Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

# Решения

10 класс

1. Решить уравнение:

( 7 баллов)

**Решение:**

Преобразуем левую часть Таким образом,

**Ответ:** 2014.

2. В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники?

(7 баллов)

**Решение:**

Пусть в турнире участвовало *x* девятиклассников. Тогда всего было 11*x* участников и они набрали очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно 1 : 4,5. Поэтому девятиклассники набрали *x*(11*x* – 1) очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все 11*x* – 1 партий, которые он сыграл. Если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

**Ответ:** 10.

3. Пусть . Решить уравнение .

(7 баллов)

**Решение:**

Заметим, что Тогда

;

и т. д.

Наконец,

Решением уравнения является .

**Ответ:** .

4. Диагонали некоторого выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны и разбивают четырехугольник на 4 треугольника, площади которых выражаются простыми числами. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

(7 баллов)

**Решение:**

Пусть площади образовавшихся треугольников. Тогда, очевидно, , следовательно . Поскольку числа простые, то либо и , либо и . Это означает, что одна из диагоналей является его осью симметрии. А в такой четырехугольник всегда можно вписать окружность.

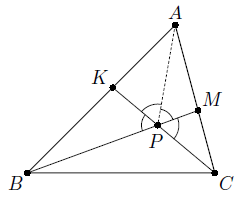
5. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *K*, а на стороне *AC* – точка *M*. Отрезки *BM* и *CK* пересекаются в точке *P*. Оказалось, что углы *APB*, *BPC* и *CPA* равны по 120°, а площадь четырёхугольника *AKPM* равна площади треугольника *BPC*. Найдите угол *BAC*.

(7 баллов)

**Решение:**

К обеим частям равенства прибавим площадь треугольника . Получим, что . Следовательно, , то есть . Таким образом, точки *K* и *M* делят отрезки *BA* и *BC* в одном и том же отношении, считая от вершин *B* и *A* соответственно, то есть .

Заметим теперь, что . Значит, *PK* и *PM* – биссектрисы треугольников *APB* и *APC* соответственно. По свойству биссектрисы . Учитывая равенство , получим . Таким образом, треугольники *BPA* и *APC* подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, . Значит, .



**Ответ:**