5 класс

1. 3 плеера и 1 магнитола весят столько же, сколько и 10 сотовых телефонов. 1 плеер и 6 сотовых телефонов равны по весу 1 магнитоле. Определите, сколько сотовых телефонов по весу равны магнитоле?

Решение:
Если в первом условии «3 плеера и 1 магнитола» заменить 1 магнитолу на 1 плеер и 6 сотовых телефонов (данные второго условия), то получим, что 4 плеера и 6 телефонов равны 10 телефонам. Следовательно, вес плеера равен весу сотового телефона. Если в первом условии заменить 3 плеера на 3 телефона, то получим, что 1 магнитола равна по весу 7 сотовым телефонам.

Ответ: 7 сот. тел.

1. Имеется 9 одинаковых монет, но одна из них легче остальных. Необходимо за два взвешивания на весах найти эту монету. Весы - обычные с двумя чашками, т.е. рычажные.

Решение:

Сначала необходимо взвесить шесть монет, по три в каждой чаше весов. Находим тройку монет, среди которых та, что легче остальных. Затем, работаем с этой тройкой монет. Взвешиваем две из них. Если они равны по весу, то оставшаяся монета - искомая. Если же не уравновесятся, то искомая монета также найдена - та, что более легкая.

1. В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса? Ответ объясните.

Решение:

Рассуждаем от противного. Если бы такого месяца не нашлось, то в каждом из 12 месяцев день рождения отмечали бы не более трёх учеников. Значит, всего учеников было бы не более 36. Но 40 > 36. Противоречие.

1. Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

Решение:

Поскольку внутри цепи все числа встречаются парами, а общее количество половинок домино с пятерками – восемь, то и на другом конце цепи стоит пятерка.

Ответ: 5.

1. В одном очень крупном супермаркете есть большой эскалатор, ступеньки на котором поднимаются снизу вверх. Если посетители начнут двигаться на эскалаторе с самого низу и прошагают 26 ступенек, то поднимутся наверх за 30 секунд. Если же посетители прошагают 34 ступеньки, то они поднимутся наверх уже за 18 секунд. Определите, сколько ступенек в этом эскалаторе?

Решение: Найдем скорость эскалатора: 34-26=8. 30-18=12.

$8:12=\frac{2}{3}$ (ст. в секунду) - скорость эскалатора 2 ступеньки за 3 секунды.

$\frac{2}{3}\*30+26=46$ ступенек.

2 способ. 30 \* 34 = 1020, 26 \* 18 = 468, разность произведений равна 552. Разность по времени равна 12 (30 - 18). Поделим: 552 / 12 = 46 ступенек.

Ответ: 46.

1. В квадрате отметили середины двух сторон и соединили их с вершинами так как показано на рисунке. Докажите, что площадь чёрного многоугольника равна сумме площадей серых многоугольников.



Решение:

Для начала заметим, что площадь красных частей равна площади желтой, а площадь голубых равна площади салатовой. (Т.к. диагональ в прямоугольнике делит прямоугольник на два равновеликих треугольника – так для прямоугольников ABGE и СDEG)





Далее, пронумеруем площади многоугольников. См рис:



И запишем два равенства, вытекающих из квадрата 1 и квадрата 2.

7+2+4=1+8+6+3+5

1+2+3=8+7+6+5+4

Складываем левые и правые части уравнений попарно. Сумма левых частей уравнений равна сумме правых частей уравнений.

7+2+4+1+2+3=1+8+6+3+5+8+7+6+5+4

Взаимноуничтожим одинаковые слагаемые в правой и левой части последнего уравнения. Получим:

2+2=6+6+8+8+5+5

Что одно и то же: 2=6+5+8. Ч.т.д.

6 класс

1. Стая голубей приземлилась на деревья по одному на каждое дерево, в результате не хватило одного дерева. Тогда голуби сели по два на одно дерево, в результате одно дерево оказалось лишним. Сколько было голубей и деревьев?

Решение:

Когда голуби сели по 2 на одно дерево, то это равносильно тому, что голубей стало в 2 раза меньше. При этом если раньше 1 голубь был лишним, то теперь недостает 1 голубя. Следовательно, уменьшение количества голубей в 2 раза ведет к количественному снижению на 2. В итоге, голубей изначально было 4, а деревьев, соответственно, 3.

Ответ: 4 голубя и три дерева.

1. Для окраски куба потребовалось 6 г краски. Когда краска просохла, куб распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько понадобится краски, чтобы окрасить неокрашенные части этих кубиков?

Решение:

27 одинаковых кубиков можно получить только рассечением исходного куба шестью плоскостями попарно параллельными друг другу. Две из них параллельны основаниям куба, две – правой и левой граням куба и две – передней и задней граням куба. Эти сечения дают нам в совокупности 12 неокрашенных граней куба. И поскольку на окрашивание 6 граней куба ушло 6 граммов краски, то на окрашивание 12 граней куба уйдет 12 граммов краски.

Ответ: 12 г.

1. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Пусть N(k, l) и N(k, r) — количества левых и правых сапог k-го

размера соответственно. По условию задачи

N(k, l) + N(k, r) = 200 (k = 41, 42, 43);

N(41, l) + N(42, l) + N(43, l) = 300;

N(41, r) + N(42, r) + N(43, r) = 300.

Не может случиться так, что для каждого размера левых (правых)

сапог меньше чем правых (левых). Без ограничения общности будем

считать, что

N(41, l) 6 N(41, r), N(42, l) 6 N(42, r), N(43, l) > N(43, r).

Тогда количество годных пар

N(41, l) + N(42, l) + N(43, r) = 300 − N(43, l) + N(43, r) > 100.

1. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2014?

Решение:

Нет, т.к. число 2014 - четное. На каждом листе сумма номеров страниц нечетна, а сумма 25 нечетных чисел – нечетна.

1. Один фермер купил партию индюков, которая стоила 60 долларов. Оставив себе 15 птиц, фермер продал остальных индюков за 54 доллара. При этом он получил по 10 центов прибыли с каждой птицы. Сколько он купил индюков?

Решение:

х - кол-во индюков 60/х - столько стоил один при покупке (60/х+0,1) - цена, по которой он продавал птиц супермаркету (х-15)\*(60/х+0,1)=54 60+0,1х-900/х-1,5=54 60x-900-1,5x+0,1x^2=54x 0,1x^2+4,5x-900=0 x^2+45x-9000=0 x1=(-45-195)/2<0 - не подходит x2=(-45+195)/2=75 шт

Ответ: 75 шт

1. Миша задумал двузначное число, прибавил к нему 45 и получил двузначное число, «симмет­ричное» задуманному. Найдите все числа, одно из которых мог задумать Миша.

Решение:

Решение данной задачи сводится к решению ребуса $\overbar{ху}+45=\overbar{ух}$ или $\begin{matrix}х у\\4 5\\у х\end{matrix}$

Наш ребус будет иметь несколько решений.

Очевидно, что х,у≠0, т.к. число не может начинаться на ноль. Т.к. х+4 – получаем однозначное число, то у≥5, х≤5. Т.к. у+5= число, которое заканчивается цифру х, а х≠0, то у≠5. Также и х≠5, т.к. 5+число большее 5 ≠ числу, заканчивающемуся на ноль. Следовательно, х может быть цифрой 1; 2; 3 или 4. у может быть цифрой 6; 7; 8 или 9.

Отсюда получаем, что (исходя из условия, у+5 заканчивается на цифру х) чисел, которые мог задумать Миша, может быть не более 4 шт.: 16, 27, 38 и 49. Проверим, все ли они удовлетворяют условию задачи. 16+45=61 –подходит, 27+45=72 – подходит, 38+45=83 – подходит, 49+45=94 – подходит.

Ответ: 4 числа: 16, 27, 38 и 49.

7 класс

1. Известно, что маляр, будучи в плохом настроении, работает вдвое медленнее, чем в хорошем. В первую неделю он покрасил на 300 метров забора больше, чем во вторую, потому что во вторую неделю грустил на два дня больше, чем в первую. Сколько метров забора в день красит грустный маляр?

Решение: Разница между двумя хорошими днями и двумя плохими составляет 300 м, т. е. за один грустный день маляр красит на 150 м забора меньше. Тогда в хорошем настроении красит 300 метров. В плохом – 150 м.

Ответ: 150 м.

1. Три пары (мужей и жен) получили на всех заработную плату за неделю в сумме 1000 фунтов. В сумме жены получили 396 фунтов. Диана получила на 10 фунтов больше Кати, а Мария получила на 10 фунтов больше Дианы. Дмитрий Смирнов получил столько же, сколько и его жена, Георгий Сидоров получил в полтора раза больше жены, Тимофей Иванов получил вдвое больше жены. Подумайте и ответьте, кто и на ком женат, кто и сколько получил денег?

Решение:

Пусть Катя получила х фунтов, тогда Диана получила х+10 фнтов, а Мария получила х+20 фунтов. Составим и решим уравнение. х+х+10+х+20=396. Х=122. Следовательно, Диана получила 132 фунта, Катя получила 122 фунта, Мария получила 142 фунта.

Дмитрий Смирнов получил 122 фунта, как и его жена Катя. Георгий Сидоров получил 198 фунтов, это в полтора раза больше чем получила его жена Диана. Тимофей Иванов получил 284 фунта, что в два раза больше, чем получила его жена Мария.

1. В ящике 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

Решение:

15 шариков можно достать только красного, зеленого или синего цветов. Остальных цветов шариков меньше 15. Если достанем 32 шарика, то среди них могут оказаться 10 белых, 10 чёрных и 12 желтых шариков. Если достанем еще 15 шариков, то среди них может оказаться, например, 14 шт одного цвета и 1 другого. Следовательно, к 32 прибавляем 14 и снова вынимаем 15 шариков. Среди них снова могут оказаться 14 одного цвета и 1 другого. Снова к сумме прибавляем 14 и снова вынимаем 15 шариков. Этого будет достаточно, чтобы быть уверенными, что один цвет шариков будет в количестве не менее 15 шт. Итак, достали 10+10+12+14+14+15=75 шариков.

Проверить можно таким образом: перебрать возможные варианты при наихудшем исходе количества шариков, которые остались в ящике. Остались 6син., 6 зел. и 13 крас. Тогда вытащили 15 красных. Остались 14 крас., 6 син и 5 зел. Тогда вытащили 15 зеленых. и последний вариант: вытащили 14 крас., 6 зел. и 5 синих. Тогда вытащили 15 синих шариков.

Ответ: 75 шариков.

1. В магазин привезли меньше 500, но больше 400 тарелок. Когда стали раскладывать их десятками, то не хватило трёх тарелок до полного числа десятков, а когда стали раскладывать дюжинами, осталось 7 тарелок. Сколько было тарелок?

Решение:

По условию, когда тарелки раскладывали на стопки по 10 шт, не хватило трех до ровного десятка. Другими словами осталось лишних 7 штук. Такое же количество осталось лишним, когда раскладывали тарелки по 12 шт. Пусть X будет количество тарелок без лишних семи штук. По условию Х будет делиться на 10 и на 12, а, следовательно, будет делиться на 60 нацело без остатка. Таких чисел между 400 и 500 два – 420 и 480. Добавим к ним «лишние» тарелки и получим, что тарелок привезли 420+7=427 или 480+7=487 тарелок.

Ответ: 427 или 487 тарелок.

1. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей?

Решение:

Две окружности могут пересечься в двух точках. Третья окружность пересечется с каждой из имеющихся окружностей тоже в двух точках, т. е добавятся еще 2\*2 = 4 точки. Добавление каждой следующей окружности увеличивает число точек на величину, равную удвоенному количеству уже имеющихся окружностей.

Итого: 2 + 2\*2 + 2\*3 + 2\*4 + 2\*5 + 2\*6 + 2\*7 = 2\*(1 + 2 + 3 + 4 + 5 +6 + 7) = 56

Ответ: 56.

1. Имеются одни чашечные весы. При этом весы были сделаны неправильно и длина одного плеча коромысла весов отличается от длины другого плеча. Если на левую чашу весов положить 3 небольших бутылки с водой, то они уравновесятся 8-ю палками колбасы. Если же наоборот, на правую чашу весов положить шесть бутылок воды, то они уравновесится всего одной палкой колбасы. Вес одной бутылки воды равен 1 кг. Определите, сколько весят 8 палок колбасы?

Решение:

Так как бутылка весит 1 кг, то из первого условия можно сделать вывод, что одна палка колбасы уравновешивает 3/8 кг. Исходя из второго условия, можно сделать вывод, что одна палка уравновешивает уже целых 6 кг. Умножаем 3/8 \* 6 = 9/4. Если извлечь из ответа квадратный корень, то получим 3/2 или 1,5 кг – это вес одной палки колбасы. Следовательно, восемь палок колбасы весят 12 кг.

Ответ: 12 кг.

1. класс
2. У каждого из братьев есть определенное количество денег. У старшего на 25 процентов больше, чем у младшего. Сколько процентов денег должен отдать старший брат младшему, чтобы денег у них стало поровну?

Решение:

Пусть х денег есть у младшего, тогда 1,25х денег – у старшего. Значит, всего 2,25х денег. Пусть у процентов денег должен отдать старший брат младшему, чтобы денег у них стало поровну. Составляем уравнение: $1,25х-\frac{1,25х}{100}∙у=\frac{2,25х}{2}$. Получаем: 25х=2,5ху. Следовательно, у=10.

Ответ: 10%

1. В треугольнике АВС на стороне АВ выбрана точка К и проведены биссектриса КЕ треугольника АКС и высота КН треугольника ВКС. Оказалось, что угол ЕКН – прямой. Найдите ВС, если НС=5.

Решение:



Так как углы АКС и ВКС – смежные, то их биссектрисы перпендикулярны. Следовательно, биссектриса угла ВКС, перпендикулярная биссектрисе КЕ угла АКС, совпадает с КН.

Таким образом, в треугольнике ВКС отрезок КН – высота и биссектриса, значит, ВКС – равнобедренный треугольник с основанием ВС, а КН – его медиана, проведенная к основанию. Следовательно, ВС=2НС=10.

Ответ: 10.

1. Сколько карандашей можно взять в темноте из коробки, в которой 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых карандашей, чтобы в коробке заведомо осталось хотя бы по одному карандашу каждого цвета?

Решение:

Покажем, что карандашей не больше 3: если взять больше трех карандашей, то может случиться так, что четыре из них желтого цвета и условие не выполнится. Когда берем 3 карандаша, то каждого цвета среди них будет не больше 3, нетрудно убедиться, что останется хотя бы один карандаш каждого цвета.

Ответ: 3.

1. Кузнечик прыгает по прямой: первый прыжок на 1 см, второй - на 2 см, третий - на 3 см и так далее. Прыгать он может хоть вперед, хоть назад. Может ли он после тридцать третьего прыжка вернуться в ту точку, с которой начал?

Решение:

Пусть кузнечик прыгает по числовой прямой и начинает из точки с координатой 0. После 33 прыжка он окажется в точке с нечетной координатой (среди чисел от 1 до 33 - нечетных - нечетное число). Так как 0 - число четное, то он не может вернуться.

Ответ: нет.

1. У женщины спросили: "Сколько Вам лет?". Она ответила: "30, не считая суббот и воскресений". Сколько ей лет?

**Решение:**

Без суббот и воскресений – значит считать каждые 5 дней в неделю, т.е. лишь 5/7 жизни. Если 5/7 это 30 лет, то верный ответ 30 × 7 / 5 = 42

**Ответ:** 42 года.

1. Группе из 12 геологов нужно перебраться из первого поселения во второе, находящееся на расстоянии 20 км. Геологи идут со скоростью 4 км/ч. Их может подвозить автомобиль, который едет со скоростью 20 км/ч. При этом он может взять за раз только 4 геологов. Если геологи вышли (и 4 выехали) в полдень, то когда они все прибудут во второе поселение и как их должен подвозить водитель, чтобы они добрались все как можно быстрее?

Решение:

Поскольку автомобиль может везти только 4 геологов, групп для перевозки будет три! Для того чтобы оптимально использовать время передвижения, нужно, чтобы автомобиль все время ездил, не прерываясь на стоянку, а так же чтобы геологи шли без остановок, либо ехали. То есть все находились в движении. И, конечно, чтобы все прибыли в город В одновременно. При таких условиях все три группы должны пройти и проехать одинаковые расстояние.

Нарисуем чертежик: 

Сверху дужкой обозначаю расстояние, которое группа проехала на автомобиле, а снизу – прошла пешком. Получилось 5 промежутков. По чертежу видим, что каждая группа из этих 5 делений прошла пешком два, а три проехала на автомобиле. Из двух последних утверждений начинаем подозревать, что все эти промежутки одинаковые, и равны 4. (Все это проверяется довольно быстро, см. решение ниже) И тогда получается, что:

Автомобиль должен подвезти первую группу из 4 человек на расстояние 12 км, высадив их, он возвращается и подбирает еще 4 геологов прошедших какой-то путь. Он их подвозит до уровня 16 км и высаживает. Далее возвращается к остальным, забирает их и приезжает во второе поселение. Одновременно с автомобилем приходят и первые две группы геологов. Автомобиль пройдет всего 52 км за 2 целых и 3/5 часа. Геологи прибудут во второй населенный пункт в 2 часа и 36 минут.

Подробней решение: Первую группу автомобиль высаживает через $\frac{12}{20}$ ч на расстоянии 12 км. Этой группе остается пройти 20-12=8 км, что они сделают за 2 часа. Итого их время в пути от города А до города В = 2+$\frac{12}{20}=2\frac{12}{20}$ часов=2 часа 36 мин.

За это время остальные 8 геологов прошли $\frac{12}{20}\*4=\frac{12}{5}$ км., значит, расстояние между автомобилем и геологами $12-\frac{12}{5}=9,6$ км. Это расстояние геологи и автомобиль, двигаясь навстречу друг другу, преодолеют за $9,6:24=0,4$ часа. Получается, что после начала движения из Города А вторая группа геологов выезжает на автомобиле через $\frac{12}{20}+0,4=1$ час. За час геологи прошли 4 км. И теперь на автомобиле проехали еще 16-4=12 км за $\frac{12}{20}$ часа. И осталось им пройти 4 км, что они осилят за 1 час. Получили, что вторая группа геологов сначала шла 1 час, потом ехала на автомобиле $\frac{12}{20}$ часов и потом еще 1 час шла пешком. Итого, $2\frac{12}{20}$ ч=2 часа 36 мин.

Посчитаем время в пути третьей группы. Через $1\frac{12}{20}$ часов автомобиль выехал за третьей группой геологов. К этому времени они прошли $1\frac{12}{20}\*4=6,4$ км. Расстояние между автомобилем и третьей группой геологов 16-6,4=9,6 км. Это расстояние автомобиль преодолеет, двигаясь навстречу геологам за 9,6:24=0,4 часа. Получаем, что От начала движения от города А третья группа геологов отъезжают на автомобиле через $1\frac{12}{20}+0,4=2$ часа с расстояния 2\*4=8 км. Оставшиеся 20-8=12 км третья группа проезжает $\frac{12}{20}$ часов. Итого они в пути 2+$\frac{12}{20}=2\frac{12}{20}$ часа. Это 2 часа 36 минут.

Ответ: Автомобиль должен подвезти первую группу из 4 человек на расстояние 12 км, высадив их, он возвращается и подбирает еще 4 геологов прошедших какой-то путь. Он их подвозит до уровня 16 км и высаживает. Далее возвращается к остальным, забирает их и приезжает во второе поселение. Одновременно с автомобилем приходят и первые две группы геологов. Прибудут в 14:36 в пункт В.

Дополнительно для всех классов.

Трое мужчин зашли в магазин шапок. Продавец решила проверить их логику и сказала им: У меня всего 5 шапок: 2 черные и 3 белые. Когда вы закроете глаза, я надену на каждого из вас по одной шапке. Когда вы глаза снова откроете, то каждый сможет увидеть шапки других, но не свою и не оставшиеся две, я их спрячу. Кто из вас первый угадает, какого цвета его шапка, то получит шапку бесплатно в подарок от меня. После того, как шапки были одеты, все трое мужчин открыли глаза и через несколько минут раздумий все трое одновременно, не обменявшись ни одним словом, все трое сказали, что на них белые шапки. И это было три правильных ответа. Как же они смогли догадаться, что на каждом из них белая шапка?

Решение:
Первый рассуждал так: У двух других – белые шапки. Моя или белая или черная. Если она черная, то второй должен был рассуждать так: «у первого черная, у третьего белая. Значит у меня - белая, ибо если бы она была черной, то третий, видя перед собой 2 черные шапки сразу бы сказал, что у него белая, но он этого не делает, значит, сомневается; значит и на мне - белая шапка». Однако второй не говорит, что его шапка белая, а значит, моя шапка не может быть черной, следовательно, она белая.