

Уравнения и неравенства в ОГЭ по математике.

Карнаухова Л.Н.

МАОУ гимназия №1 г. Тюмени

Уравнения. 1 часть.

Уравнение – равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, значение которого надо найти.

Корень уравнения – значение неизвестного, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение – найти все его корни или установить, что их нет.

Типы уравнений

Линейные уравнения

Общий вид:

$$ax = b$$

Решение:

А) если $a \neq 0$, то $x = b : a = \frac{b}{a}$;

Б) если $a = b = 0$, то x – любое число;

В) если $a \neq 0, b = 0$, то нет корней.

Квадратные уравнения:

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) $D > 0$ 2 корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $D = 0$ 1 корень $x = \frac{-b}{2a}$

3) $D < 0$ корней нет

Полные

Приведенное:

$$x^2 + px + q = 0$$

Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Линейные уравнения

Линейные уравнения

Общий вид:

$$ax = b$$

Решение:

А) если $a \neq 0$, то $x = b : a = \frac{b}{a}$;

Б) если $a = b = 0$, то x – любое число;

В) если $a \neq 0, b = 0$, то нет корней.

Пример 1. Найдите корень уравнения:

а) $10x = -80$,

$$10x = -80$$

$$x = -80 : 10$$

$$x = -8$$

б) $7x = 0$,

$$7x = 0$$

$$x = 0 : 7$$

$$x = 0$$

в) $40x = 3$.

$$40x = 3$$

$$x = 3 : 40$$

$$x = \frac{3}{40}$$

Уравнения, сводящиеся к линейным

Уравнения, сводящиеся к линейным

Теорема 1. Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Следствие. Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Пример 2. Найдите корень уравнения $12 - 3x = -4x + 7$.

$$12 - 3x = -4x + 7$$

$$-3x + 4x = 7 - 12$$

$$x = -5$$

Ответ: -5

Пример 3. Найдите корень уравнения $3(x - 8) = -6 + x$.

$$3(x - 8) = -6 + x$$

$$3x - 24 = -6 + x$$

$$3x - x = -6 + 24$$

$$2x = 18 \quad |:2$$

$$x = 9$$

Ответ: 9

Пример 4. Найдите корень уравнения $x - \frac{x}{14} = \frac{13}{7}$.

$$\frac{x^{(14)}}{1} - \frac{x^{(1)}}{14} = \frac{13^{(2)}}{7}$$

$$\frac{14x}{14} - \frac{x}{14} = \frac{26}{14} \quad | \cdot 14$$

$$14x - x = 26$$

$$13x = 26 \quad |:13$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

Уравнения, сводящиеся к линейным

Правило пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.

Пример 5. Найдите корень урав-

нения $\frac{20}{x+4} = -\frac{8}{3}$.

$$\frac{20}{x+4} = -\frac{8}{3} \quad |:4$$

$$\frac{5}{x+4} = -\frac{2}{3}$$

$$x+4 \neq 0 \quad x \neq -4$$

по правилу пропорции:

$$5 \cdot 3 = (x+4) \cdot (-2)$$

$$15 = -2x - 8$$

$$2x = -8 - 15$$

$$2x = -23 \quad |:2$$

$$x = -11,5$$

Ответ: -11,5

Пример 6. Найдите корень урав-

нения $\frac{9}{x-7} = -10$.

$$\frac{9}{x-7} = -\frac{10}{1}$$

$$x-7 \neq 0 \quad x \neq 7$$

по правилу пропорции:

$$9 \cdot 1 = (x-7) \cdot (-10)$$

$$9 = -10x + 70$$

$$10x = 70 - 9$$

$$10x = 61 \quad |:10$$

$$x = 6,1$$

Ответ: 6,1

Уравнения, сводящиеся к линейным

Квадрат суммы/разности:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

ИЛИ

$$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2 - \underline{3x} - \underline{3x} + 9 = \\ = x^2 - 6x + 9$$

Пример 7. Найдите корень уравнения $(x+4)^2 = (11-x)^2$.

$$(x+4)^2 = (11-x)^2$$

$$(x+4)(x+4) = (11-x)(11-x)$$

$$x^2 + 4x + 4x + 16 = 121 - 11x - 11x + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4x + 11x + 11x - x^2 = 121 - 16$$

$$30x = 105 \quad |:30$$

$$x = 3,5$$

Ответ: 3,5

Неполные квадратные уравнения

$$ax^2=0, \\ b=0, c=0$$

$$ax^2 \pm bx=0, \\ c=0$$

$$ax^2 \pm c=0, \\ b=0$$

Пример 8. Решите уравнение $(4x-3)(-x+11)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$(4x-3)(-x+11)=0$$

$$ab=0 \Rightarrow a=0 \text{ или } b=0$$

$$4x-3=0$$

$$4x=3 \quad |:4$$

$$x=\frac{3}{4}=0,75$$

меньший корень

Ответ: 0,75

Пример 9. Решите уравнение $6x^2+54x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$6x^2+54x=0$$

$$6x(x+9)=0$$

$$ab=0 \Rightarrow a=0 \text{ или } b=0$$

$$6x=0 \quad |:6 \qquad x+9=0$$

$$x=0 \qquad \qquad \qquad x=-9$$

больший корень

Ответ: 0

Неполные квадратные уравнения

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0, \\ b=0, c=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 \pm bx &= 0, \\ c=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 \pm c &= 0, \\ b=0 \end{aligned}$$

Пример 10. Решите уравнение $x^2 - 400 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 - 400 = 0$$

$x^2 - (20)^2 = 0$ – разность квадратов

$$(x - 20)(x + 20) = 0$$

$$x - 20 = 0$$

$$x = 20$$

$$x + 20 = 0$$

$$x = -20$$

меньший корень

Ответ: -20

Пример 11. Решите уравнение $8x^2 - 56x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$8x^2 - 56x = 0$$

$$8x(x - 7) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$8x = 0 \quad |:8$$

$$x = 0$$

$$x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

больший корень

Ответ: 7

Полные квадратные уравнения

Полные

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) $D > 0$ 2 корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

2) $D = 0$ 1 корень $x = \frac{-b}{2a}$

3) $D < 0$ корней нет

Пример 12. Решите уравнение $x^2 + 48 = 14x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2 + 48 = 14x$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 48, \\ x_1 + x_2 = +14 \end{cases}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 6 - \text{меньший корень}$$

Ответ: 6

Приведенное:

$$x^2 + px + q = 0$$

Теорема Виета:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Пример 13. Решите уравнение $x^2 - 27 = 6x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2 - 27 = 6x$$

$$x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -27, \\ x_1 + x_2 = +6 \end{cases}$$

$$x_1 = 9 - \text{больший корень}$$

$$x_2 = -3$$

Ответ: 9

Полные квадратные уравнения

Пример 14. Решите уравнение $4x^2 - 14x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$4x^2 - 14x - 18 = 0 \quad |:2$$

$$2x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -7 \quad c = -9$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 49 + 72 = 121 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7 + 11}{4} = 4,5$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{7 - 11}{4} = -1 \text{ (меньш.)}$$

Ответ: -1

Пример 15. Решите уравнение $5x^2 + 12x + 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$5x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$a = 5 \quad b = 12 \quad c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 144 - 80 = 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 + 8}{10} = -0,4 \text{ (больш.)}$$

$$x_2 = \frac{-12 - \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{-12 - 8}{10} = -2$$

Ответ: -0,4

Неравенства

Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – найти все его решения или установить, что их нет.

Свойства неравенств

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю. Если число положительно, то знак неравенства не меняется, если отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

Неравенства

Линейные неравенства

Общий вид:

$$ax > b \quad ax \geq b$$

$$ax < b \quad ax \leq b$$

Алгоритм решения неравенств, сводящихся к линейным:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);

2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Пример 1. Решите неравенство:

а) $6x - 7 > 10x + 5$

$$6x - 10x > 5 + 7$$

$$-4x > 12 \quad | :(-4) \quad -4 < 0$$

$$x < -3$$



$$x \in (-\infty; -3)$$

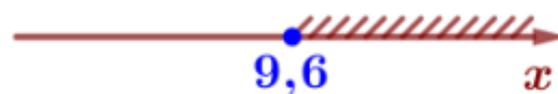
б) $17x - 4(3x - 8) \geq 80$

$$17x - 12x + 32 \geq 80$$

$$5x \geq 80 - 32$$

$$5x \geq 48 \quad | :5$$

$$x \geq 9,6$$



$$x \in [9,6; +\infty)$$

Системы неравенств

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему неравенств – найти все решения этой системы или установить, что их нет.

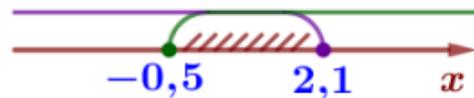
Системы двух линейных неравенств

Алгоритм:

- 1) решить оба неравенства;
- 2) изобразить на числовой оси множество решений первого и второго неравенств системы;
- 3) определить значения неизвестного, которые одновременно принадлежат обоим интервалам.

Пример 2. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2,1 \leq 0 \\ -2x + 2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 1 \quad |:(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 3 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ x \geq -0,5 \end{cases}$$



$$x \in [-0,5; 2,1]$$

$$\text{б) } \begin{cases} -72 + 8x < 0 \\ 5 - 6x > -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ -6x > -18 \quad |:(-6) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8x < 72 \quad |:8 \\ -6x > -13 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$

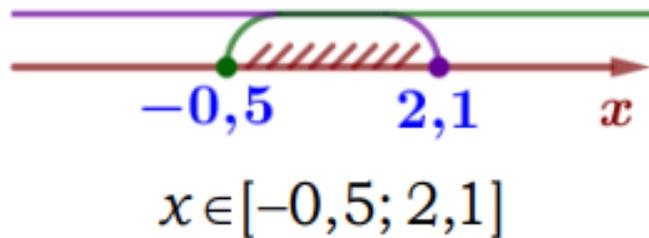


$$x \in (-\infty; 3)$$

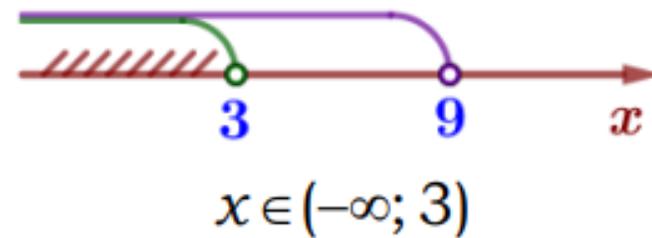
Системы неравенств

Пример 2. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2,1 \leq 0 \\ -2x + 2 \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 1 \quad | :(-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 2,1 \\ -2x \leq 3 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2,1 \\ x \geq -0,5 \end{cases}$$



$$\text{б) } \begin{cases} -72 + 8x < 0 \\ 5 - 6x > -13 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ -6x > -18 \quad | :(-6) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8x < 72 \quad | :8 \\ -6x > -13 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$



Квадратные неравенства

Способы решения:

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c \vee 0, \quad a \neq 0$$

\vee – знак неравенства

(\leq , \geq , $<$, $>$)

Алгоритм:

- 1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ или установить, что их нет;
- 2) определить направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$;
- 3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

С помощью графика квадратичной функции

Метод интервалов

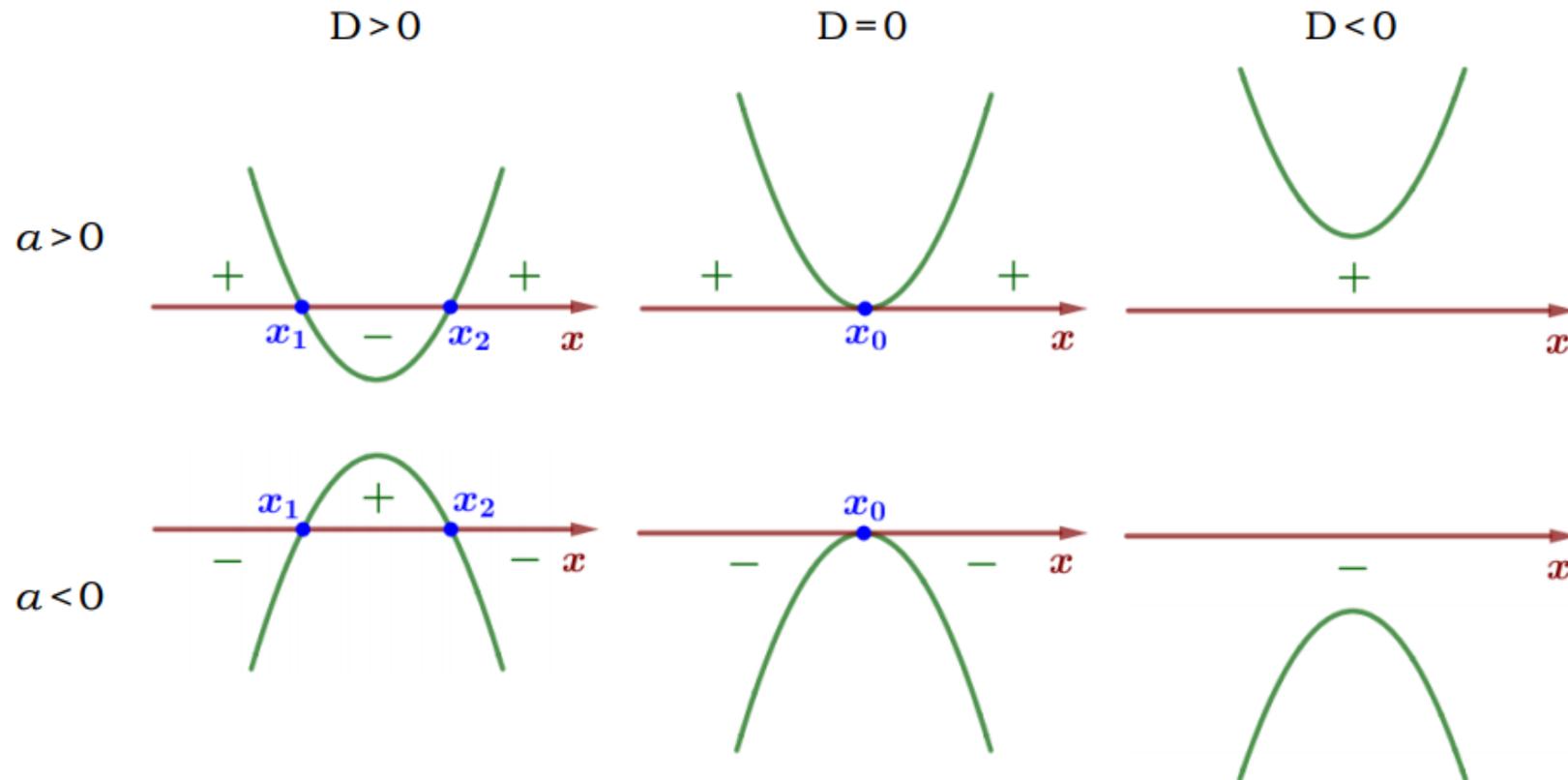
Алгоритм:

- 1) найти нули функции $y = ax^2 + bx + c$, решив квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$;
- 2) отметить положение нулей на оси Ox ;
- 3) определить знаки функции в промежутках между нулями;

Графический способ решения квадратных неравенств

Алгоритм:

- 1) найти действительные корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ или установить, что их нет;
- 2) определить направление ветвей параболы $y=ax^2+bx+c$;
- 3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.



Графический способ решения квадратных неравенств

Пример 6. Решите неравенство $x^2+12x+32\leq 0$.

$$x^2+12x+32\leq 0$$

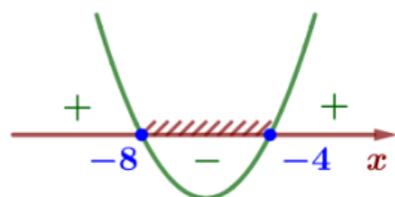
$$x^2+12x+32=0$$

$$D=b^2-4ac=12^2-4\cdot 1\cdot 32=16$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12-\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-8$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-12+\sqrt{16}}{2\cdot 1}=-4$$

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ: $x\in[-8;-4]$

Пример 7. Решите неравенство $7x-x^2<0$.

$$7x-x^2<0$$

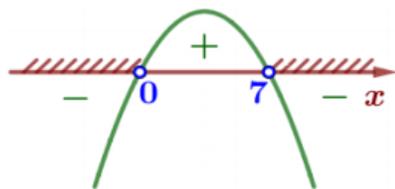
$$7x-x^2=0$$

$$x(7-x)=0$$

$$x=0 \quad 7-x=0$$

$$x=7$$

$a=-1<0$ ветви вниз



Ответ:
 $x\in(-\infty; 0)\cup(7; +\infty)$

Пример 8.

Решите неравенство $x^2+100<0$.

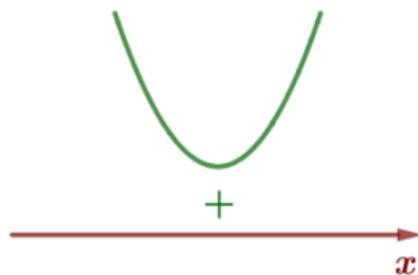
$$x^2+100<0$$

$$x^2+100=0$$

$$x^2=-100$$

корней нет

$a=1>0$ ветви вверх



Ответ:
неравенство не имеет решений

Алгоритм:

- 1) найти действительные корни квадратного уравнения или установить, что их нет;
- 2) определить направление ветвей параболы;
- 3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (касания) с осью Ox , если они есть;
- 4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения

Метод интервалов

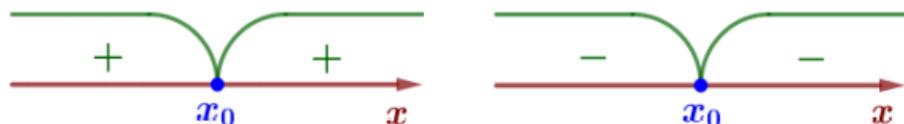
Алгоритм:

- 1) найти нули функции $y = ax^2 + bx + c$, решив квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$;
- 2) отметить положение нулей на оси Ox ;
- 3) определить знаки функции в промежутках между нулями;
 - A. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,
 - B. определить знаки в остальных промежутках по правилу:

$D > 0$ (2 корня)
знаки чередуются



$D = 0$ (1 корень)
знаки совпадают



$D < 0$ (нет корней)
функция сохраняет знак
на всей числовой оси



- 4) выбрать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Пример 9. Решите неравенство $4x^2 \geq 9$.

$$4x^2 \geq 9$$

$$4x^2 - 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$2x = -3$$

$$x = 1,5$$

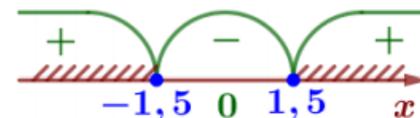
$$x = -1,5$$

при $x = 0$

$$4x^2 - 9 = 4 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0 \Rightarrow$$

на интервале $(-1,5; 1,5)$

знак "-"



Ответ: $x \in (-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$

Метод интервалов

Пример 10. Решите неравенство $x^2 - 2x + 15 < 0$.

$$x^2 - 2x + 15 < 0$$

$$x^2 - 2x + 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$$

корней нет

$$\text{при } x=0 \quad x^2 - 2x + 15 = 0^2 - 2 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: неравенство не имеет решений

Пример 11. Решите неравенство $x^2 + 12 > 0$.

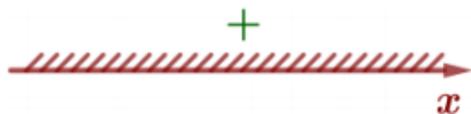
$$x^2 + 12 = 0$$

$$x^2 = -12$$

корней нет

$$\text{при } x=0 \quad x^2 + 12 = 0^2 + 12 = 12 > 0$$

на всей числовой оси знак "+"



Ответ: $x \in \mathbb{R}$, то есть x – любое число

- 1) найти нули функции, решив квадратное уравнение;
- 2) отметить положение нулей на оси Ox ;
- 3) определить знаки функции в промежутках между нулями;
 - A. вычислить значение функции в точке $x=0$ (или, например, $x=1$), отметить знак в соответствующем промежутке,
 - B. определить знаки в остальных промежутках по правилу

Метод интервалов

Пример 12. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:



1) $x^2 - 81 < 0$

2) $x^2 - 81 > 0$

3) $x^2 - 9x < 0$

4) $x^2 - 9x > 0$

Решим неравенство №1:

$$x^2 - 81 < 0$$

$$x^2 - 81 = 0$$

$$(x - 9)(x + 9) = 0$$

$$x - 9 = 0 \quad x + 9 = 0$$

$$x = 9 \quad x = -9$$

Корни **не** совпадают с данными рисунка.

Такие же корни даст неравенство №2, поэтому его тоже можно проигнорировать.

Решим неравенство №3:

$$x^2 - 9x < 0$$

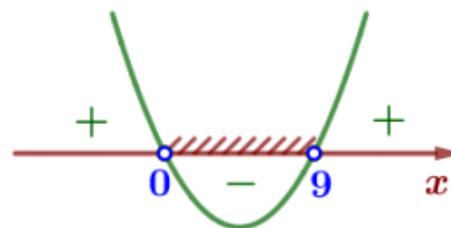
$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 9 = 0$$

$$x = 9$$

$a = 1 > 0$ ветви вверх



Решение совпадает с изображенным на рисунке, в ином случае верным было бы неравенство №4.

Ответ: 3

Рациональные уравнения

Рациональное уравнение – это такое уравнение, в обеих частях которого содержатся рациональные выражения.

Рациональное уравнение будет являться **целым** в том случае, если в записи левой и правой его частей содержатся целые рациональные выражения.

Рациональное уравнение будет являться **дробным** в том случае, если одна или обе его части содержат дробь.

Решить уравнение

$$x^3 + x^2 = 9x + 9.$$

В ответе запишите произведение его корней.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$(x^3 + x^2) - (9x + 9) = 0, \quad x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)(x^2 - 9) = 0, \quad (x + 1)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

В данном случае произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получим: $x - 3 = 0$, или $x + 3 = 0$, или $x + 1 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. Произведение корней: $x_1 x_2 x_3 = 9$.

Ответ: 9.

Дробно-рациональные уравнения

Уравнение вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ называется дробно-рациональным. Его решение сводится к решению системы $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

Найти наибольший корень уравнения

$$\frac{2}{x^2+5x} + \frac{3}{2x-10} = \frac{15}{x(x^2-25)}.$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной уравнения, предварительно приведя его к виду

$$\frac{2}{x(x+5)} + \frac{3}{2(x-5)} = \frac{15}{x(x-5)(x+5)};$$

$x \neq 0$, $x \neq 5$, $x \neq -5$. Домножив обе части уравнения на общий знаменатель $2x(x+5)(x-5)$, получим уравнение:

$$4(x-5) + 3x(x+5) = 30,$$

$$3x^2 + 19x - 50 = 0,$$

$$D = 961, x = \frac{-19 \pm 31}{6}, x_1 = 2, x_2 = -\frac{25}{3}$$

— оба числа удовлетворяют условию $x \neq 0$, $x \neq 5$, $x \neq -5$.
Наибольший корень $x = 2$.

Ответ: 2.

Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение имеет вид: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

В системе есть избыточное условие: из уравнения следует выполнение первого неравенства. Избыток не является ошибкой. Так лучше запоминается: арифметический квадратный корень определен для неотрицательного числа; арифметический квадратный корень принимает неотрицательные значения; корнем из неотрицательного числа является такое неотрицательное число, квадрат которого равен числу, записанному под корнем.

Другое решение часто называют «методом равносильности».

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 8} = \sqrt{-2x}$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 8 = -2x, \\ -2x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения: -4 ; 2 . Корень иррационального уравнения: -4 .

Ответ: -4 .

2. Найти сумму корней уравнения

$$\sqrt{3x^2 - 3x + 21} = 5 - x.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x + 21 = (5 - x)^2, \\ 5 - x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 7x - 4 = 0, \\ x \leq 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 0,5 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 0,5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Корни иррационального уравнения: -4 ; $0,5$. Их сумма равна $-3,5$.

Ответ: $-3,5$.

Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Иррациональные уравнения

3. Найти сумму корней уравнения

$$(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$(x+2)\left(\sqrt{x^2-x-20}-6\right)=0.$$

Найдем область допустимых значений переменной: $x^2-x-20 \geq 0$, $x \in (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$. Так как произведение равно 0, получим:

$$x+2=0 \text{ или } \sqrt{x^2-x-20}=6,$$

то есть

$$x=-2 \text{ или } x^2-x-20=36.$$

Значение -2 не принадлежит области допустимых значений переменной. Решим последнее уравнение $x^2-x-56=0$: $x=8$ или $x=-7$, оба числа удовлетворяют условию $x^2-x-20 \geq 0$. (Это условие можно было бы и не фиксировать, так как $x^2-x-20=36$.) Сумма корней равна $-7+8=1$.

Ответ: 1.

Замечание. Вместо нахождения области допустимых значений переменной можно сделать проверку.

Рациональные неравенства

1. Решить неравенство $\frac{x^2+1}{x-3} < 0$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$ определена при всех действительных значениях x , кроме $x = 3$, и не имеет нулей, поэтому получается: $x \in (-\infty; 3)$.

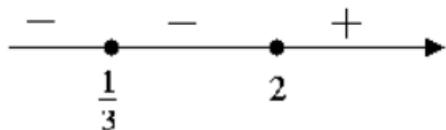
Ответ: $(-\infty; 3)$.

2. Решить неравенство

$$(9x^2 - 6x + 1)(x - 2) \geq 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть неравенства, получим: $(3x - 1)^2(x - 2) \geq 0$. Решим неравенство методом интервалов:

$$x \in \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup [2; +\infty).$$



Ответ: $x = \frac{1}{3}, x \geq 2$.

3. Решите неравенство:

$$\frac{(x^2 + 3x - 18)(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 8x + 14)} > 0.$$

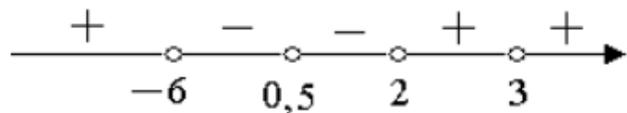
Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель левой части неравенства, тогда получим:

$$\frac{(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)(3x^2-8x+14)} > 0.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(x+6)(2x-1)^2}{(x-2)(3x^2-8x+14)} > 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $3x^2 - 18x + 14$ действительных корней не имеет, то есть принимает значения одного знака при всех допустимых значениях переменной. Решим неравенство методом интервалов: $x \in (-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Полезные материалы, ресурсы:

- Материалы курса «Система подготовки к ЕГЭ по математике» : лекции 5–8. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2009. – 80 с.
- [Распечатай и реши: Математика ОГЭ 2021 \(time4math.ru\)](http://time4math.ru)
- [Открытый банк заданий ОГЭ \(fipi.ru\)](http://fipi.ru)