Разбор теории и практики к заданию 15: Экономическая задача

Подготовка к ЕГЭ
профильный уровень

Учитель: Лаврентьева Ирина Геннадьевна, МАОУ СОШ №63 г.Тюмени

- За каждым заданием второй части профильного ЕГЭ по математике уже давно закрепились неофициальные названия: так, задание 15 учителя и учащиеся называют ***экономической задачей***. Это название объединяет задачи на кредиты и вклады, а также задачи на оптимизацию.

Что требуется для успешного решения задания 15 ЕГЭ?

1. Понимание всех встречающихся в условии терминов (вклад, кредит, начисление процентов, долг и т. п.).

2. Повторение тем:

- проценты,

- арифметическая и геометрическая прогрессии,

- наибольшее и наименьшее значения функции.

- К*редит* банка – сумма денежных средств, которую заёмщик обязуется вернуть банку в соответствии с условиями заключённого договора (проценты, сроки промежуточных платежей и др.). Платёж по кредиту состоит из основного долга и процентов. Основной долг — это размер кредита. А проценты — это сумма, которую берет банк за пользование кредитом.

Две схемы решения задач на кредиты

Кредит выплачивается равными платежами (*аннуитетные платежи*),

ИЛИ

Известными платежами

Выплаты подбираются так, что сумма долга уменьшается равномерно (дифференцированные платежи)

ИЛИ

Известно, как меняется сумма долга

- Банковский *вклад* (или банковский депозит) — сумма денег, переданная лицом банку с целью получить доход в виде процентов, образующихся в ходе финансовых операций с вкладом. Начисление процентов происходит в соответствии с заключённым договором. Если в договоре по вкладу указан доход 5 % годовых, а вклад составляет S рублей, то это значит, что через год на вкладе будет 1,05S рублей.

Часто, в экономических задачах встречается такая ситуация, когда некоторое число, обозначим

его за P_0, в первый год (период времени может быть любым – год, месяц, день, час и т.д.) увеличилось на a процентов. Потом в следующий год число, которое получилось, после первого года увеличилось опять на a процентов и т.д., в зависимости от количества этапов N. Чтобы посчитать, во что превратится наше исходное число после N этапов, если оно будет расти каждый этап на a процентов, нужно воспользоваться формулами (индекс у P означает год, P_1 – число через 1 год):

$$P_1 = P_0(1 + \frac{a}{100}).$$

$$P_2 = P_1(1 + \frac{a}{100}) = P_0(1 + \frac{a}{100})^2$$

$$P_3 = P_2(1 + \frac{a}{100}) = P_0(1 + \frac{a}{100})^3$$

$$\cdots\cdot$$

$$P_N = P_0(1 + \frac{a}{100})^N.$$

Бывают задачи, когда величина процента меняется каждый год (в первый год число выросло на $a_1\%$, второй год - $a_2\%$, в N-й год - a_N %. Тогда получившееся в конце число можно выразить по формуле:

$$P_N = P_0(1 + \frac{a_1}{100})(1 + \frac{a_2}{100})\ldots(1 + \frac{a_{N-1}}{100})(1 + \frac{a_N}{100}).$$

Если каждый год (этап) процент прироста различный, то иногда удобно посчитать средний процент прироста (q):

$$P_0(1+\frac{a_1}{100})(1+\frac{a_2}{100})\ldots(1+\frac{a_{N-1}}{100})(1+\frac{a_N}{100}) = P_0(1+\frac{q}{100})^N$$

- Часто встречаются задачи на погашение кредита. Представим жизненную ситуацию: человеку нужны деньги, например, на покупку квартиры или машины. Если у него нет необходимой суммы, он может обратиться в банк и одолжить у него деньги. Данная ситуация называется взять в долг (кредит, ипотеку). Как правило, деньги возвращаются банку постепенно, вы просто вносите каждый месяц какую-то необходимую сумму, тем самым гася свой долг перед банком. Деньги в долг не дают бесплатно, за пользование этими деньгами нужно заплатить банку определенный процент от взятой суммы, ведь банк мог просто положить эти деньги на вклад и заработать. Кроме этого, дать деньги кому-либо гораздо рискованнее, чем положить на вклад в хорошем банке, поэтому банк хочет, чтобы клиент ему заплатил за пользование деньгами значительно больше, чем он может заработать просто на вкладе. Вот почему проценты по вкладу всегда значительно ниже, чем проценты по кредиту. На этом банк и зарабатывает.

- В зависимости от условий, на которых предоставляется кредит, нужно будет возвращать деньги либо одинаковыми платежами каждый месяц (аннуитет), либо разными постоянно уменьшающимися платежами (дифференцированные платежи). Банк любезно проводит расчеты по обеим этим схемам и предоставляет график платежей, а вы выбираете, как будет удобно рассчитываться с банком. Обычно сначала начисляются годовые (неделя, месяц) проценты на остаток, а только потом вносятся платежи. Размер платежей зависит от взятого в долг кредита, срока (на сколько лет вы взяли в долг), от процента за пользование деньгами и от схемы, по которой вы будете рассчитываться с банком. Каждый платеж состоит из процентов, которые успели набежать за время между последним и следующим платежом и частицы самого долга.

- **Дифференцированный платеж** – долг по кредиту гасится равномерно, каждый год (месяц, неделю) долг (его называют телом кредита, те деньги, которые выдал вам банк, без учета процентов) уменьшается на одну и ту же величину, но так как проценты начисляются в конце каждого года на фактический остаток, то следующие платежи меньше, чем предыдущие. То есть, каждый ваш платеж состоит из процентов, начисленных за прошедший год (месяц, неделю) и из части тела кредита.
- **Аннуитет** – как уже было сказано, это оплата кредита равными платежами.

Задача 1 (кредит)

- 31 декабря Николай решил взять в банке кредит на сумму 5000000 под 12% годовых. Кредит выплачивается ежегодно одинаковыми платежами (аннуитет), после того, как банк начислит проценты на остаток 31 декабря. Какой ежегодный платеж должен производить Николай, чтобы расплатиться с банком за три платежа?

Решение задачи 1

Обозначим за a ежегодный платеж.

Через год долг вырастет на 12% и будет составлять:

$5000000 * (1 + \frac{12}{100}) = 5000000 * 1.12$

Сразу после этого Николай вносит на счет a рублей, тогда долг будет составлять:

$$S_1 = 5000000 * 1.12 - a$$

Аналогичная операция после внесения второго платежа:

$$S_2 = (5000000 * 1.12 - a) * 1.12 - a;$$

И третий платеж:

$$S_3 = ((5000000 * 1.12 - a) * 1.12 - a) * 1.12 - a$$

Решение задачи 1

Согласно условию, Николай должен погасить долг за три платежа, значит после третьего платежа сумма долга должна равняться нулю:

$$S_3 = 0;$$

$$((5000000 * 1.12 - a) * 1.12 - a) * 1.12 - a = 0;$$

$$5000000 * 1.12^3 - 1.12(1.12a + a) - a = 0;$$

$$a = \frac{5000000 * 1.12^3}{3.3744} = 2081744.9(\text{рублей})$$

Задача 2 (кредит)

- Дмитрий берет в банке кредит на некоторую сумму на срок 25 месяцев. Каждый месяц 1го числа сумма долга возрастает на q%, 2го числа каждого месяца Дмитрий должен гасить часть долга так, чтобы он каждый месяц уменьшался на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим месяцем (дифференцированный платеж). После погашения всей суммы кредита выяснилось, что Дмитрий заплатил на 40% больше суммы, взятой в кредит. Найдите q.

Решение

Обозначим за S начальную сумму, которую Дмитрий получил в банке.

В первый месяц на эти деньги начислят проценты $\frac{q}{100} * S$. После этого Дмитрий должен погасить часть долга, выплатив начисленные проценты плюс $\frac{S}{25}$, только в таком случае долг будет уменьшаться равномерно каждый месяц. Суммарная выплата за первый месяц будет:

$$\frac{q}{100} * S + \frac{S}{25}$$

Решение задачи 2

За второй месяц Дмитрий заплатит $(S - \frac{S}{25}) * \frac{q}{100} + \frac{S}{25}$;

За третий: $(S - \frac{2S}{25}) * \frac{q}{100} + \frac{s}{25}$;

$\ldots\ldots;$

За 24-й: $(S - \frac{24S}{25}) * \frac{q}{100} + \frac{s}{25}$;

За 25-й: $\frac{s}{25}$.

Просуммируем получившуюся последовательность выплат:

$$\frac{S}{25} * 25 + \frac{q}{100} * S * (\frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \cdots + \frac{2}{25} + \frac{1}{25}).$$

Решение задачи 2

По условию выплаченная сумма больше взятого кредита на 40%:

$$\frac{S}{25} * 25 + \frac{q}{100} * S * (\frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \cdots + \frac{2}{25} + \frac{1}{25}) - S = 0.4S;$$

$$\frac{q}{100}(\frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \cdots + \frac{2}{25} + \frac{1}{25}) = 0.40$$

Воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии:

$$\frac{q}{100} * \frac{1 + \frac{1}{25}}{2} * 25 = 0.4,$$

$$\frac{13}{100} * q = 0.4,$$

$$q = 3.08$$

Задача 3 (кредит)

15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение задачи 3

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{4S}{5},\ \frac{3S}{5},\ \frac{2S}{5},\ \frac{S}{5},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}05S,\ 1{,}05\cdot\frac{4S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{3S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{2S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{S}{5}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}05S+\frac{S}{5},\ \frac{4\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{3\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{2\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{0{,}05S+S}{5}.$$

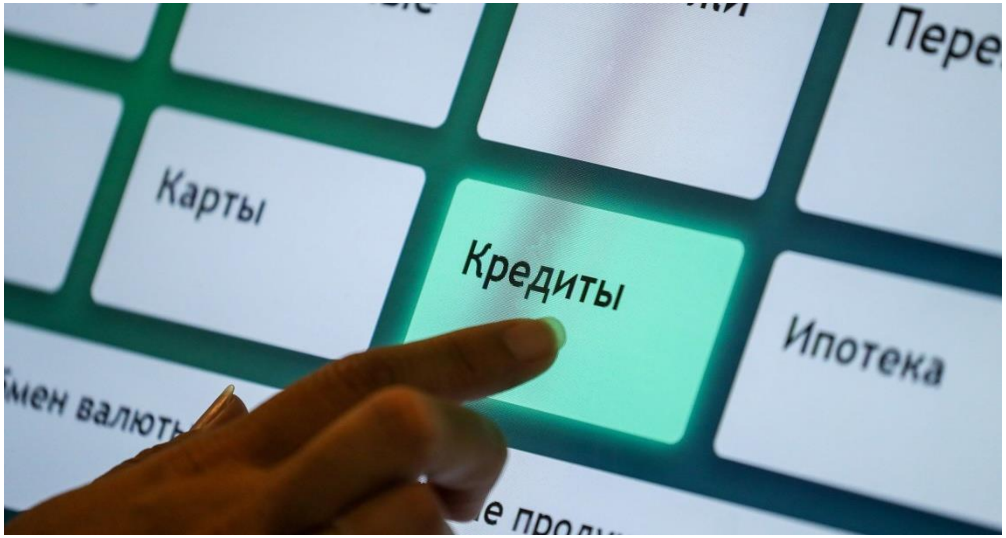
Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}05\left(1+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{1}{5}\right)=S\left(1+\frac{6\cdot 0{,}05}{2}\right)=1{,}15S.$$

Значит, банку нужно вернуть 115% от суммы кредита.

Задача 4 (кредит)

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 9 млн руб..



Решение задачи 4

Обозначим размер кредита буквой S (млн руб.). В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0{,}2S$ млн руб. Всего $0{,}6S$ за три года.
Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1{,}2S$ млн руб. Обозначим буквой x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1{,}2S - x$, а в середине 5-го года он равен $1{,}2\,(1{,}2S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1{,}2\,(1{,}2S - x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1{,}2\,(1{,}2S - x) = x;\ 2{,}2x = 1{,}44S;\ x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

Решение задачи 4

и общий размер выплат равен $0,6S+\frac{72}{55}S=\frac{105}{55}S=\frac{21}{11}S$. По условию

$$\frac{21}{11}S<9,\quad 7S<33.$$

При $S=4$ это неравенство верно, а при $S=5$ оно неверно, как и при бóльших S.

Задача 5 (вклад)

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение задачи 5

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 14%, то есть увеличивается в $1{,}14$ раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}14^2 S = 1{,}2996S.$$

Аналогично, сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

Решение задачи 5

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1,2996S;$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)>\frac{1,2996}{10800}=1,203\ldots.$$

При $n = 21$ неравенство

$$1,21>1,203\ \ldots$$

верно, а при $n = 20$ неравенство

$$1,20>1,203\ \ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Задача 6 (вклад)

- Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером вначале года, и, кроме того, вначале третьего и четвертого года вклад пополняется ежегодно на 3 млн. рублей. Найти наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн. рублей.

Решение задачи 6

Пусть взяли Х млн. рублей

	начало года	конец года
1год	x	1,1x
2год	1,1x	1,21x
3год	1,21x+3	(1,21x+3)*1,1=1,331x+3,3
4год	1,331x+6,3	(1,331x+6,3)*1,1= 1,4641x+6,93

По условию задачи составим уравнение:

$1{,}4641x+6{,}93<25$

$1{,}4641x<18{,}07$

$X<12{,}34$

Так как вклад составляет целое число млн. рублей, то сумма равна 12 млн. рублей.

Задача 7 (вклады)

- В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 11000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение задачи 7

Рассмотрим каждый год отдельно на начало и на конец и выяснить, когда 10% будут больше, чем 4000р. Это и будет нужный год.

	начало года	конец года	10%
2001г.	11000	15000	1500
2002г.	15000	19000	1900
2003	19000	23000	2300
2004	23000	27000	2700
2005	27000	31000	3100
2006	31000	35000	3500
2007	35000	39000	3900
2008	39000	43000	4300>4000
2009	43000		

Так ка 10% больше, чем 4000р., то в начале 2009 года Алексей должен продать ценную бумагу и положить в банк под 10% годовых.

Ответ: в начале 2009 года.

Задача 8

- Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

Самостоятельное решение задачи 8

S=_______, n=________

Месяц	Равномерное уменьшение долга	Ежемесячная процентная часть
1	S/24	S*0.02
2		_______S*0.02
3		_____S*0.02
...		...
....		...
24		_________S*

Запишем сумму платежей, за первые 12 месяцев выплаты кредита:

_____S+S*0.02*(____________________________)=_________________________________=____

____________________________=______________________________

Спасибо за внимание