Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

# Решения

9 класс

**1. Чему равно значение выражения** $a^{2014}+\frac{1}{a^{2014}}$**, если** $a^{2}+a+1=0?$

(7 баллов)

**Решение:**

**Если** $a^{2}+a+1=0$**, то, разделив обе части равенства на** $a\ne 0$**, получим:** $a+1+\frac{1}{a}=0$**, откуда** $a+\frac{1}{a}=-1$**, тогда**

$$a^{2}+\frac{1}{a^{2}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}-2=-1;$$

$a^{3}+\frac{1}{a^{3}}=\left(a^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(-1\right)\left(-1\right)-\left(-1\right)=2$**;**

$$a^{4}+\frac{1}{a^{4}}=\left(a^{3}+\frac{1}{a^{3}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{2}+\frac{1}{a^{2}}\right)=-1;$$

$$a^{5}+\frac{1}{a^{5}}=\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{3}+\frac{1}{a^{3}}\right)=-1;$$

$$a^{6}+\frac{1}{a^{6}}=\left(a^{5}+\frac{1}{a^{5}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{4}+\frac{1}{a^{4}}\right)=2;$$

$a^{7}+\frac{1}{a^{7}}=\left(a^{6}+\frac{1}{a^{6}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(a^{5}+\frac{1}{a^{5}}\right)=-1,$ **и т. д.**

**Из этих соотношений видно, что для показателей степеней, кратных 3, значение выражения равно 2, а в остальных случаях равно** $-1$**. Так как 2014 не делиться на 3, то значение данного выражения равно** $-1$**.**

**Ответ:** -1.

2. Может ли число, десятичная запись которого состоит из 2014 «единиц», такого же количества «двоек» и некоторого числа «нулей» быть полным квадратом?

(7 баллов)

**Решение:**

Сумма цифр данного числа равна $2014∙1+2014∙2=2014∙3$. Оно делится на 3 и не делиться на 9, значит, не может являться полным квадратом натурального числа.

3. Решить уравнение: $x^{3}-\left(a+5\right)x+\sqrt{a+4}=0$, где $a-$некоторое число, не меньшее $-4$.

(7 баллов)

**Решение:**

Преобразуем исходное уравнение:

$x^{3}-\left(a+4\right)x-x+\sqrt{a+4}=0$;

$x(x^{2}-\left(a+4)\right)-(x-\sqrt{a+4})=0$;

$\left(x-\sqrt{a+4}\right)\left(x^{2}+\sqrt{a+4}·x-1\right)=0$;

Откуда $x=\sqrt{a+4}$ и $x=\frac{-\sqrt{a+4}\pm \sqrt{a+8}}{2}$.

4. Последовательность $\left\{a\_{n}\right\}$ определяется правилами $a\_{0}=9, a\_{k+1}=3a\_{k}^{4}+4a\_{k}^{3}$. Докажите, что в десятичной записи числа $a\_{10}$содержится не менее 1000 «девяток».

Подсказка: Воспользоваться вспомогательной последовательностью $\left\{b\_{n}\right\}$: $b\_{n}=a\_{n} +1$.

(7 баллов)

**Решение:**

**Рассмотрим последовательность** $\left\{b\_{n}\right\}$**, определенную формулой** $b\_{n}=a\_{n}+1$. **Условие** $a\_{k+1}=3a\_{k}^{4}+4a\_{k}^{3}$ **перепишем в виде**

$b\_{k+1}=3\left(b\_{k}-1\right)^{4}+4\left(b\_{k}-1\right)^{3}+1=3b\_{k}^{4}-8b\_{k}^{3}+6b\_{k}^{2}$**.**

**Из полученной формулы видно, что если десятичная запись числа** $b\_{k}$ **оканчивается на *N* нулей, то запись числа** $b\_{k+1}$ **оканчивается на *2N* нулей. Так как** $b\_{0}=10$**, то есть оканчивается на один ноль, то** $b\_{k}$ **оканчивается на** $2^{k}$ **нулей. В частности,** $b\_{10}$ **оканчивается на 1024 нуля, следовательно,** $a\_{10}=b\_{10}-1$ **оканчивается на 1024 девятки.**

5. Определить все углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота одного из углов делят этот угол на четыре равные части.

(7 баллов)

**Решение:**

Продолжим медиану, биссектрису и высоту треугольника до пересечения с описанной вокруг него окружностью в точках *D, E, F* соответственно. Из равенства $⌣AF=⌣CD$ заключаем, что отрезки *AC* и *FD* параллельны, и поэтому $BF⊥FD$. Следовательно, *BD* есть диаметр окружности. Так как *BD* делит *AC* пополам и *BD* не перпендикулярно *AC,* то *AC* также есть диаметр окружности. Отсюда получаем:

$$∠B=\frac{π}{2}, ∠A=\frac{π}{2}-\frac{∠B}{2}=\frac{3π}{8}, ∠C=\frac{π}{2}-∠A=\frac{π}{8}.$$

B

D

E

F

C

A