



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

ЕГЭ 2018

Профильный уровень

Задание № 19

Ильина Зоя Владимировна,
старший преподаватель
кафедры естественно-математических
дисциплин ТОГИРРО
5 апреля, 2018 г



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2018 года
по математике

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

- Сколько чисел написано на доске?
- Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
- Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810

- а) может ли на доске быть ровно 24 четных числа?
- б) могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?
- в) какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

--

Каждый из 24 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 12. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он называл балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S .

- а) приведите пример, когда $S < 12$
- б) Могло ли оказаться, что ровно 20 студентов писал обе контрольные работы, если $S = 10$?
- в) Какое наибольшее количество студентов могло писать обе контрольные работы, если $S = 10$?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта a ; — обоснованное решение пункта b ; — искомая оценка в пункте b ; — в пункте b приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Задачи на делимость чисел



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Докажите, что число $16^{20} + 2^{76}$ делится на 17.



Докажите, что число $16^{20} + 2^{76}$ делится на 17.

Решение:

$16^{20} + 2^{76} = (2^4)^{20} + 2^{76} = 2^{80} + 2^{76} = 2^{76}(2^4 + 1) = 2^{76} \cdot 17,$
что и требовалось доказать.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

**Докажите, что число $2001^4 - 1322^4$
делится на 679.**



**Докажите, что число $2001^4 - 1322^4$
делится на 679.**

Решение:

$$\begin{aligned} 2001^4 - 1322^4 &= (2001 - 1322) \cdot (2001 + 1322) \cdot (2001^2 + 1322^2) = \\ &= 679 \cdot 3323 \cdot (2001^2 + 1322^2). \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Докажите, что число $(m + 5n + 7)^6 \cdot (3m + 7n + 2)^7$ делится на 64 при любых натуральных m и n .



Докажите, что число $(m + 5n + 7)^6 \cdot (3m + 7n + 2)^7$ делится на 64 при любых натуральных m и n .

Решение.

Если m и n оба четные или оба нечетные, то число $3m+7n+2$ – четное, то есть $3m+7n+2 = 2k$ и $(3m + 7n + 2)^7 = 128k^7$ делится на 64. Если одно из чисел m, n – четное, а другое – нечетное, то $(m + 5n + 7)^6 = (2p)^6 = 64p^6$, $p \in \mathbb{N}$ делится на 64.

Что и требовалось доказать



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Доказать, что число $16^3 + 31^4 - 2$ делится на 15.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Доказать, что число $96^9 - 32^5 - 48^6$ делится на 10.



Доказать, что число $96^9 - 32^5 - 48^6$ делится на 10.

Решение:

Число 96^2 оканчивается цифрой 6.

Значит, число $96^3, 96^4, \dots, 96^9$ оканчиваются цифрой 6.

Число 32^2 оканчивается цифрой 4,

32^3 - цифрой 8,

32^4 - цифрой 6, 32^5 - цифрой 2.

Число 48^2 оканчивается цифрой 4,

48^3 - цифрой 8, 48^4 - цифрой 6, 48^5 - цифрой 8, 48^6 - цифрой 4.

Следовательно, число $96^9 - 32^5 - 48^6$ оканчивается цифрой $6 - 2 - 4 = 0$,

т.е. делится на 10.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Математические фокусы



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Математические фокусы

2 319 625



- а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
- б) существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
- в) найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

- а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
- б) существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
- в) найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа



На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810

а) может ли на доске быть ровно 24 четных числа?

б) могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?

в) какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810

а) может ли на доске быть ровно 24 четных числа?

б) могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?

в) какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?



Каждый из 24 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 12. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он называл балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S .

а) приведите пример, когда $S < 12$

б) Могло ли оказаться, что ровно 20 студентов писал обе контрольные работы, если $S = 10$?

в) Какое наибольшее количество студентов могло писать обе контрольные работы, если $S = 10$?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Каждый из 24 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 12. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он называл балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S .

а) приведите пример, когда $S < 12$

б) Могло ли оказаться, что ровно 20 студентов писал обе контрольные работы, если $S = 10$?

в) Какое наибольшее количество студентов могло писать обе контрольные работы, если $S = 10$?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Задачи на принцип Дирихле



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки одного сорта.
Найдутся ли 9 ящиков одного сорта?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

15 белок собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то две из них собрали одинаковое количество орехов.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зеленый. Сколько шаров надо вынуть не глядя, чтобы наверняка достать два шара одного цвета?

.. два синих шара?



В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 12 чёрных и 12 синих носков.

а) Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?

б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару носков черного цвета?

в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 6 пар чёрных и 6 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а)

г) и пару черного цвета (как в пункте б)?

Комментарий: Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 12 чёрных и 12 синих носков.

- а) Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?
- б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару носков черного цвета?
- в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 6 пар чёрных и 6 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а)
- г) и пару черного цвета (как в пункте б)?

Комментарий: Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 12 чёрных и 12 синих носков.

- а) Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?
- б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару носков черного цвета?
- в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 6 пар чёрных и 6 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а)
- г) и пару черного цвета (как в пункте б)?

Комментарий: Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.

Ответ: а) 3, б) 14, в) 13, г) 19.

Решение:

- а) Если взять только два носка, то они могут оказаться разных цветов, и составить из них пару не получится. А из трёх носков два точно будут одного цвета.
- б) Если взять 13 носков, то 12 из них могут оказаться синими, и составить чёрную пару не получится. Если же взять 14 носков, то среди них не может быть больше 12 синих, поэтому точно будут два чёрных.
- в) Если взять 12 ботинок, то все они могут оказаться левыми, и составить пару из них не получится. Разобьём мысленно все 24 ботинка на пары. Пар будет 12. Если взять 13 ботинок, то два из них точно будут из одной пары.
- г) Если взять 18 ботинок, то 12 из них могут оказаться синими, а остальные 6 — левыми чёрными, и составить из них чёрную пару не получится. Если взять 19 ботинок, то хотя бы 7 из них будут чёрными, а значит, будет точно хотя бы один чёрный левый и хотя бы один чёрный правый.



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

Можно ли вывезти из каменоломни 50 камней, массы которых соответственно равны 370, 372, 374, ..., 468 кг, на семи машинах с максимальной погрузкой 3 тонны?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного, но не всех). Первый ученик дает порцию по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, а четвертый – по 400 г.

- а) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили одинаковое количество корма?
- б) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили разное количество корма?
- в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик накормил ровно четырех кроликов и все кролики получили разное количество корма?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного, но не всех).

Первый ученик дает порцию по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, а четвертый – по 400 г.

- а) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили одинаковое количество корма?
- б) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили разное количество корма?
- в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик накормил ровно четырех кроликов и все кролики получили разное количество корма?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного, но не всех). При этом каждый ученик дает кроликам одну и ту же порцию корма, разные ученики могут давать различные порции, а какие-то кролики могут остаться без корма

- а) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили одинаковое количество корма?
- б) Может ли оказаться, что каждый ученик накормил ровно шесть кроликов, всего кроликов было 16 и все они получили разное количество корма?
- в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик накормил ровно шесть кроликов и все кролики получили разное количество корма?



ЕГЭ 2018. Профильный уровень

В живом уголке 4 ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного, но не всех). При этом каждый ученик дает кроликам одну и ту же порцию корма, разные ученики могут давать различные порции, а какие-то кролики могут остаться без корма

- а) Может ли оказаться, что кроликов было 15, и все они получили одинаковое количество корма?
- б) Может ли оказаться, что каждый ученик накормил ровно шесть кроликов, всего кроликов было 16 и все они получили разное количество корма?
- в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик накормил ровно шесть кроликов и все кролики получили разное количество корма?