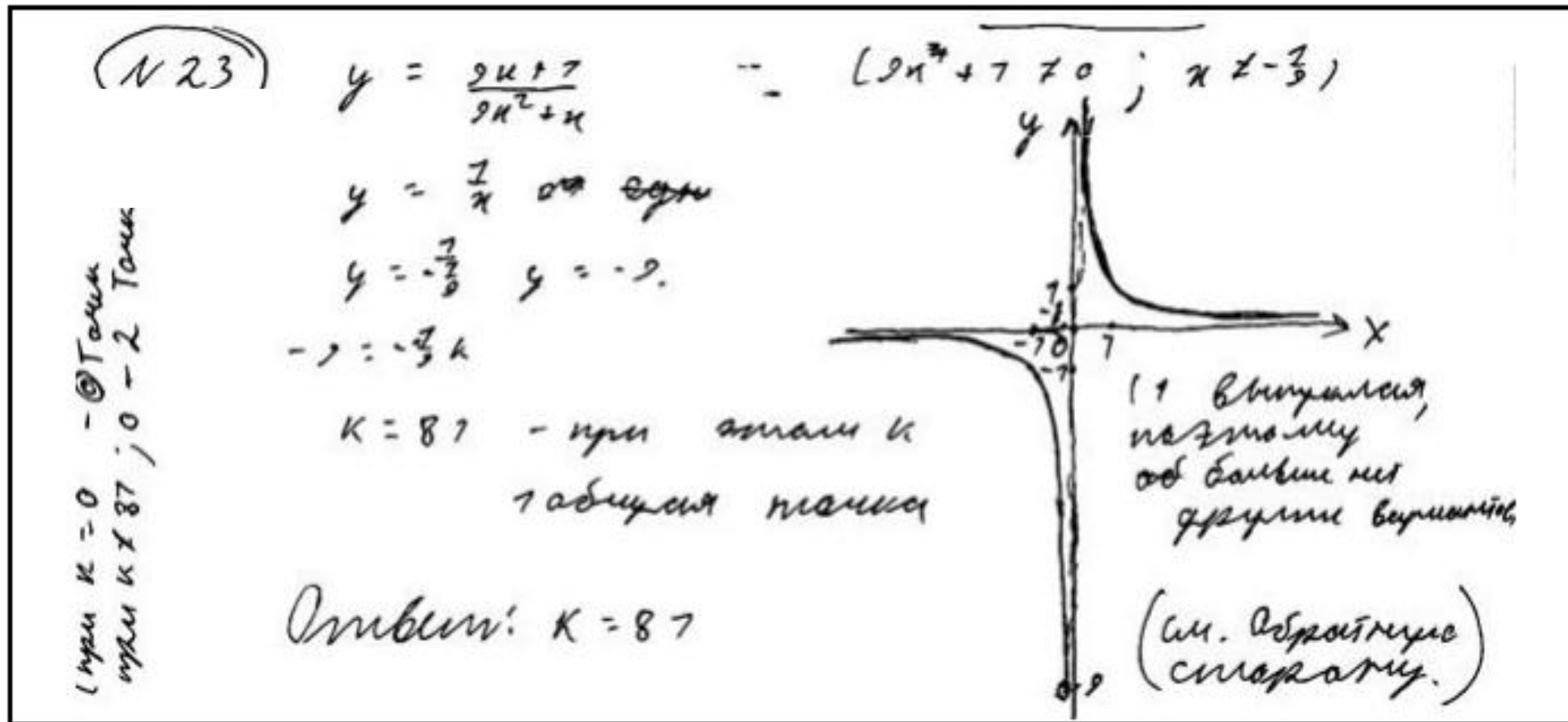


Комментарий.

Форма графика соблюдена, выколота точка обозначена верно. Вторая часть задания не выполнена.

Оценка эксперта: 1 балл

Постройте график функции $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку



Форма графика соблюдена, выколота точка обозначена верно. Вторая часть задания выполнена верно. **Оценка эксперта: 2 балла.**

№ 23

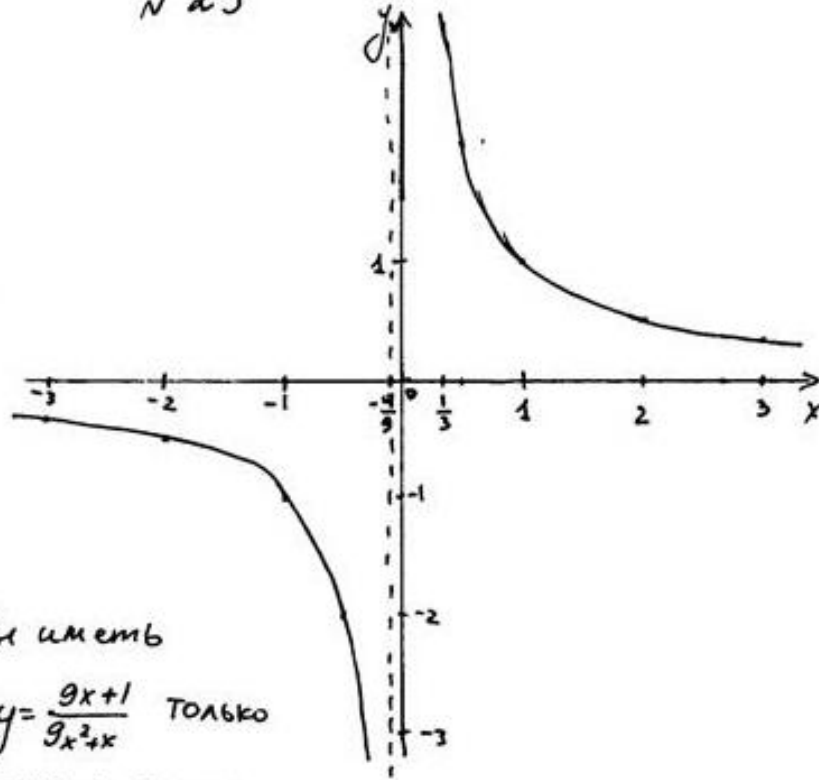
$$y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$$

$$y = \frac{9x+1}{x(9x+1)}$$

$$D(y) \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$E(y) \in \mathbb{R} \setminus \{0; -9\}$$



Для того, чтобы иметь

с графиком ф-ии $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ только

1 (•) пересечение график ф-ии

$y = kx$ должен проходить

через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$.

Подставим эти значения и найдем k .

$$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \cdot (-9)$$

$$k = 81.$$

Ответ: 81.

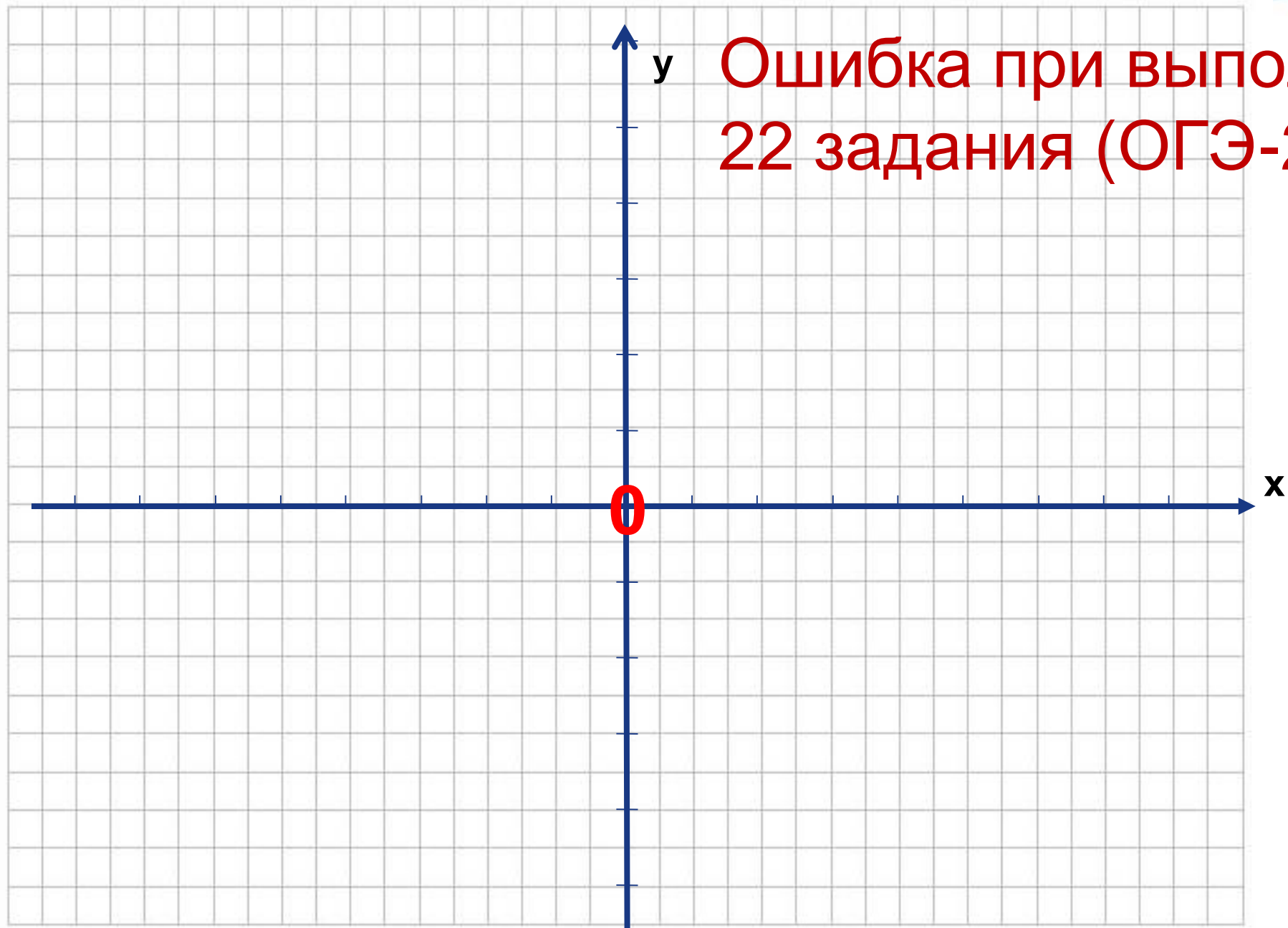
Несмотря на описание, по данному рисунку нельзя судить о верности графика. **Оценка эксперта: 0 баллов.**

Типичные ошибки при выполнении 22 задания

- неверно построен график;
- записано верное значение параметра, но не указано, как оно получено;
- отсутствует **единичный** отрезок на координатных осях или направления координатных осей.



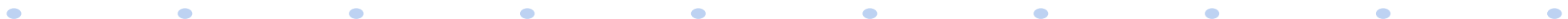
Ошибка при выполнении 22 задания (ОГЭ-2022)



Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика.

Верное построение графика включает в себя:

- - масштаб,
- содержательная таблица значений или объяснение построения,
- -выколота точка обозначена в соответствии с ее координатами.



Методические рекомендации к подготовке к 22 заданию

Использование обобщающих схем, таблиц, рисунков с графиками элементарных функций, алгоритмов действий

Алгоритм работы с заданием:

- преобразуем формулу, которая задает функцию, и найдем область определения функции;
- определим вид и характерные точки графика функции на каждом промежутке;
- изобразим график функции на координатной плоскости;
- исследуем график функции, исходя из вопроса к заданию;
- запишем ответ.

Теория к заданию №22

Преобразование графиков функций.

1. Параллельный перенос:

сдвиг вдоль оси Ox

сдвиг вдоль оси Oy

2. Симметричное отображение относительно оси Ox

3. Преобразование графиков функций содержащих модуль:

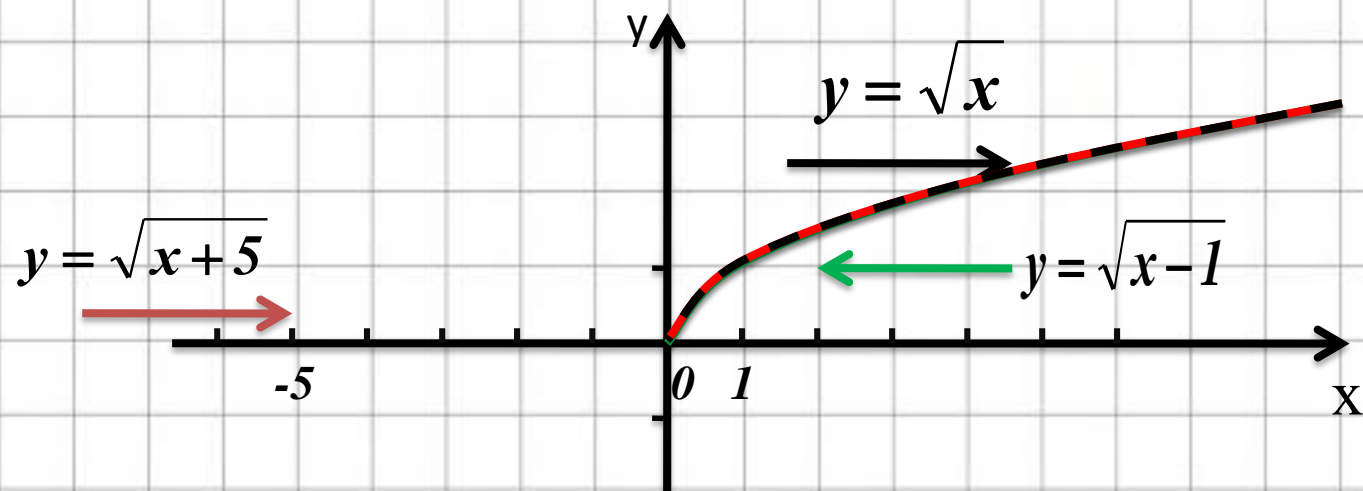
$$f(x) \rightarrow |f(x)|$$

$$f(x) \rightarrow f(|x|)$$

$$f(x) \rightarrow |f(|x|)|$$

Сдвиг

по оси Ox

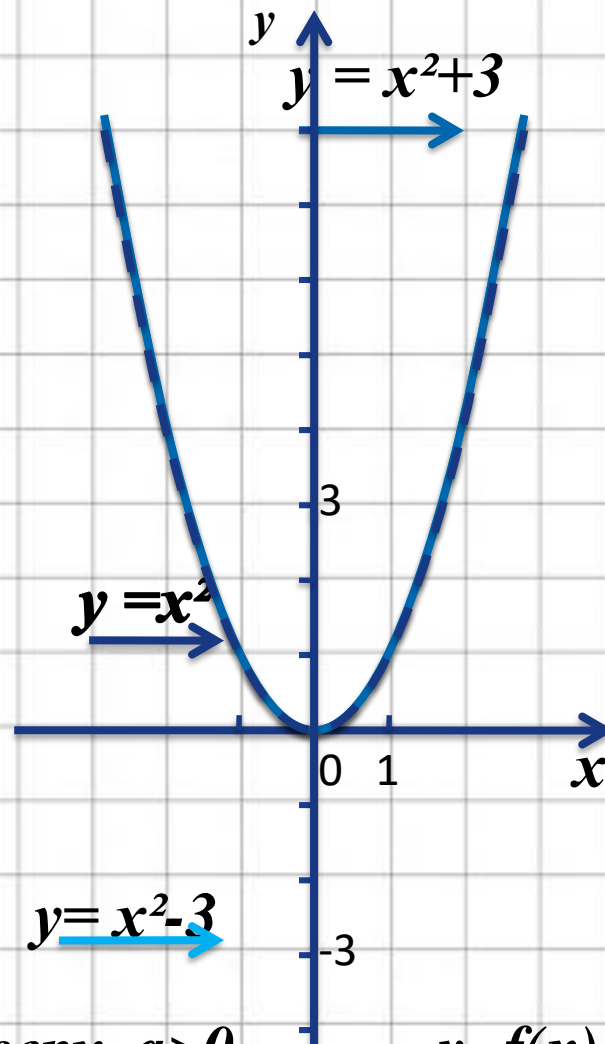


$y=f(x+a)$ – сдвиг влево, $a>0$

$y=f(x-a)$ – сдвиг вправо, $a>0$

Сдвиг

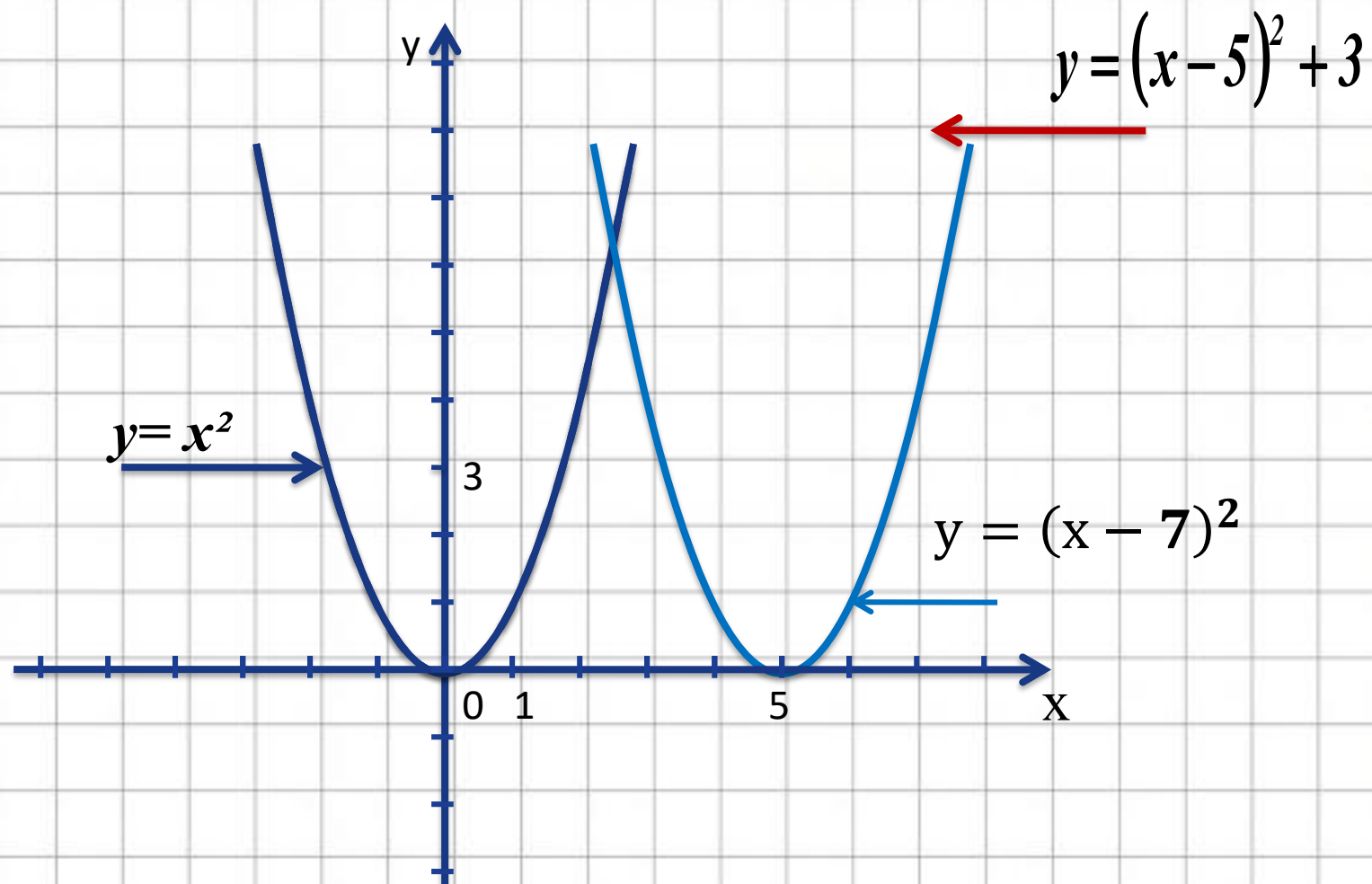
по оси Oy



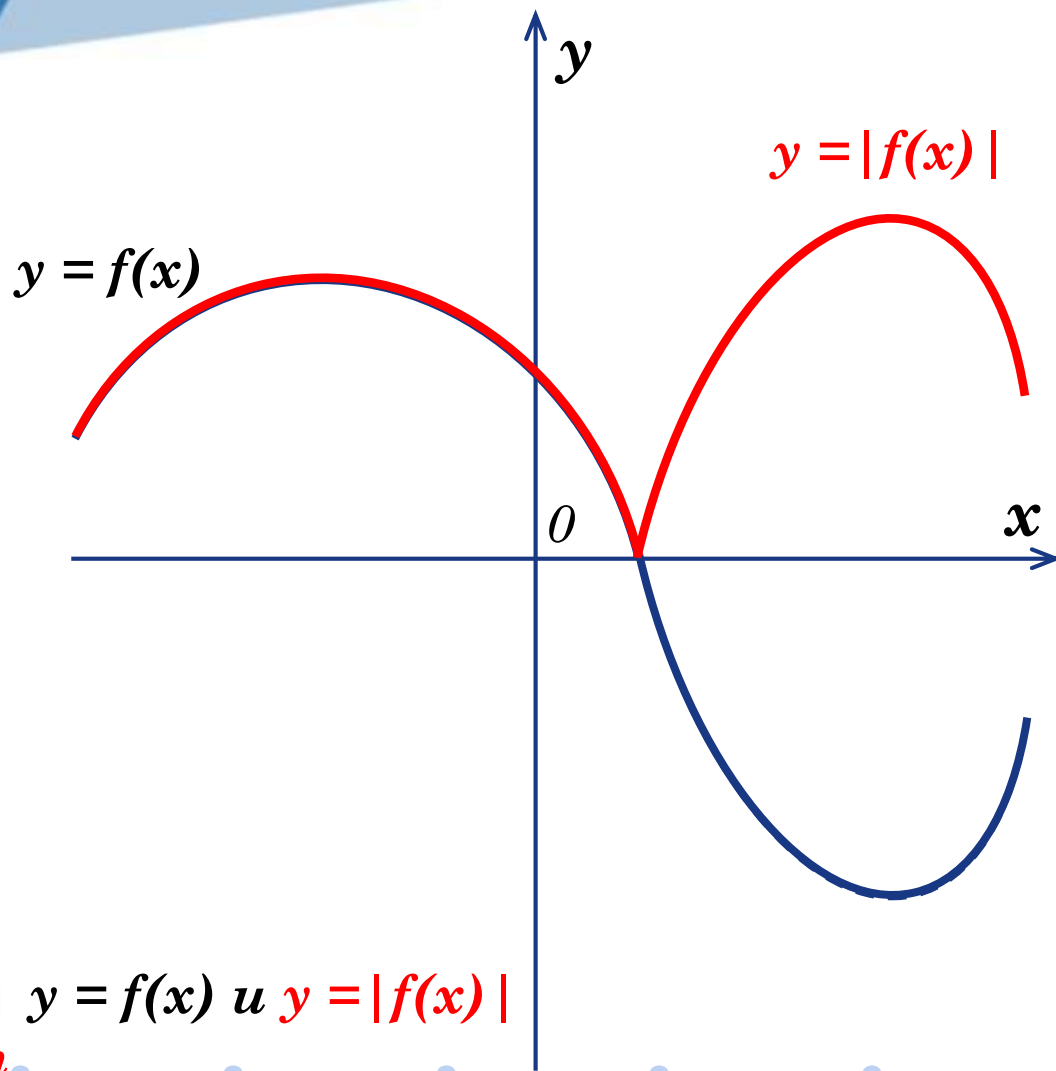
$y=f(x)+a$ - сдвиг вверх, $a>0$

$y=f(x)-a$ - сдвиг вниз, $a>0$

Сдвиг по оси Ox и по оси Oy



Графики функций, содержащих модуль $f(x) \rightarrow |f(x)|$



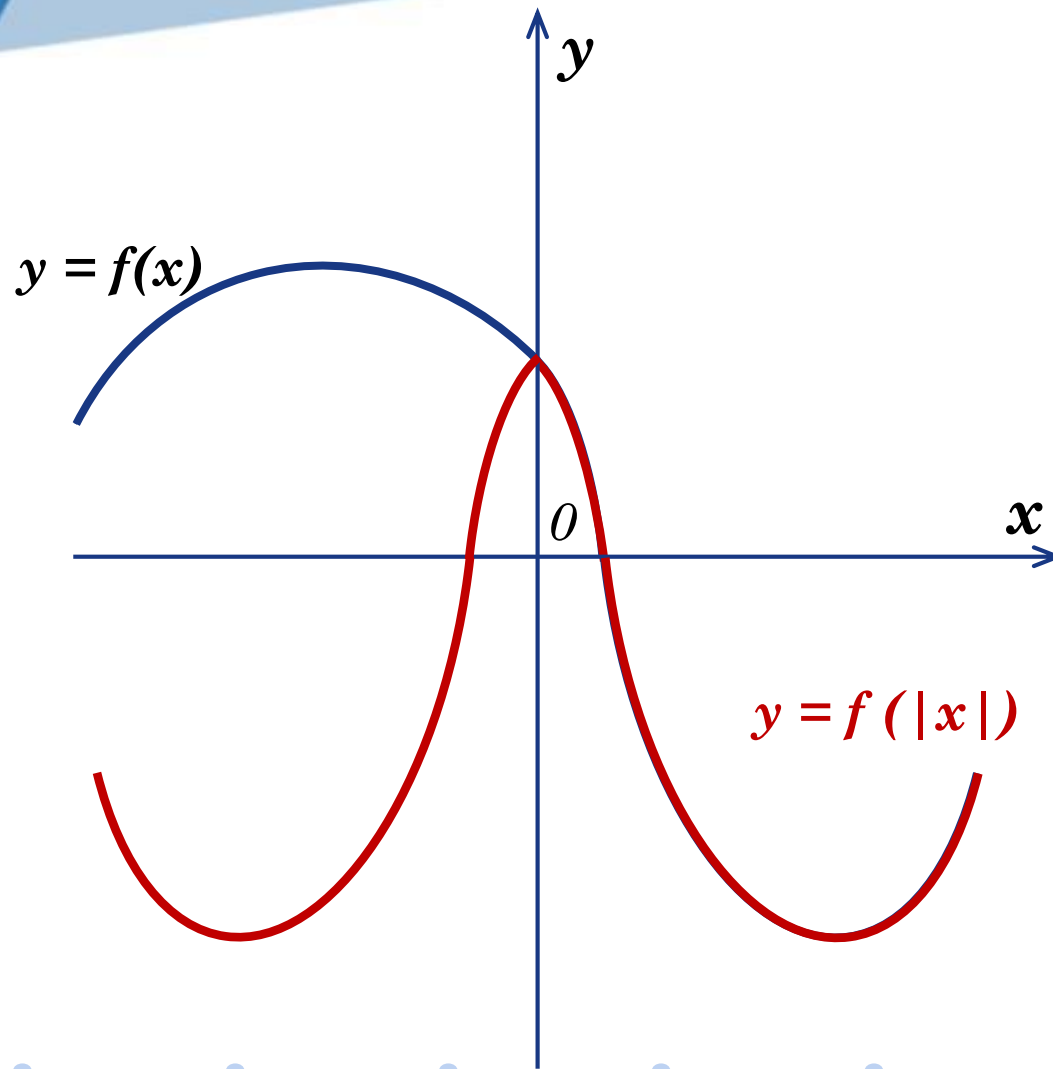
$y = f(x)$ -
график исходной
функции

$y = |f(x)|$

часть графика,
лежащая над осью Ox ,
сохраняется, часть,
лежащая ниже оси Ox ,
симметрично
отображается
относительно оси Ox

Нули функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$
совпадают.

Графики функций, содержащих модуль.

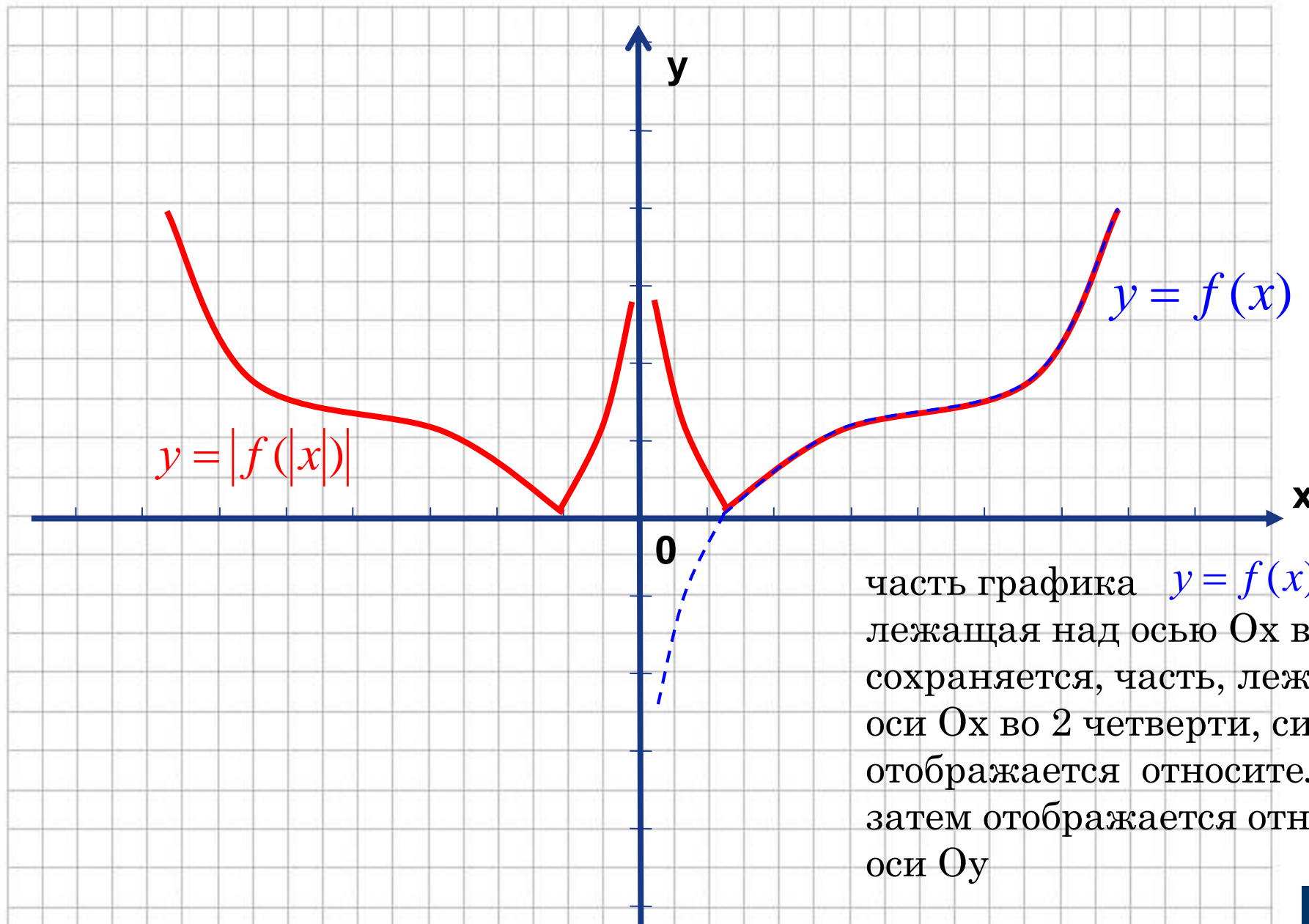


$y = f(x)$
график исходной
функции

$$y = f(|x|)$$

часть графика
при $x \geq 0$ сохраняется,
она же симметрично
отображается
относительно
оси Oy

Графики функций, содержащих модуль $f(x) \rightarrow |f(|x|)|$



часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью Ox в 1 четверти, сохраняется, часть, лежащая ниже оси Ox во 2 четверти, симметрично отображается относительно оси Ox , затем отображается относительно оси Oy

<https://ppt-online.org/784597>

Каратанова Марина Николаевна
Школа 256 г Фокино, Приморской край



$$y = 3 - \frac{x + 2}{x^2 + 2x}$$

При каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек

2*



Алгоритм (3):

1. Преобразовать выражение

$$3 - \frac{x + 2}{x^2 + 2x} = 3 - \frac{1}{x}; \quad x \neq -2$$

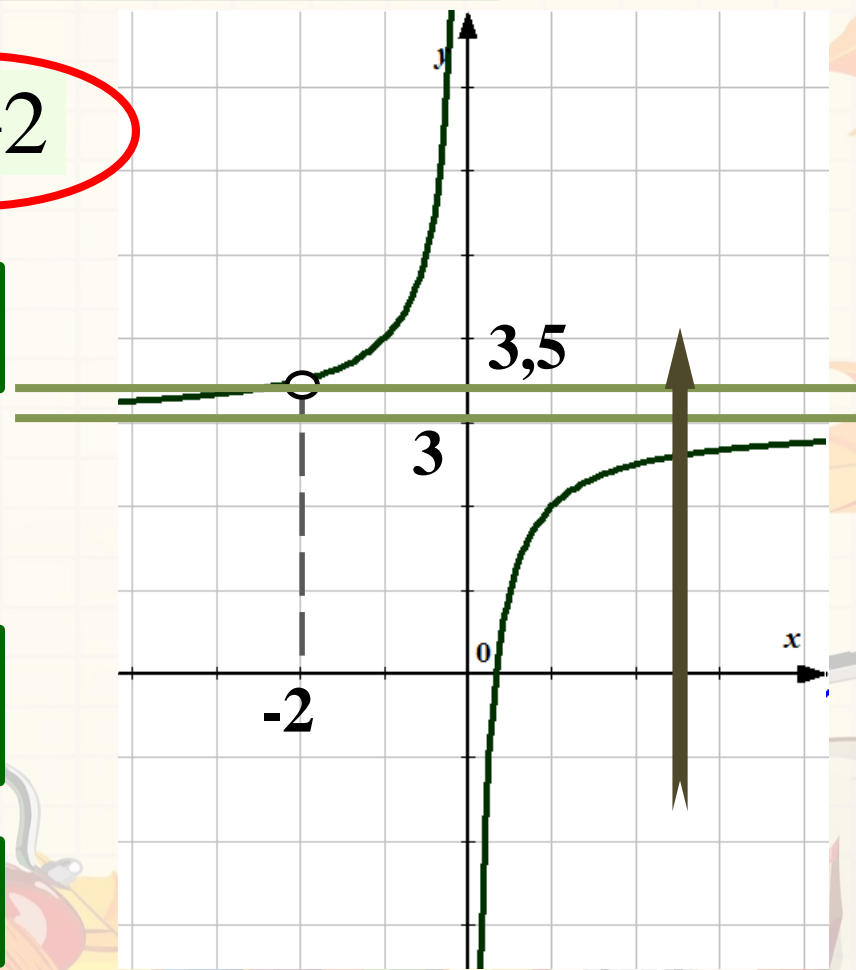
2. Построить график

$$y = -\frac{1}{x}; \quad y = 3 - \frac{1}{x}$$

3. Провести прямые $y = t$
(по условию задачи)

Ответ:

3; 3,5



$$y = \frac{7x - 5}{7x^2 - 5x}$$

При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком одну общую точку.

1*



Алгоритм (3):

1. Определить ОДЗ

$$7x^2 - 5x \neq 0;$$

$$x_1 \neq 0;$$

$$x_2 \neq \frac{5}{7}$$

2. Упростить и построить график

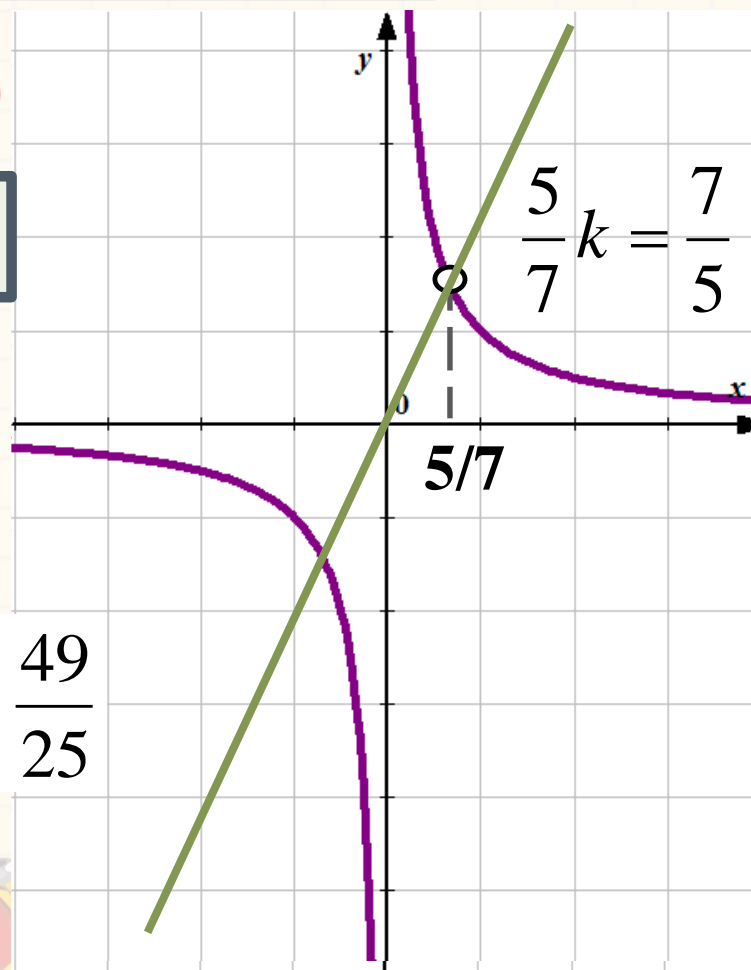
$$y = \frac{7x - 5}{7x^2 - 5x} = \frac{7x - 5}{x(7x - 5)} = \frac{1}{x}$$

3. Определить k

$$y\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{7}{5}; \quad \frac{5}{7}k = \frac{7}{5} \rightarrow k = \frac{7}{5} : \frac{5}{7} = \frac{49}{25}$$

Ответ:

$$k = 1,96$$



1. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x+2}{x^2 + 2x}$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

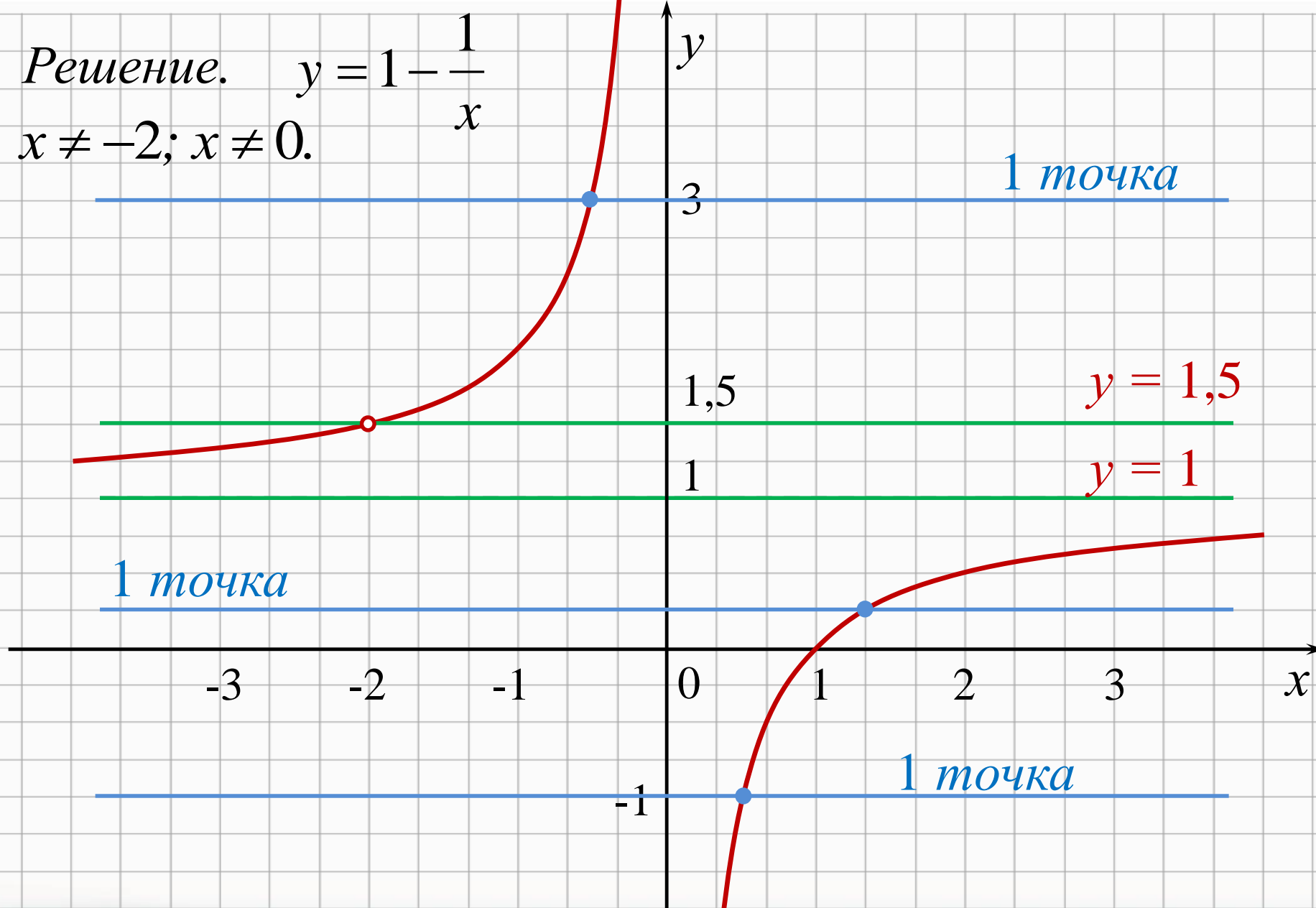
$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2 + 2x}$$

$$1 - \frac{x+2}{x^2 + 2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$$

при условии $x \neq 0$ и $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -2$.

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение. $y = 1 - \frac{1}{x}$
 $x \neq -2; x \neq 0.$



Ответ: $m = 1; m = 1,5.$

2. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки.

Решение.

$$y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$$

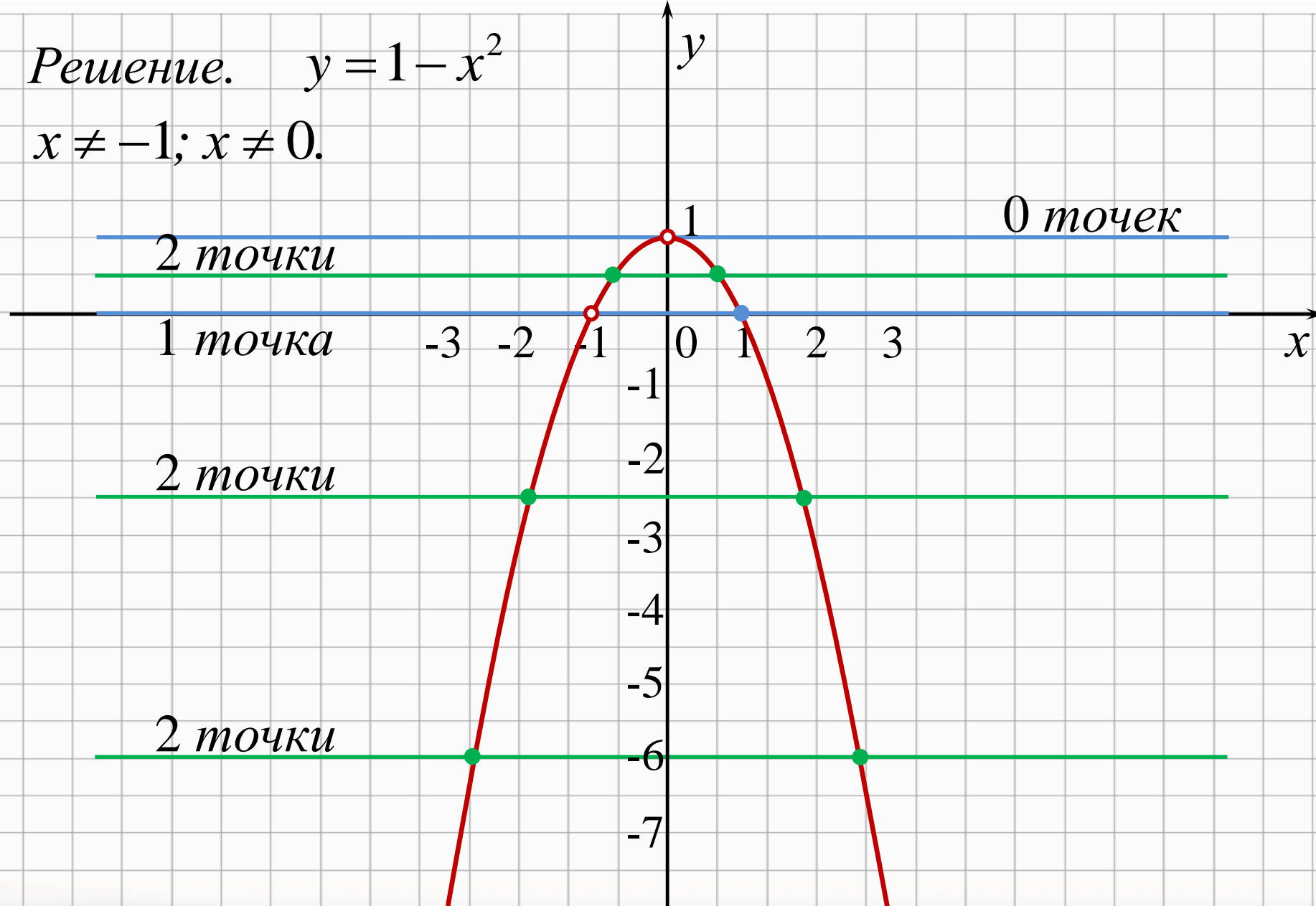
$$1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2} = 1 - \frac{x^3(x+1)}{x(x+1)} = 1 - x^2$$

при условии $x \neq 0$ и $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -1$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение. $y = 1 - x^2$

$x \neq -1; x \neq 0.$



Ответ: $t < 0; 0 < t < 1.$

7. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Прямая $y=kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку, если уравнение $kx = x^2 + 4$ имеет один корень. Такое возможно, когда дискриминант равен 0.

$$kx = x^2 + 4$$

$$x^2 - kx + 4 = 0$$

$$D = k^2 - 16$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 4.$$

Решение.

$$y = x^2 + 4$$

$$y_1 = 4x$$

$$y_2 = -4x$$

$$y = x^2 + 4$$

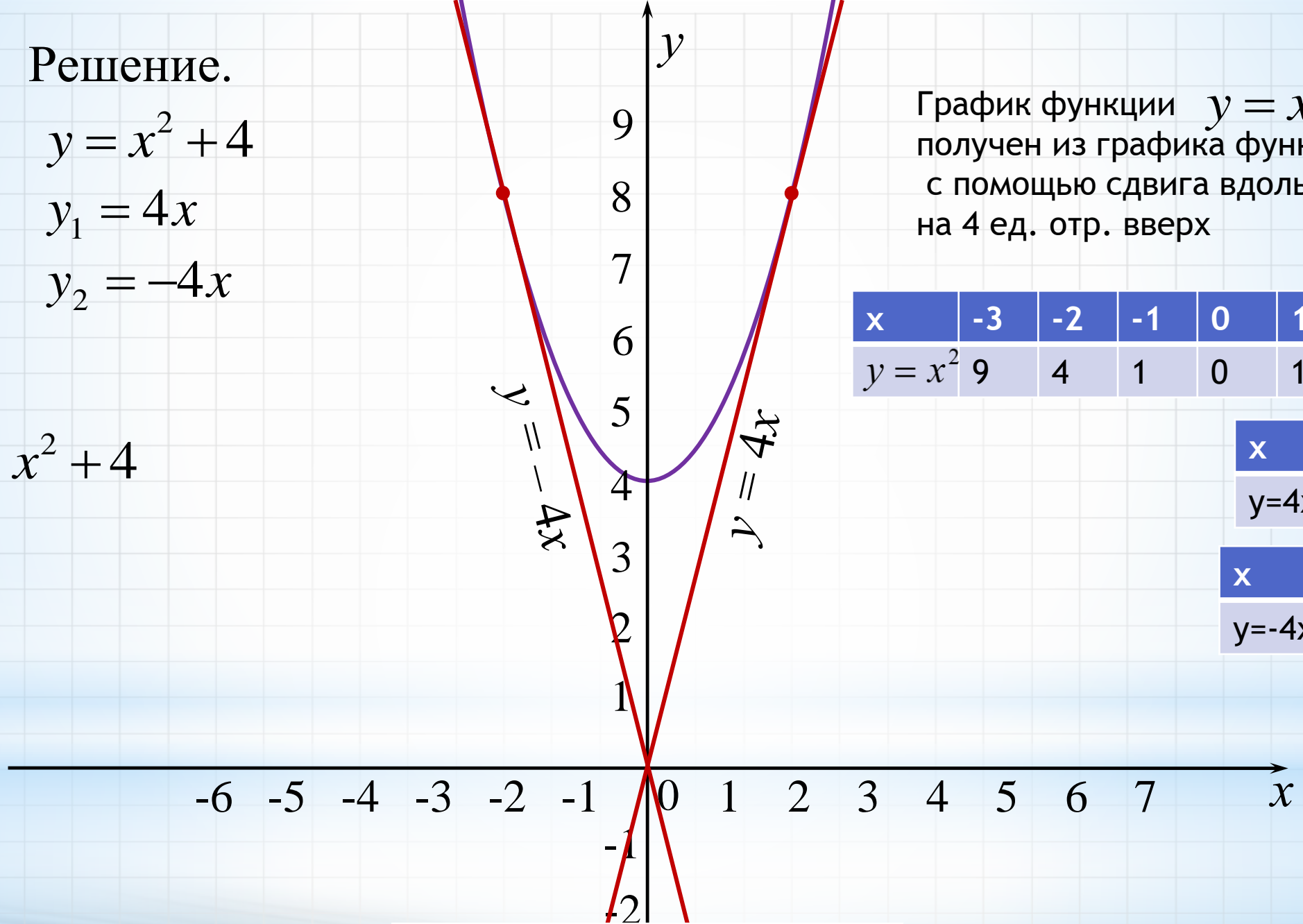


График функции $y = x^2 + 4$ получен из графика функции $y = x^2$ с помощью сдвига вдоль оси OY на 4 ед. отр. вверх

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	2
y=4x	8

x	-2
y=-4x	8

Ответ: $k = 4$; $k = -4$.

Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$
не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$$
$$\frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1} = \frac{x(x + 1)|x|}{x + 1} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

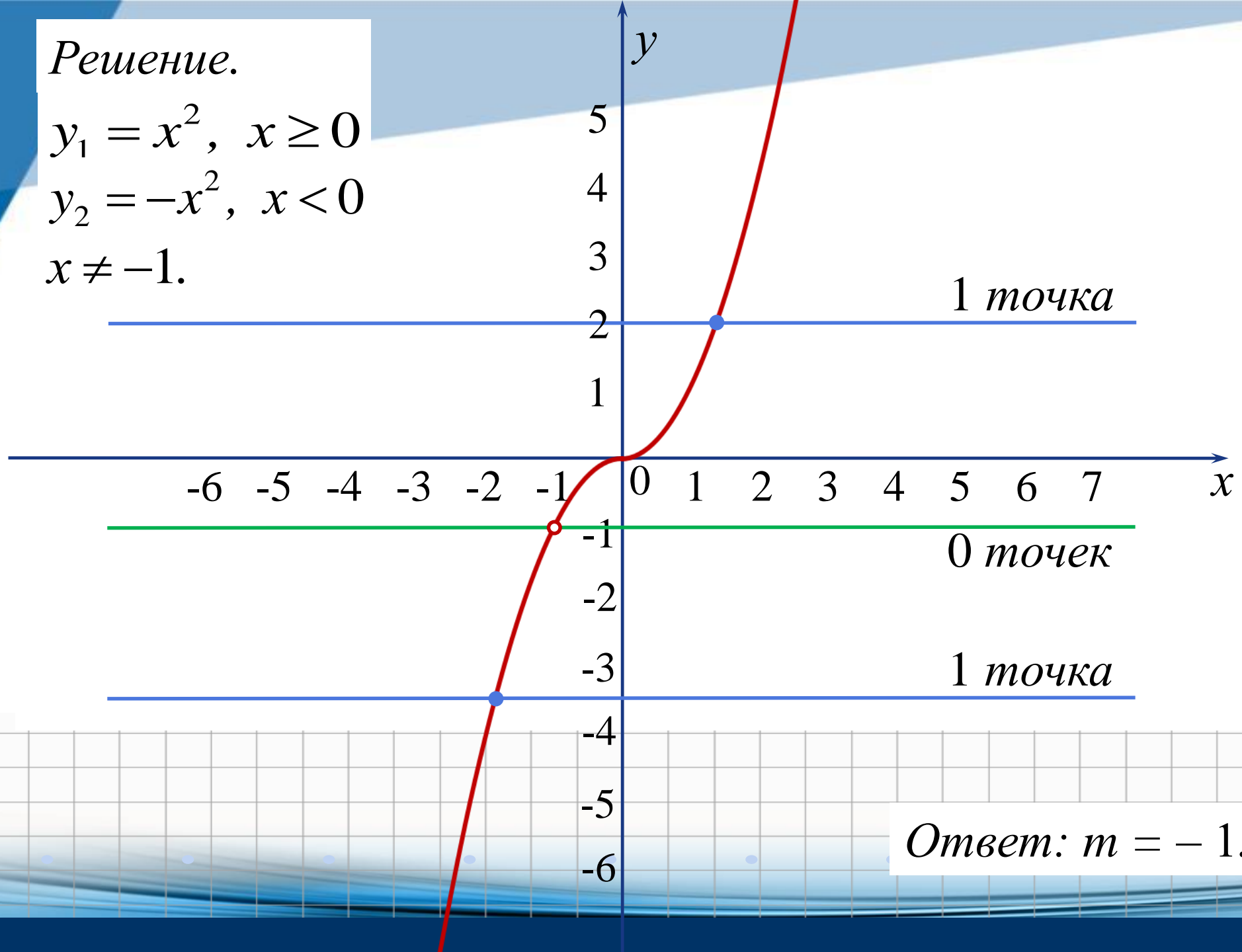
при условии $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Решение.

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

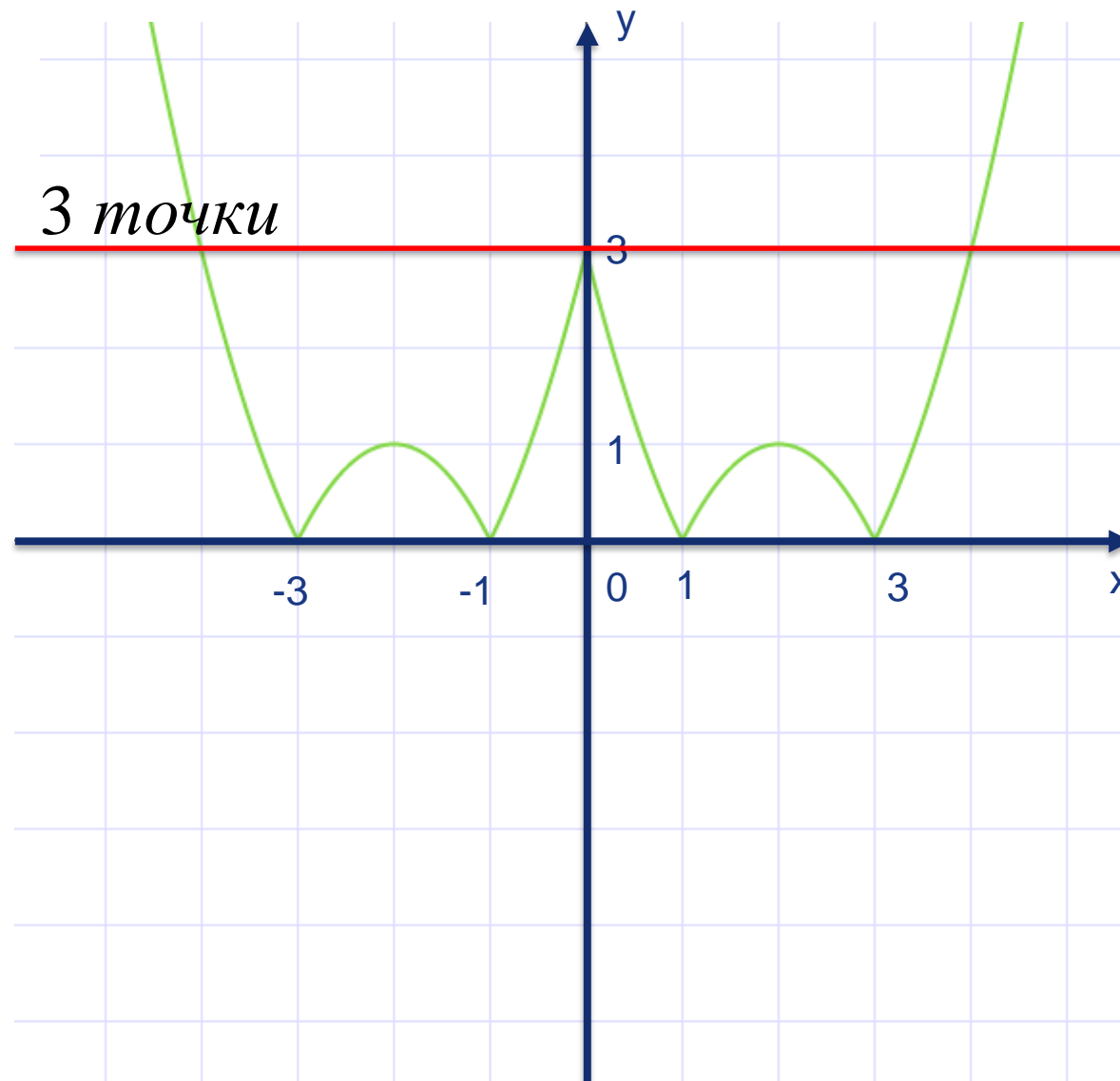
$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq -1.$$



Ответ: $m = -1$.

Постройте график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.
При каких значениях a прямая $y=ax$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: при $a=3$

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две **общие точки**.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x + 6$$

$$y_2 = 3x$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

x	0	-2
y	0	-6

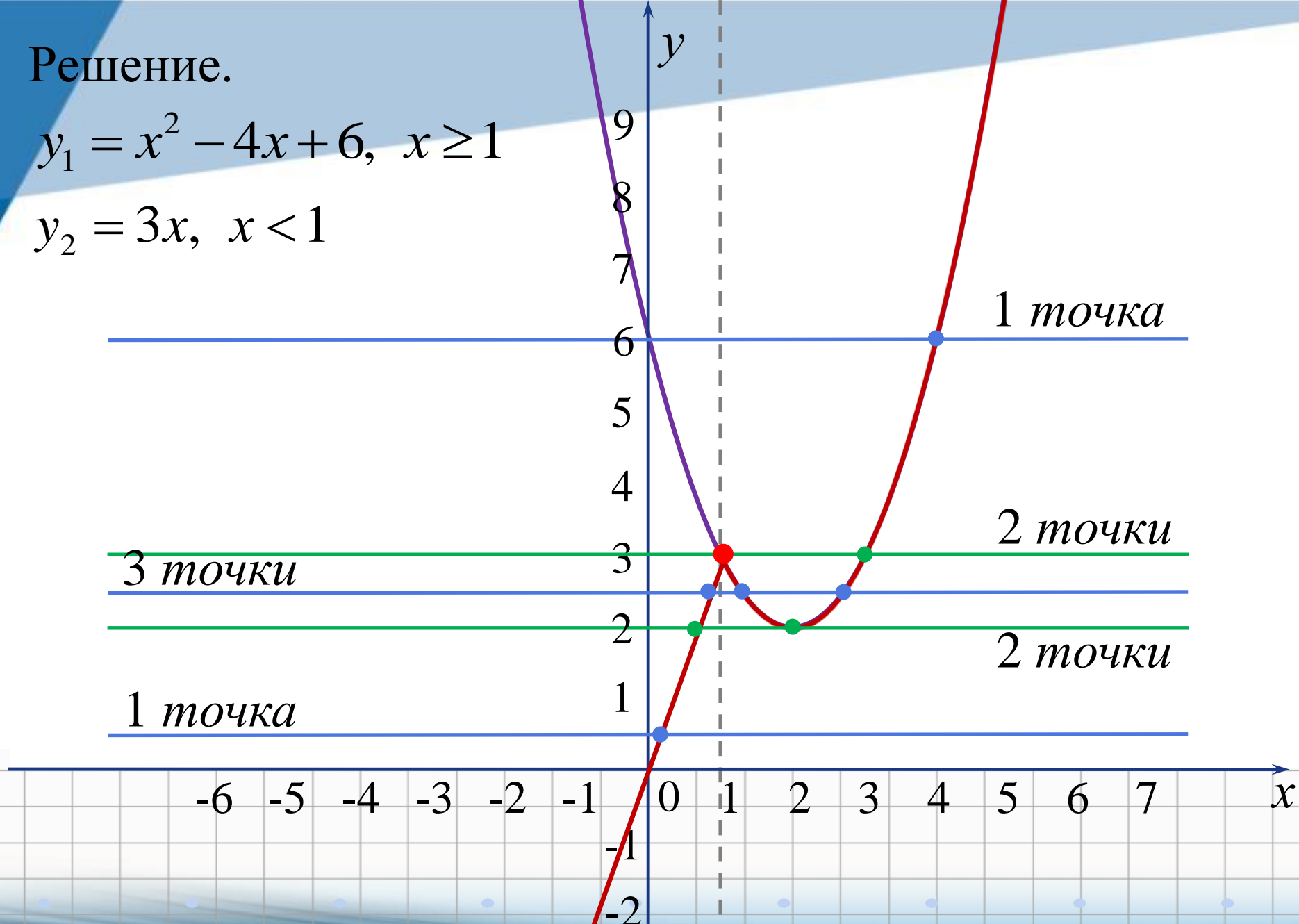
$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2.$$

x	1
$y_1 = x^2 - 4x + 6$	3
$y_2 = 3x$	3

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x + 6, \quad x \geq 1$$

$$y_2 = 3x, \quad x < 1$$



Ответ: $m = 2$; $m = 3$.

***Спасибо за
внимание!***

