Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

# Решения

10 класс

1. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x^{2} \sqrt[3]{x^{2} \sqrt[3]{x^{2}…}}}=2014.$

( 7 баллов)

**Решение:**

Преобразуем левую часть $x^{\frac{2}{3}}·x^{\frac{2}{3^{2}}}·x^{\frac{2}{3^{3}}}…=x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{2}{3^{3}}+…}=x.$ Таким образом, $x=2014.$

**Ответ:** 2014.

2. В шахматном турнире участвовали ученики 9 и 10 классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники?

(7 баллов)

**Решение:**

Пусть в турнире участвовало *x* девятиклассников. Тогда всего было 11*x* участников и они набрали $\frac{11x(11x-1)}{2}$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно 1 : 4,5. Поэтому девятиклассники набрали *x*(11*x* – 1) очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все 11*x* – 1 партий, которые он сыграл. Если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

**Ответ:** 10.

3. Пусть $f\left(x\right)=x^{2}+8x+12$. Решить уравнение $f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\right)=0$.

(7 баллов)

**Решение:**

Заметим, что $f\left(x\right)=\left(x+4\right)^{2}-4.$ Тогда

$f\left(f\left(x\right)\right)=\left(\left(\left(x+4\right)^{2}-4\right)+4\right)^{2}-4=\left(x+4\right)^{4}-4$;

$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=\left(x+4\right)^{8}-4$ и т. д.

Наконец, $f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)\right)=\left(x+4\right)^{32}-4$

Решением уравнения $\left(x+4\right)^{32}=4$ является $x=-4\pm \sqrt[16]{2}$.

**Ответ:** $-4\pm \sqrt[16]{2}$.

4. Диагонали некоторого выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны и разбивают четырехугольник на 4 треугольника, площади которых выражаются простыми числами. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

(7 баллов)

**Решение:**

Пусть $s\_{1}, s\_{2}, s\_{3}, s\_{4}-$ площади образовавшихся треугольников. Тогда, очевидно, $s\_{1}∶s\_{2}=s\_{3}∶ s\_{4}$, следовательно $s\_{1}·s\_{4}=s\_{2}·s\_{3}$. Поскольку числа $s\_{1}, s\_{2}, s\_{3}, s\_{4}-$простые, то либо $s\_{1}=s\_{2}$ и $s\_{4}=s\_{3}$, либо $s\_{1}=s\_{3}$ и $s\_{4}=s\_{2}$. Это означает, что одна из диагоналей является его осью симметрии. А в такой четырехугольник всегда можно вписать окружность.

$$s\_{2}$$

$$s\_{1}$$

$$s\_{4}$$

$$s\_{3}$$

5. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *K*, а на стороне *AC* – точка *M*. Отрезки *BM* и *CK* пересекаются в точке *P*. Оказалось, что углы *APB*, *BPC* и *CPA* равны по 120°, а площадь четырёхугольника *AKPM* равна площади треугольника *BPC*. Найдите угол *BAC*.

(7 баллов)

**Решение:**

К обеим частям равенства $S\_{AKPM}=S\_{BPC}$ прибавим площадь треугольника $BPK$. Получим, что $S\_{ABM}=S\_{BCK}$. Следовательно, $\frac{AM}{AC}S\_{ABC}=\frac{BK}{AB}S\_{ABC}$, то есть $\frac{AM}{AC}=\frac{BK}{AB}$. Таким образом, точки *K* и *M* делят отрезки *BA* и *BC* в одном и том же отношении, считая от вершин *B* и *A* соответственно, то есть $\frac{AM}{MC}=\frac{BK}{KA}$.

Заметим теперь, что $∠BPK=∠BPK=∠BPK=∠BPK=60°$. Значит, *PK* и *PM* – биссектрисы треугольников *APB* и *APC* соответственно. По свойству биссектрисы $\frac{BK}{KA}=\frac{BP}{PA} и \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}$. Учитывая равенство $\frac{AM}{MC}=\frac{BK}{KA}$, получим $\frac{AP}{PC}=\frac{BP}{PA}$. Таким образом, треугольники *BPA* и *APC* подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $∠PAC=∠PBA$. Значит, $∠BAC=∠BAP+∠PAC=∠BAP+∠PBA=180°-120°=60° $.



**Ответ:** $60°$