Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

# Решения

11 класс

1. На городской олимпиаде собрались школьники, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на олимпиаде равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется ученик, который имеет ровно одного друга из числа участников олимпиады.

(7 баллов)

**Решение:**

Рассмотрим ученика с максимальным количеством друзей, равным *n.* По условию все его друзья имеют различное число друзей, отличное от нуля, но не большее *n.* Таких возможностей в точности *n*: один друг, два друга,…, *n* друзей; следовательно, все случаи реализуются. Поэтому существует, в частности, ученик, имеющий ровно одного друга.

2. Найти все простые числа *p* и *q* такие, что .

(7 баллов)

**Решение:**

Преобразуем равенство, получим . Пусть , тогда . Отсюда . Среди трех последовательных чисел одно делиться на 3, поэтому *q* делиться на 3. Так как простое, то , это значение получается при . Тогда

**Ответ:** , .

3. Функция *f(x)* определена на положительной полуоси и принимает только положительные значения. Известно, что *f*(1) + *f*(2) = 10 и при любых *а* и *b*. Найдите .

(7 баллов)

**Решение:**

Из условия задачи следует, что . В частности, ,  поэтому ,  то есть . Последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем 4. Число как 2015-й член этой прогрессии равно .

Ответ: .

4. Решить уравнение: .

(7 баллов)

**Решение:**

Следовательно, выполняется одно из соотношений:

или

.

Отсюда , , где

5. У тетраэдра *ABCD* все двугранные углы острые, а противоположные ребра попарно равны. Найти сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра.

(7 баллов)

**Решение:**

Очевидно, все грани тетраэдра равны, обозначим через *S* площадь грани. Примем одну из них за основание и спроецируем на нее три остальные – они покроют ее. Отсюда

*,*

Где двугранные углы при основании. Отсюда легко следует, что сумма косинусов всех двугранных углов равна 2.

**Ответ:** 2.