Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

# Решения

8 класс

1. Что больше: сумма всех цифр всех четырехзначных чисел или сумма всех цифр всех делящихся на 9 пятизначных чисел?

(7 баллов)

**Решение:**

К каждому четырехзначному числу можно приписать справа цифру так, что получится пятизначное число, делящееся на 9. Значит сумма всех цифр всех пятизначных чисел, делящихся на 9, содержит сумму всех цифр всех четырехзначных чисел и, следовательно, она больше.

2. На некоторых клетках шахматной доски лежит по конфете. Известно, что в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) лежит чётное количество конфет (возможно, ни одной). Какое максимальное количество конфет может лежать на доске?

(7 баллов)

**Решение:**

Среди диагоналей доски есть такие, которые содержат нечётное количество клеток. Таких диагоналей 16: восемь белых и столько же чёрных. На каждой такой диагонали есть хотя бы одна пустая клетка, при этом никакие две диагонали общих клеток не имеют. Таким образом, пустых клеток не менее шестнадцати. Следовательно, клеток с конфетами не более 48. Пример для 48 конфет приведён на рисунке.



3. Двенадцать хоккейных команд из двенадцати городов провели турнир – каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному матчу. Могло ли оказаться так, что каждая команда сыграла во всех городах, кроме своего?

(7 баллов)

**Решение:**

Предположим, что такое возможно. Поскольку каждая команда провела 11 матчей и играла в каждом городе, кроме своего, то в каждом чужом городе она провела ровно по одной игре. Тогда в каждом городе побывало по одному разу ровно 11 команд. Но в каждом матче участвуют две команды, поэтому количество команд, сыгравших в каждом городе, должно быть чётным. Противоречие.

**Ответ:** не могло.

4.Точки *M* и *N* выбраны на сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* так, что лучи *AM* и *AN* делят угол *BAD* на три равные части. Высота *ME* треугольника *AMN* продолжена до пересечения с отрезком *CD* в точке *F*. Докажите, что треугольник *DEF* равнобедренный.

(7 баллов)

**Решение:**

Продолжим *MF* до пересечения с продолжением стороны *AD* в точке *X*. $∠MAD=\frac{2}{3}∠BAD=60°, ∠AME=60°$ (из прямоугольного треугольника *AME*). Тогда треугольник *AMX* равносторонний, и $AX=AM$. Поскольку $AM=AN$, треугольник *NAX* равнобедренный. *ND* и *XE* – высоты к боковым сторонам равнобедренного треугольника. Значит, *F* – их точка пересечения – лежит на оси симметрии треугольника *ANX*. Следовательно, $FE=FD$. Что и требовалось.

5. Может ли сумма цифр числа, являющегося полным квадратом равняться 5?

(7 баллов)

**Решение:**

Если сумма цифр числа равна 5, то

$$\overbar{…dcba}=a+10b+100c+1000d+…=\left(a+b+c+d+…\right)+$$

$9\left(b+11c+111d+…\right)=5+9n$,

то есть при делении на 3 такое число дает остаток 2, но любой квадрат при делении на 3 дает в остатке 0 или 1. Действительно, число либо делится на 3, а, следовательно, и его квадрат делится на 3, либо имеет вид 3k+1 или 3k+2, в обоих случаях остаток от деления квадрата числа на 3 равен 1.

**Ответ:** не может.